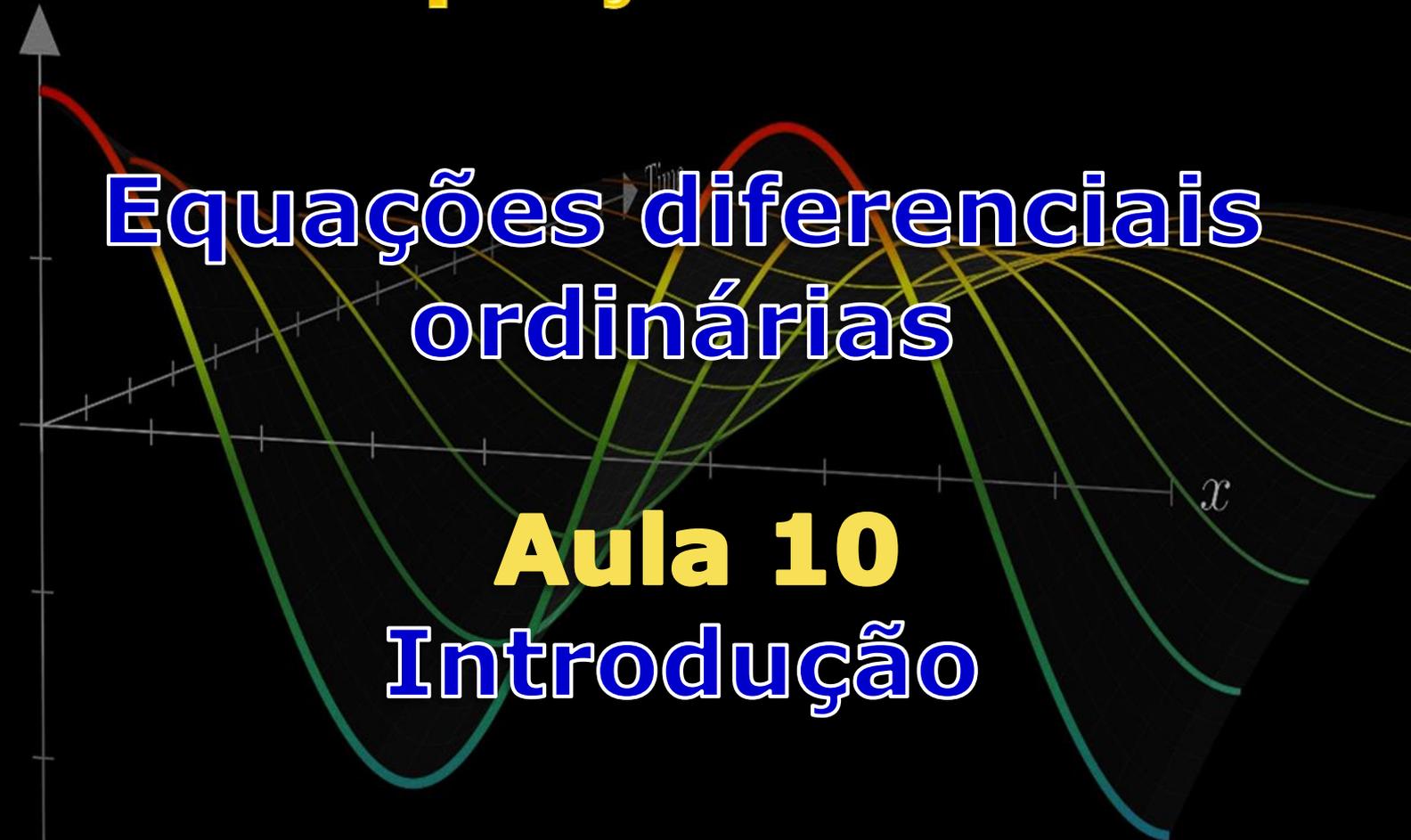


Equações diferenciais



Equações diferenciais ordinárias

Aula 10 Introdução

Henrique Antonio Mendonça Faria

Henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Motivação.
2. Modelos matemáticos.
3. Campos de direções e construção de modelos.
4. Classificação das equações diferenciais.

Pré-requisitos

Cálculo I: diferenciação e integração.



