Física I

Bacharelado

Vetores no plano e no espaço

Henrique Antonio Mendonça Faria

Tópicos da aula de hoje

1. Conceito de vetor.
2. Representação geométrica.
3. Representação algébrica.
4. Operações e propriedades:
   - Adição de vetores.
   - Multiplicação de vetor por escalar.
   - Produto escalar.
   - Produto vetorial.

1. Conceito de vetor

- No tratamento matemático de fenômenos evidenciam dois tipos de grandezas:

Escalar
(número real e unidade)

Comprimento, tempo massa, corrente elétrica, temperatura, quantidade de matéria, intensidade luminosa.

Vetorial
(intensidade, direção e sentido)

Força, velocidade, aceleração, campo elétrico, dentre outras.

1. Conceito de vetor

"Vetor é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a um seguimento AB."

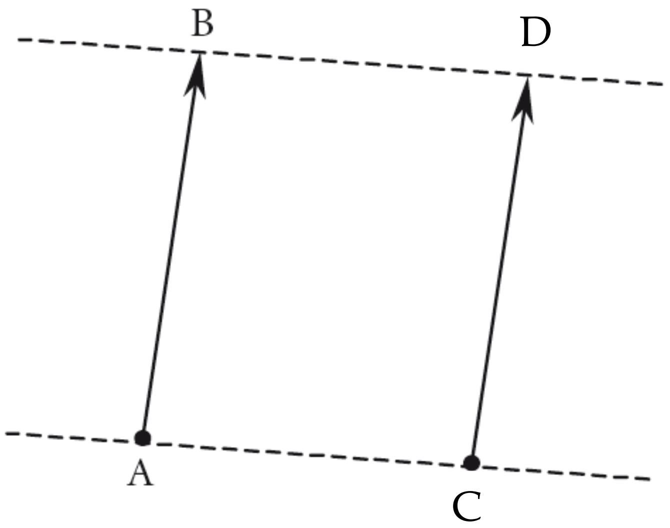


Figura 1.5

Segmentos equipolentes

AB ~ CD são segmentos equipolentes se AB || CD e AC = BD

Fonte das figuras: WINTERLE, P. 2014.

2. Representação geométrica

2. Representação geométrica

- Um mesmo vetor $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ pode ser determinado por uma série de segmentos orientados.
- Todos os segmentos orientados paralelos, de mesmo sentido e mesmo comprimento representam o mesmo vetor.

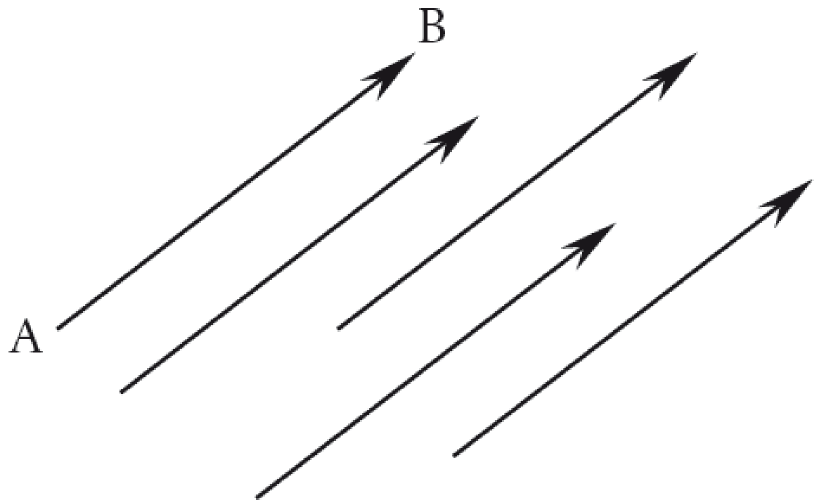


Figura 1.3

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \vec{\boldsymbol{v}}$$

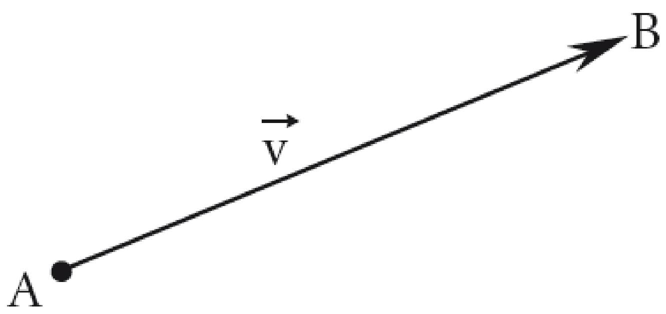


Figura 1.4

2. Representação geométrica

- **Módulo de um vetor**

$$|\vec{v}| = |\overrightarrow{AB}| = \|\overrightarrow{AB}\|$$

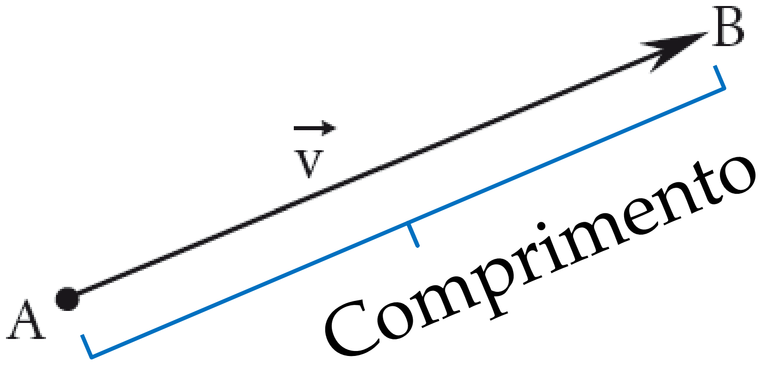


Figura 1.4

- **Casos particulares de vetores**

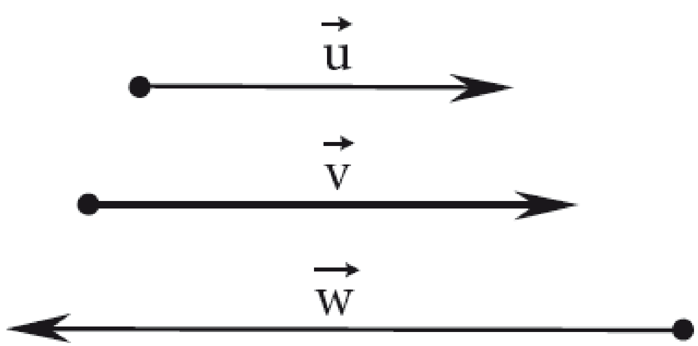


Figura 1.6

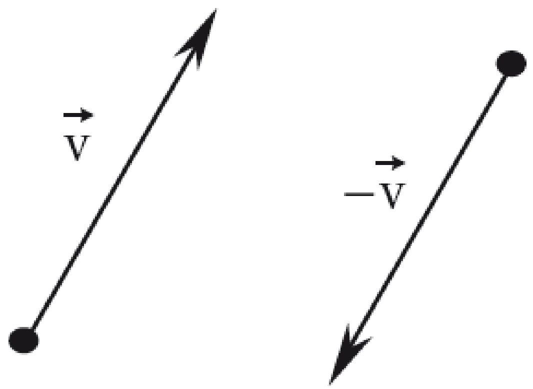


Figura 1.7

2. Representação geométrica

- **Versor** ($\vec{u}$)

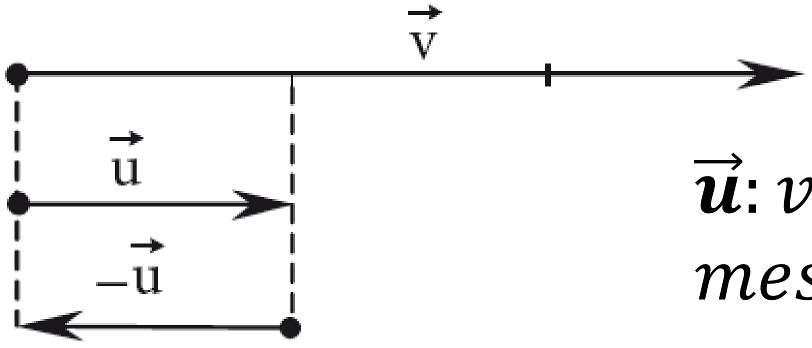


Figura 1.8

$\vec{\boldsymbol{u}}$: *vetor unitário e de mesmo sentido de* $\vec{\boldsymbol{v}}$.