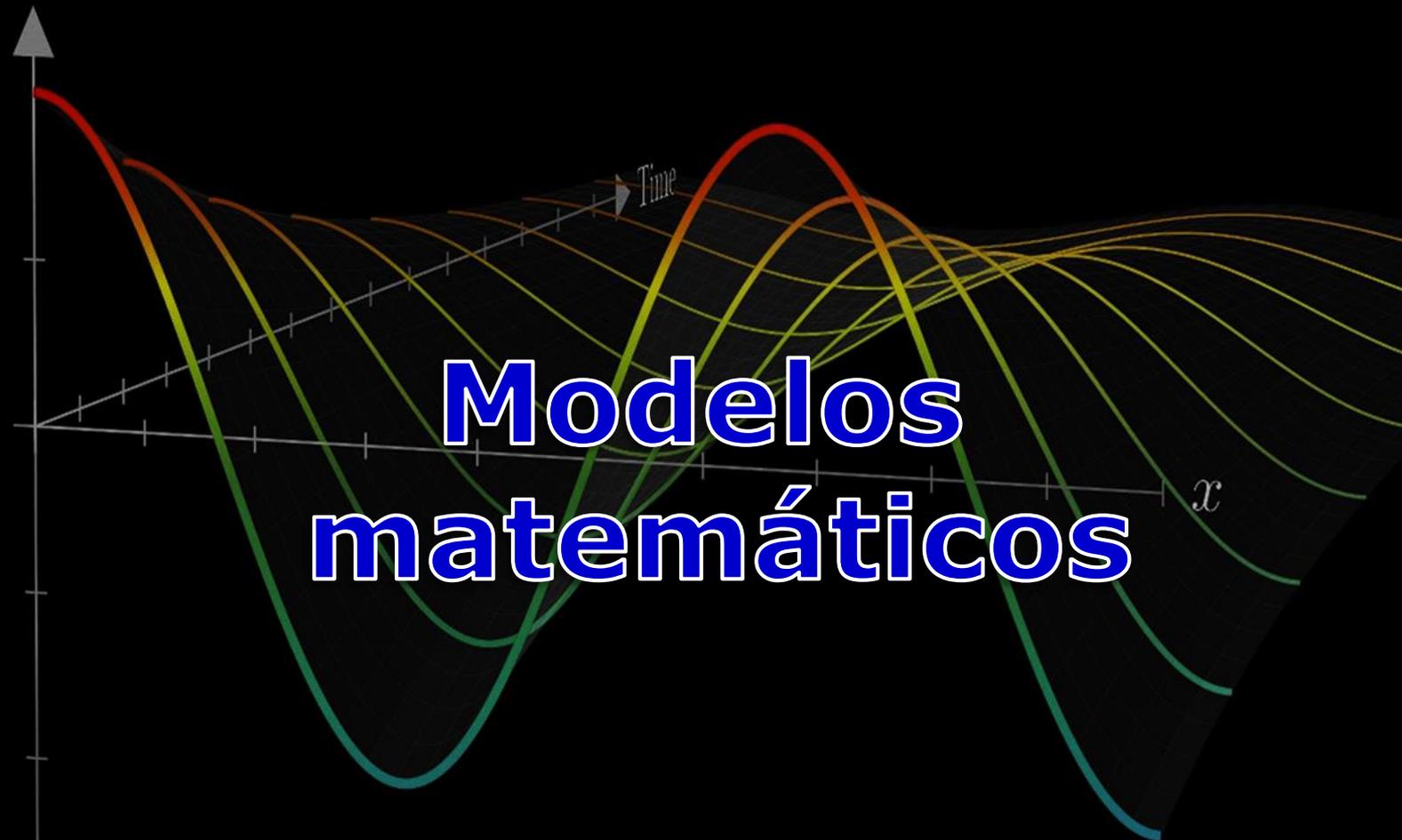
Motivação

Motivação

- As equações diferenciais são estudadas há três séculos pelos maiores matemáticos do mundo.
- Elas continuam sendo uma área de pesquisa dinâmica nos dias atuais.

Motivação

- As equações diferenciais são estudadas há três séculos pelos maiores matemáticos do mundo.
- Elas continuam sendo uma área de pesquisa dinâmica nos dias atuais.
- As equações diferenciais são aplicadas em diversas áreas de estudo.
 - Exemplos: reações químicas, reatores químicos, cinética química, entre outras.



Modelos matemáticos

Modelos matemáticos

- Muitos dos princípios, ou leis, que regem o mundo físico são **relações** entre **taxas de variação**.
- As relações são as equações e as taxas de variação são as derivadas.