- **Ortogonalidade**

$\vec{\boldsymbol{u}} \perp \vec{\boldsymbol{v}}$ *se* $\vec{\boldsymbol{u}}$ *faz um ângulo reto com algum representante de* $\vec{\boldsymbol{v}}$.

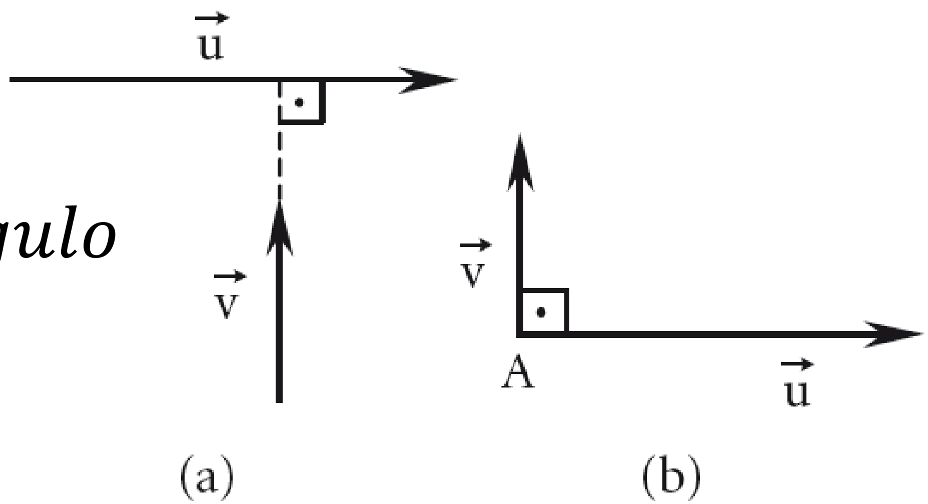


Figura 1.9

2. Representação geométrica

- **Vetores coplanares**

Dois vetores serão sempre coplanares

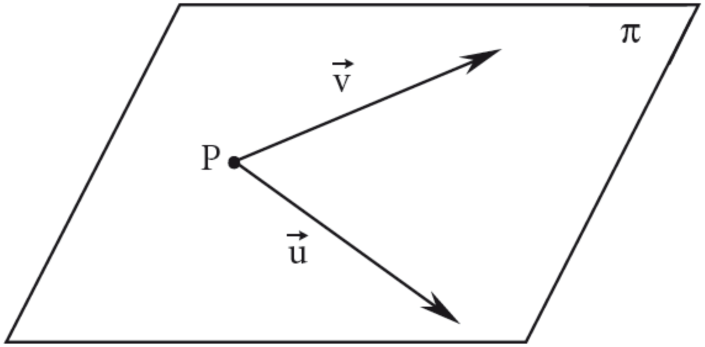


Figura 1.10

Três vetores podem ser coplanares ou não.

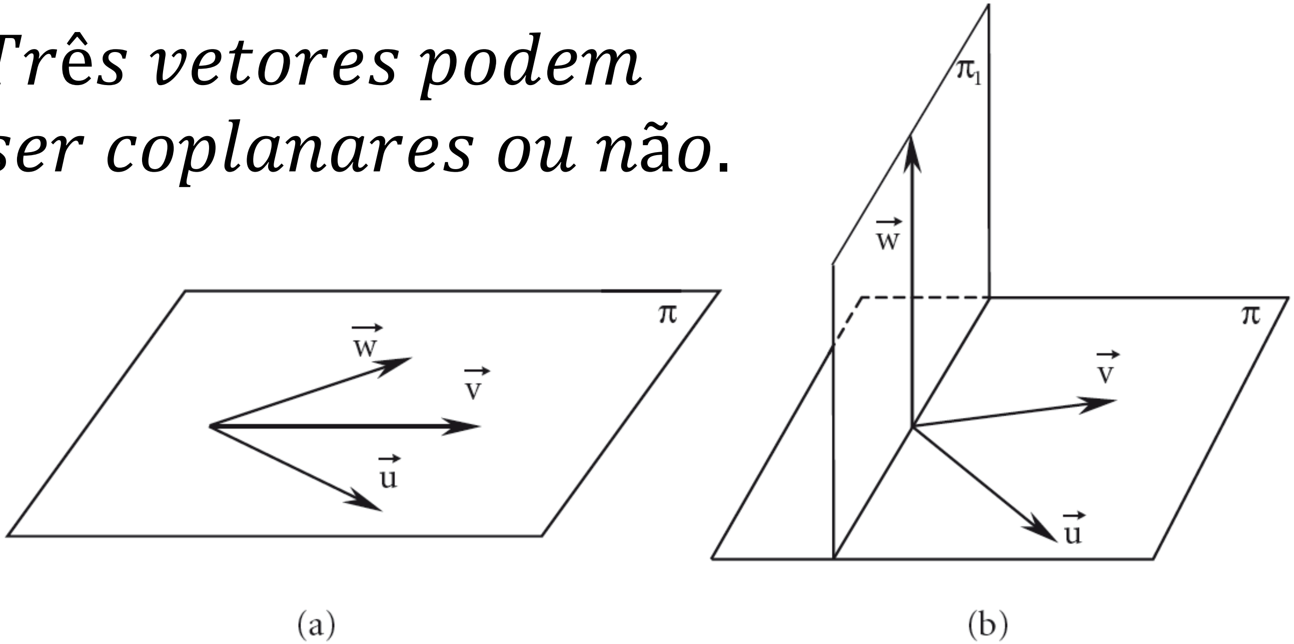


Figura 1.11

2. Representação geométrica

- **Adição de dois vetores**

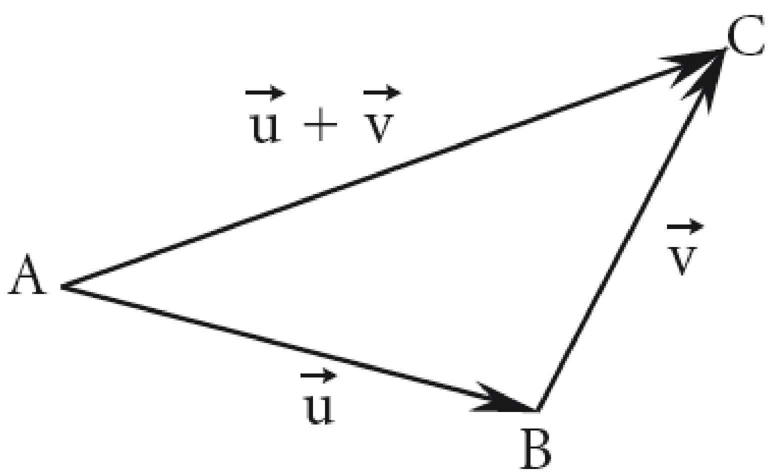


Figura 1.14

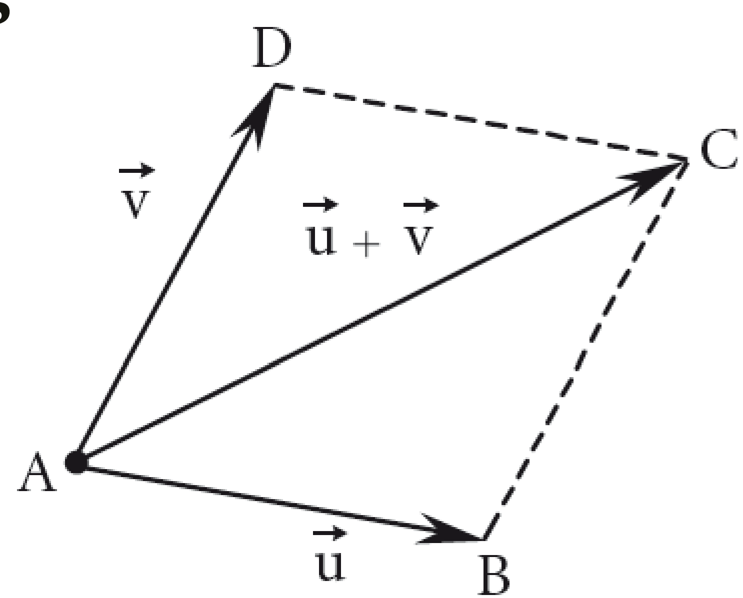


Figura 1.16

Regra do paralelogramo

2. Representação geométrica

- **Adição de três ou mais vetores**

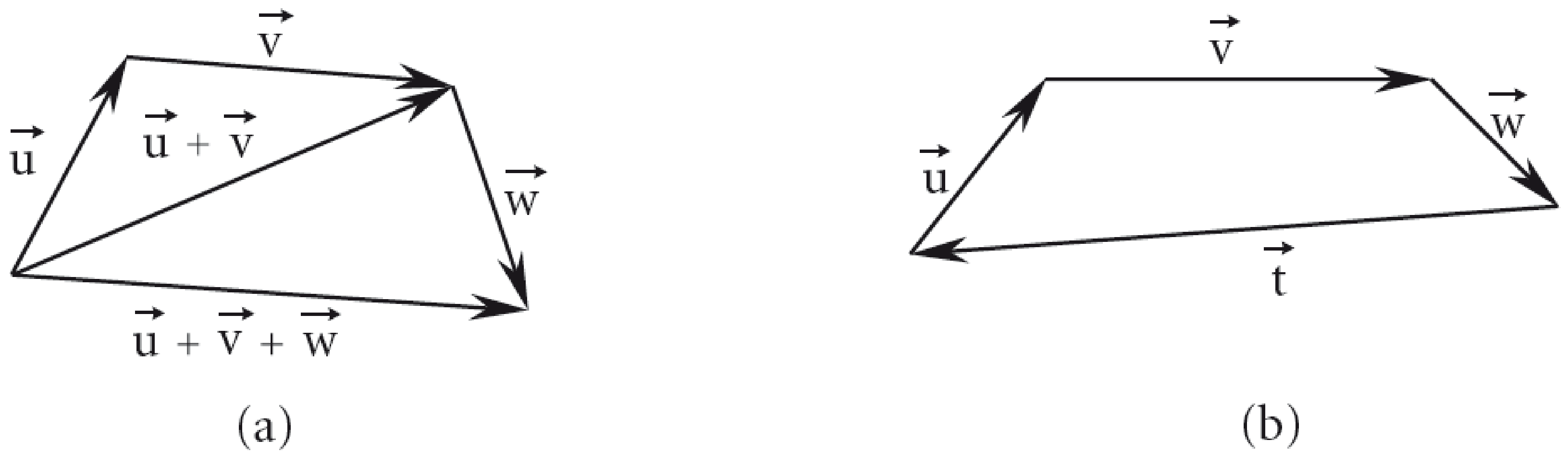


Figura 1.17

2. Representação geométrica

Exemplo 1 - soma de vetores

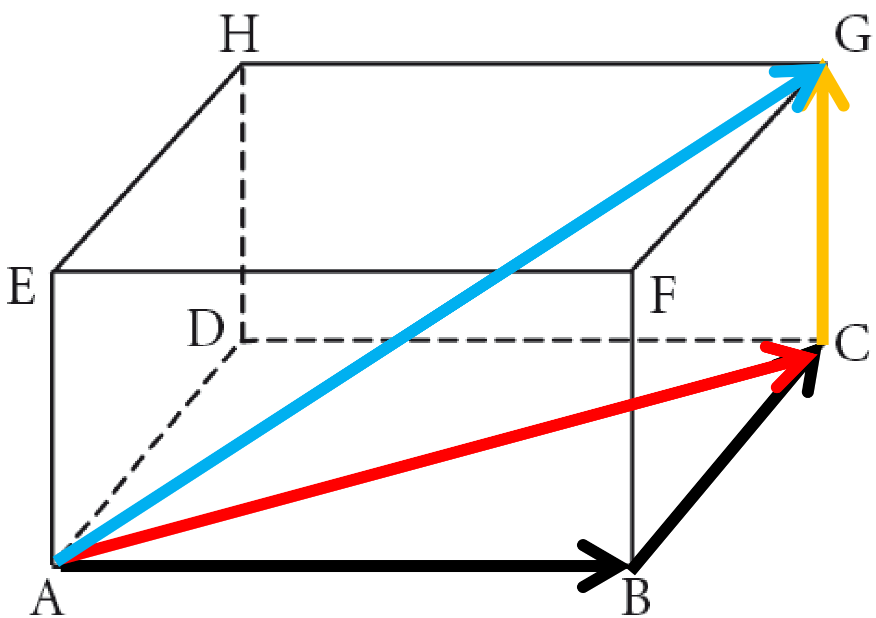


Figura 1.13

$$\underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{AC}} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$$

2. Representação geométrica

- **Multiplicação de vetor por escalar**

Dado um vetor $\vec{\boldsymbol{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ e um número real $\propto \neq \mathbf{0}$, Chama-se multiplicação do número real $\propto$ pelo vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$, o vetor $\propto \vec{\boldsymbol{v}}$ tal que:

a) $|\propto \vec{\boldsymbol{v}}| = |\propto|\,|\vec{\boldsymbol{v}}|$

b) $\propto \vec{\boldsymbol{v}}$ é paralelo a $\vec{\boldsymbol{v}}$

c) Se $\propto > 0$, $\propto \vec{\boldsymbol{v}}$ tem mesmo sentido de $\vec{\boldsymbol{v}}$.

Se $\propto < 0$, $\propto \vec{\boldsymbol{v}}$ tem sentido contrário de $\vec{\boldsymbol{v}}$.

Se $\propto = 0$ ou $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\mathbf{0}}$, então: de $\propto \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\mathbf{0}}$.

2. Representação geométrica

Exemplo 2 – multiplicação por escalar

$$\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v} \quad \rightarrow \quad 2(\vec{u}+\vec{v})=2\vec{u}+2\vec{v}$$

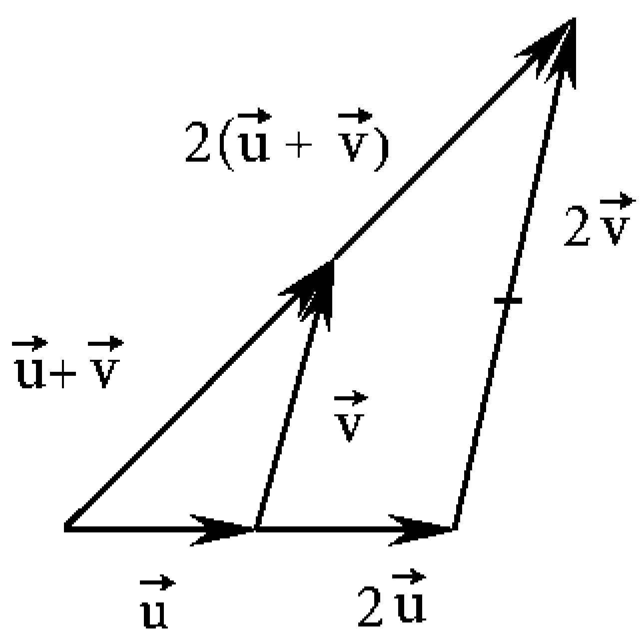


Figura 1.24

3. Representação algébrica

3. Representação algébrica

➢ **Combinação linear de dois vetores**

Um vetor $\vec{v}$ pode ser escrito como combinação linear de dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não paralelos.

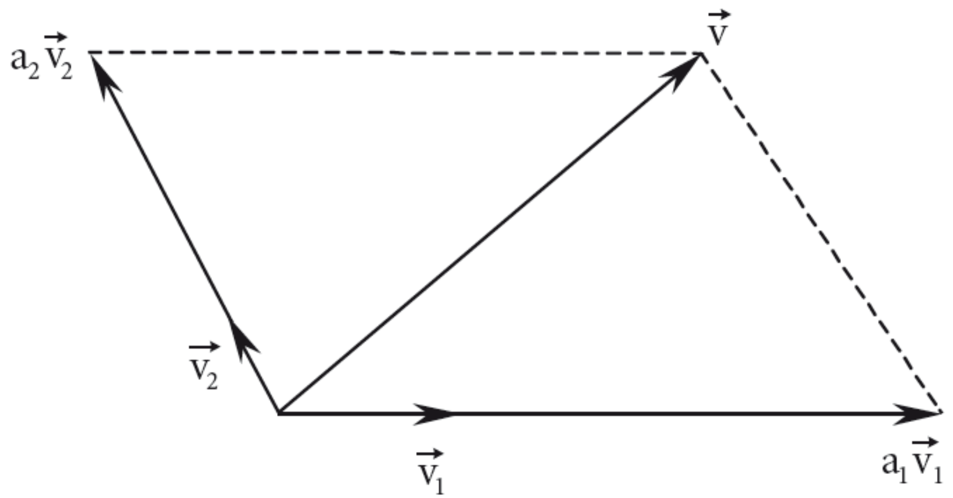


Figura 1.39

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$$

a_1 e a_2: componentes ou coordenadas de $\vec{v}$ na base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

$$\vec{v} = (a_1, a_2) = \langle a_1, a_2 \rangle \text{ (representação algébrica)}$$

3. Representação algébrica

➢ **Bases ortonormais**

$B = \{\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}}, \overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}\}$ é uma base ortonormal se:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}} \perp \overrightarrow{\boldsymbol{e_2}} \quad \text{e} \quad |\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}| = 1$$

- Existem infinitas bases ortonormais no plano xoy.
- A mais conveniente é chamada de canônica.
- Os vetores da base canônica $\{\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}\}$ são ortogonais entre si e coincidem com a direção e sentido dos eixos cartesianos.

3. Representação algébrica

➤ **Vetor representado na base canônica**

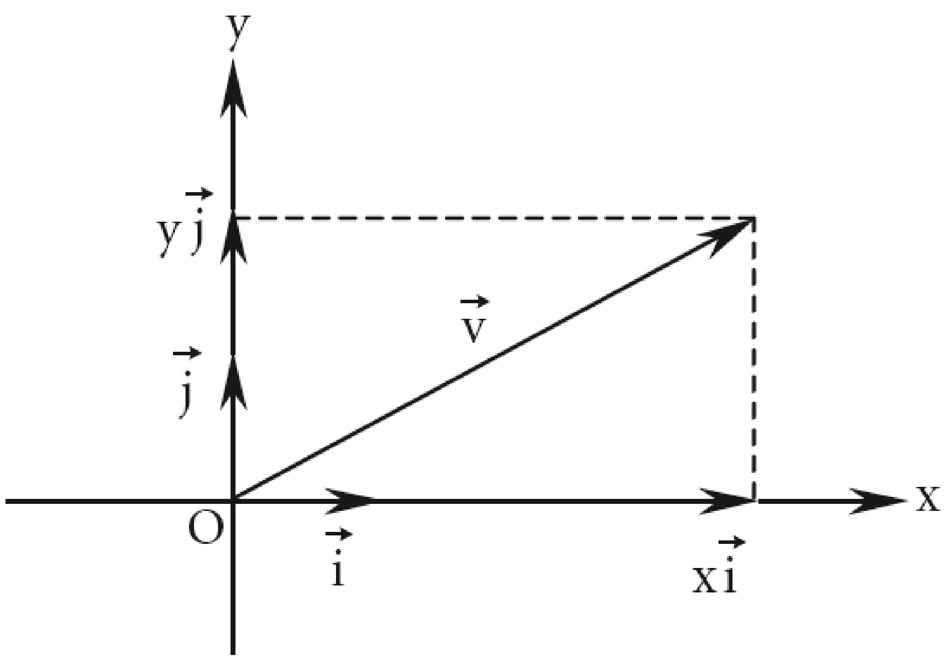


Figura 1.41

$$\vec{v} = (x, y) = \langle x, y \rangle$$

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$x\vec{i}$: projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre o eixo x.
$y\vec{j}$: projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre o eixo y.

3. Representação algébrica

- **Módulo de um vetor**

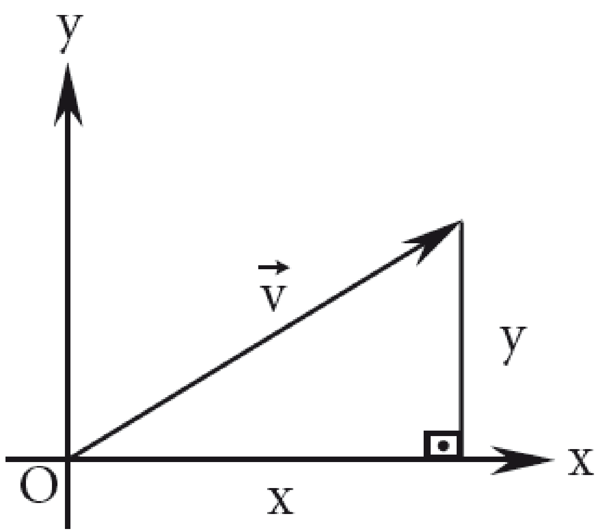


Figura 1.51

$$\vec{v} = (x, y)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- **Versor**

$$(\text{Versor de } \vec{v}) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

3. Representação algébrica

- **Vetores no espaço**
  - Acrescenta-se uma terceira coordenada e o terceiro elemento da base $\vec{\boldsymbol{k}} = \langle 0, 0, 1 \rangle$.
  - Base canônica no espaço: $\mathrm{C} = \{\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}\}$.
  - Representação algébrica do vetor no espaço:
    $$\vec{\boldsymbol{v}} = (x, y, z) = \langle x, y, z \rangle = x\vec{\boldsymbol{i}} + y\vec{\boldsymbol{j}} + z\vec{\boldsymbol{k}}$$
  - O conjunto formado pela origem O e a base $\{\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}\}$ é chamado sistema cartesiano ortogonal Oxyz.

3. Representação algébrica

- Vetores no espaço

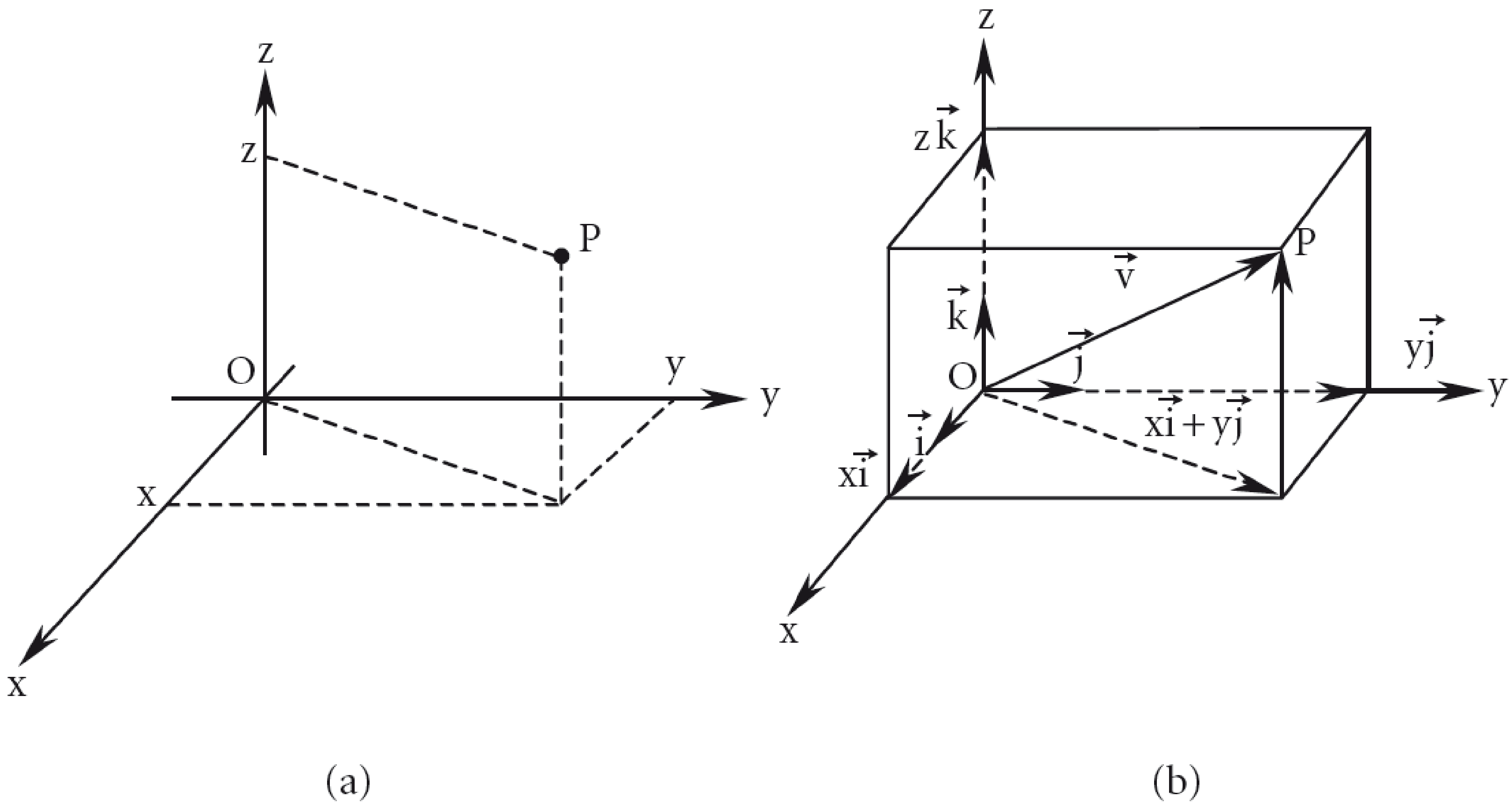


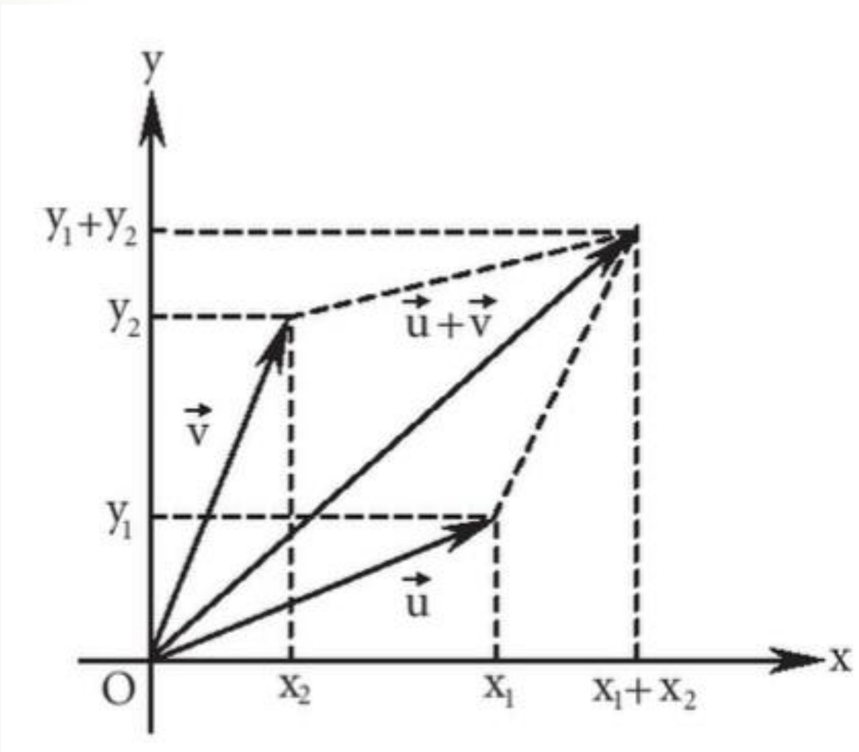
Figura 1.55

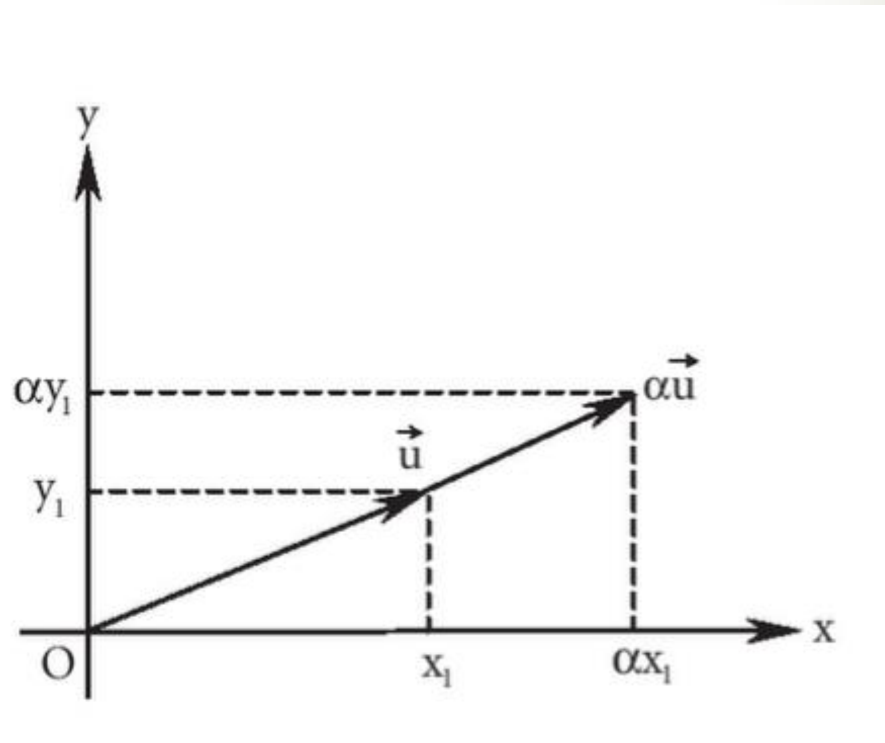
4. Operações e propriedades

4. Operações e propriedades

- **Soma e multiplicação por escalar**

Sejam $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2})$ e $\propto\, \in \mathbb{R}$





$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

4. Operações e propriedades

➢ **Propriedades da soma de vetores**

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores quaisquer.

I) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

II) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

III) Elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

IV) Elemento oposto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

4. Operações e propriedades

- **Propriedades da multiplicação de vetor por escalar**

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ vetores quaisquer e $\propto, \beta$ números reais.

I) $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$ (Associativa)

II) $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$ (Distributiva)

III) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ (Distributiva)

IV) $1\vec{v} = \vec{v}$ (Identidade)

4. Operações e propriedades

➢ **Paralelismo entre dois vetores**

Se $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são paralelos, existe um número real $\propto$ tal que:

$$\vec{u} = \alpha\vec{v}$$

$$(x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2)$$

$$(x_1, y_1) = (\alpha x_2, \alpha y_2)$$

$$x_1 = \alpha x_2 \text{ e } y_1 = \alpha y_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \alpha}$$

Exemplo 3 – dados dois vetores $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-2,4)$ encontrar o vetor $\vec{x}$ da soma

$$3\vec{x} + 2\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{x}$$

4. Operações e propriedades

- **Produto escalar**

Sejam: $\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{x_1}\vec{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{y_1}\vec{\boldsymbol{j}} + \boldsymbol{z_1}\vec{\boldsymbol{k}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{x_2}\vec{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{y_2}\vec{\boldsymbol{j}} + \boldsymbol{z_2}\vec{\boldsymbol{k}}$

O produto escalar, denotado por $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$, é a operação:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{x_1 x_2} + \boldsymbol{y_1 y_2} + \boldsymbol{z_1 z_2}$$

O resultado do produto escalar é um número real.

4. Operações e propriedades

➢ **Propriedades do produto escalar**

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$,

$\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (comutativa)
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributiva)
3. $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$ (distributiva)
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ $\quad \vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ se e somente se $\vec{u} = \vec{0}$
5. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

4. Operações e propriedades

➢ **Interpretação geométrica do produto escalar**

Seja um triângulo ABC definido pela soma de dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$, como na Figura 2.1.

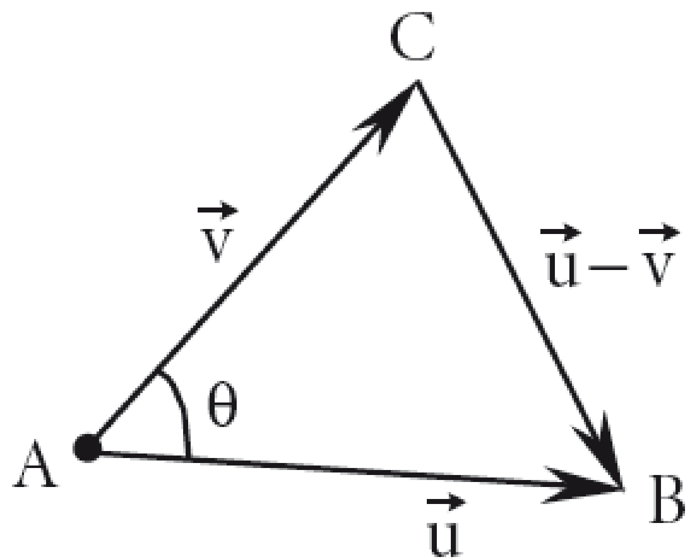


Figura 2.1

4. Operações e propriedades

➢ Interpretação geométrica do produto escalar

Aplicando a propriedade do módulo:

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$$

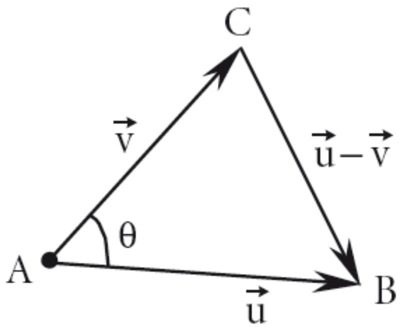


Figura 2.1

Por outro lado, da lei dos cossenos:

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\, cos\theta + |\vec{v}|^2$$

Igualando as duas equações:

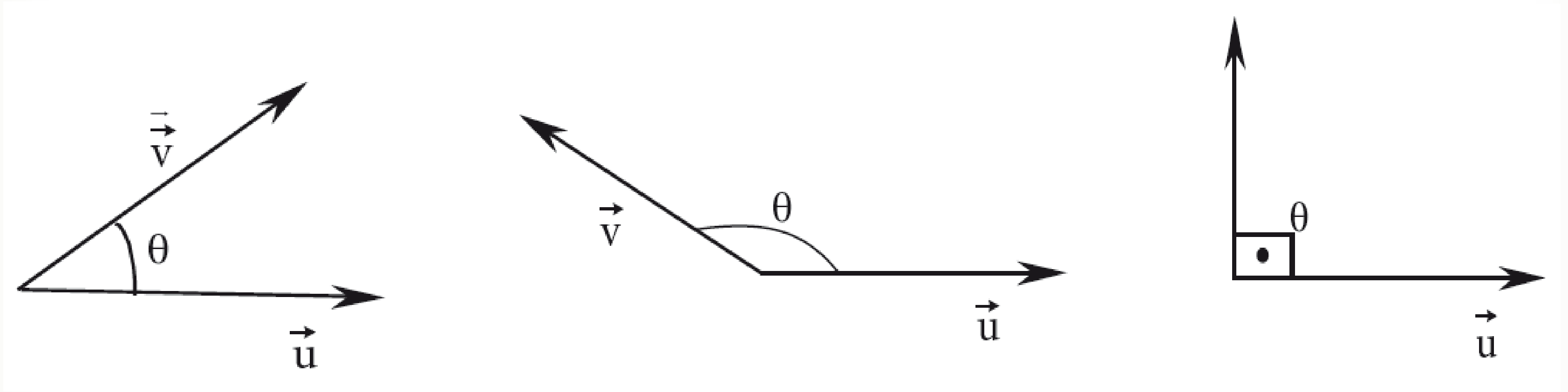
$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\, cos\theta}$$

$$0° < \theta \leq 180°$$

4. Operações e propriedades

- **Interpretação geométrica**

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$



Se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$,	Se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$,	Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
$\cos\theta > 0$	$\cos\theta < 0$	$\cos\theta = 0$
$0 \leq \theta < 90°$	$90° < \theta \leq 180°$	$\theta = 90°$

Exemplo 4 aplicação na física – Calcular o trabalhor realizado pela força $\vec{\boldsymbol{F}} = 8\vec{\boldsymbol{\imath}} + 6\vec{\boldsymbol{\jmath}}$ para deslocar um corpo de A até B, sabendo que $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = 20\ m$.

4. Operações e propriedades

➢ **Produto vetorial**

Sejam $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1})$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{z_2})$

- O produto vetorial: $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ou $\vec{u} \times \vec{v}$.
- Resulta em outro vetor, ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- Para calculá-lo utiliza-se o determinante:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = VETOR$$

4. Operações e propriedades

➢ **Produto vetorial**

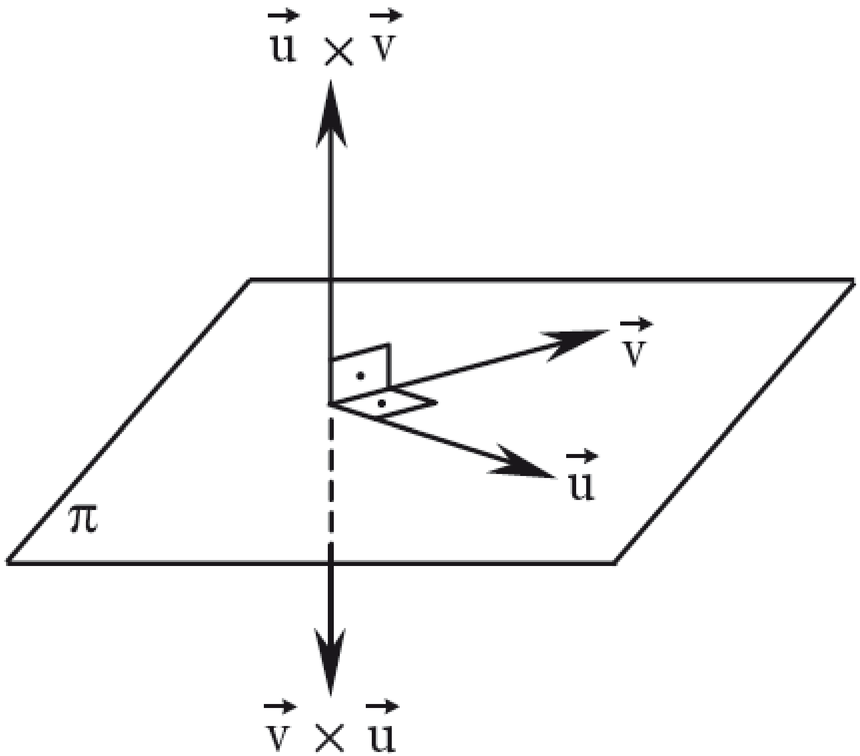


Figura 3.2

- O vetor $\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$ é ortotogonal a $\vec{\boldsymbol{u}}$ *e* $\vec{\boldsymbol{v}}$.

- O comprimento de $\vec{u} \times \vec{v}$ é definido por:
$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,sen\theta$$

4. Operações e propriedades

- **Produto vetorial**

O sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ é definido pela regra da mão direita.

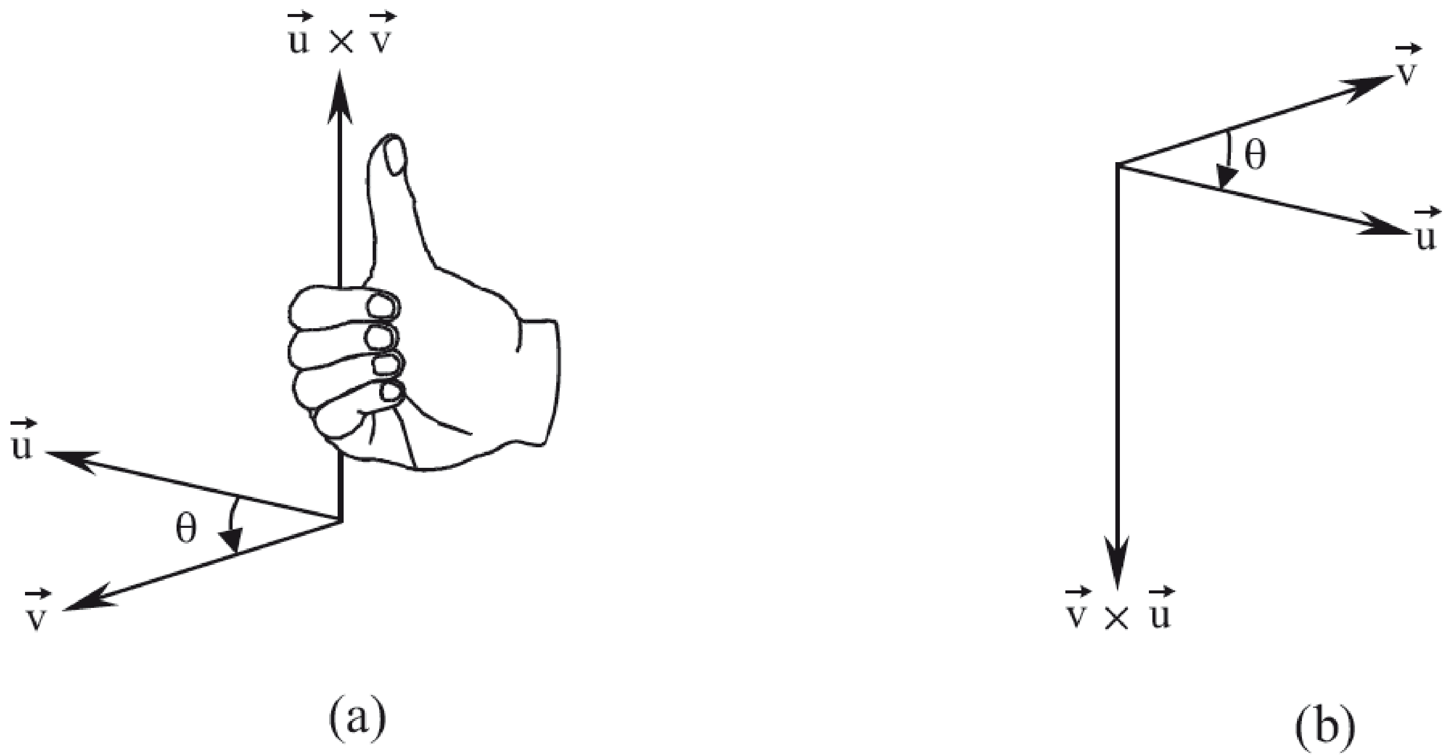


Figura 3.3

4. Operações e propriedades

- **Produto vetorial**

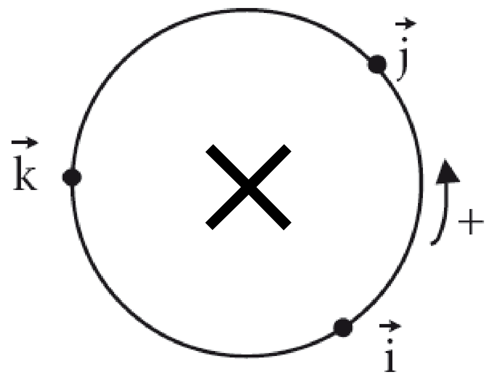
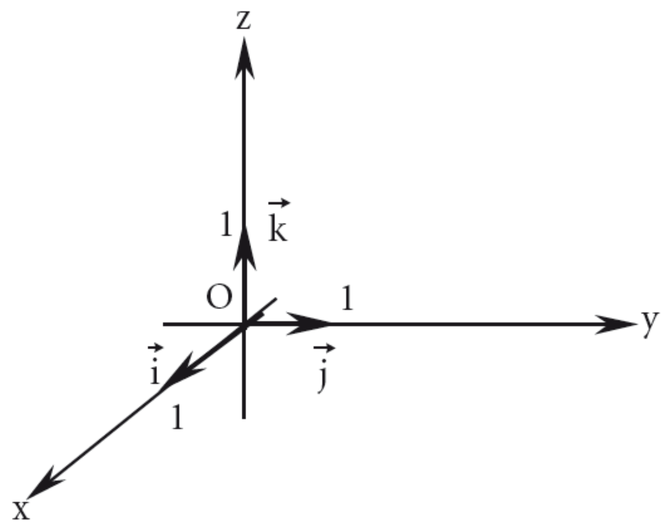


Figura 3.4

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$



4. Operações e propriedades

➢ Propriedades do produto vetorial

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores quaisquer e $\propto$ um escalar.

I) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

II) $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$

III) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

Nota: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ Não Associativo

Exemplo 5 – Sejam $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{5}, \mathbf{4}, \mathbf{3})$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$
Calcular o produto $\vec{u} \times \vec{v}$.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4)\vec{i} - (5-3)\vec{j} + (-4)\vec{k}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{u} \times \vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k} = \langle 4, -2, -4 \rangle$$

4. Operações e propriedades

➢ **Interpretação geométrica do produto vetorial**

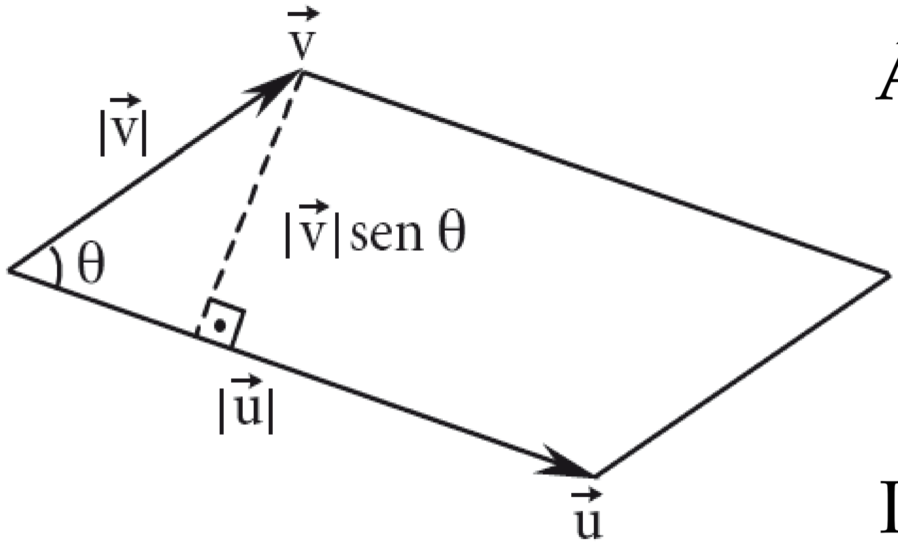


Figura 3.5

Área do paralelogramo:

$$A = Base \times altura$$

$$A = |\vec{u}||\vec{v}|sen\theta$$

Identidade de Lagrange

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|sen\theta = A$$

Área numericamente igual ao comprimento do vetor $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

Exemplo 6 aplicação na engenharia – Calcular o torque máximo sobre uma barra de comprimento $\vec{\boldsymbol{r}} = 2\vec{\boldsymbol{j}}$ [m] sujeita a uma força $\vec{\boldsymbol{F}} = 10\vec{\boldsymbol{\imath}}\,[N]$. Indicar o sentido de rotação.

Atividades propostas

Atividades propostas

a) Um bloco está sob a ação das forças constantes $\vec{F}$, $\vec{F_a}$, $\vec{F_N}$ e $\vec{P}$, como mostra a figura 2, a seguir.

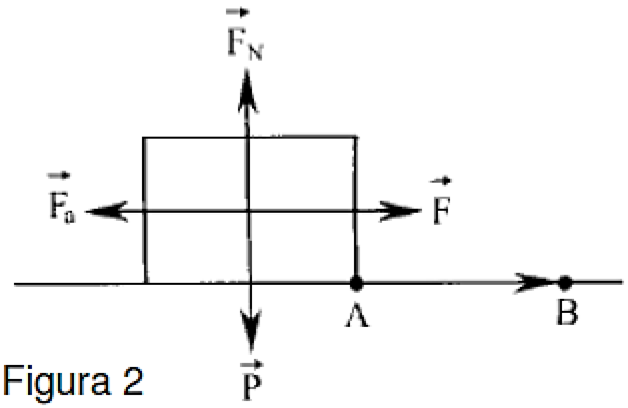


Figura 2

Sabe-se que

$|\vec{F}| = 10N$, $|\vec{F_a}| = 8N$, $|\vec{F_N}| = 3N$,

$|\vec{P}| = 3N$, $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ e $|\vec{d}| = 10m$.

Utilizando a expressão para o trabalho, $W = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cos\theta$, calcule o trabalho realizado para deslocar o bloco de A até B pelas forças constantes.

Fonte: WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2011.

Atividades propostas

Um parafuso é apertado aplicando-se uma força de 40N a uma chave de boca de 0,25m, como mostra a Figura 9.

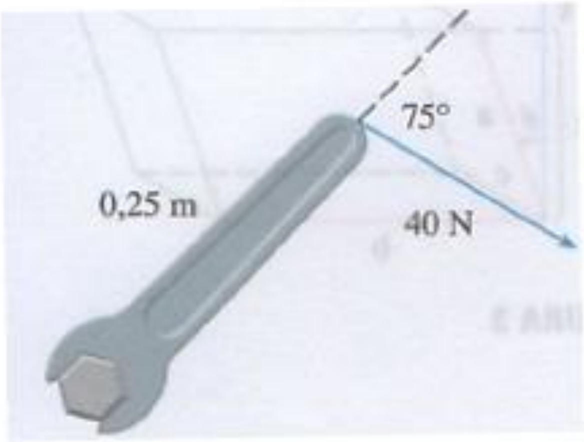


Figura 9

a) Determine o módulo do torque em relação ao centro do parafuso.

Fonte: Adaptado: STEWART, J. **Cálculo.** Volume 2. 7. ed. São Paulo. Thomson Learning, 2013.

Bibliografia

WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2a ed. São Paulo: Pearson, 2014.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Geometria Analítica. 2. Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.