Modelos matemáticos

- Muitos dos princípios, ou leis, que regem o mundo físico são **relações** entre **taxas de variação**.
- As relações são as equações e as taxas de variação são as derivadas.
- Equações contendo derivadas são chamadas de equações diferenciais.
- Uma **equação diferencial** que descreve algum processo físico é chamada, muitas vezes, de um **modelo matemático** do processo.

Exemplo 1: Objeto em queda livre



Exemplo 1: Objeto em queda livre

- Queda na atmosfera.
- Próximo à superfície.
- Força de arraste é considerada.



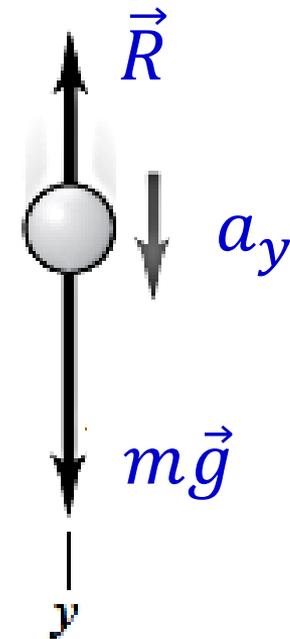
Fonte: Sears e Zemansky (2008)

Exemplo 1: Objeto em queda livre

- Queda na atmosfera.
- Próximo à superfície.
- Força de arraste é considerada.



Fonte: Sears e Zemansky (2008)



Exemplo 1: Objeto em queda livre

- Queda na atmosfera.
- Próximo à superfície.
- Força de arraste é considerada.



Fonte: Sears e Zemansky (2008)

t : variável independente.

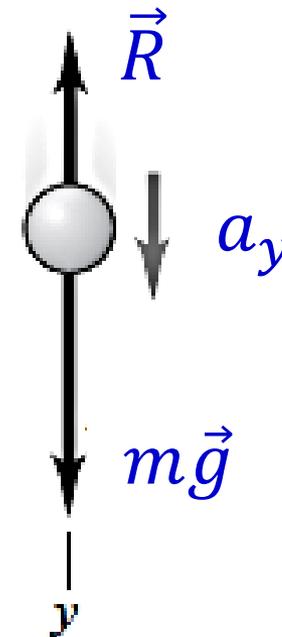
$v(t)$: variável dependente (?).

R : força de arraste (resistência do ar).

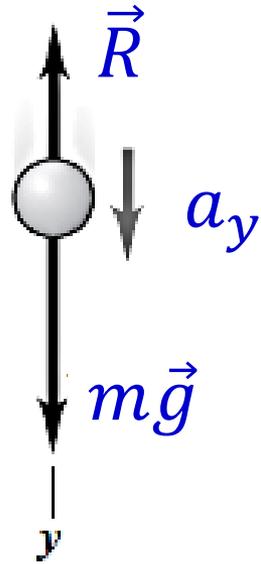
g : aceleração devido à gravidade.

m : massa do corpo.

γ : coeficiente de resistência do ar.



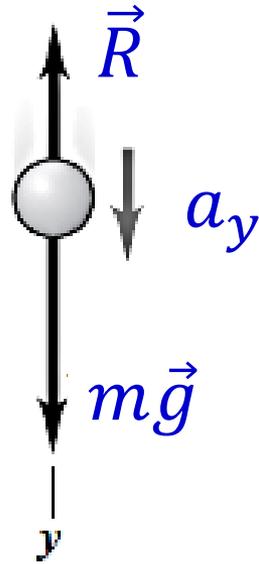
Exemplo 1: Objeto em queda livre



✓ Lei do movimento: 2ª Lei Newton.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Exemplo 1: Objeto em queda livre

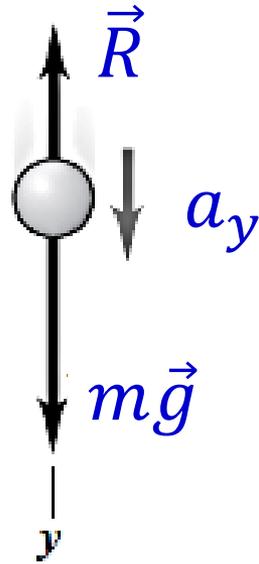


✓ Lei do movimento: 2ª Lei Newton.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\sum F_y = mg + (-R) = ma_y$$

Exemplo 1: Objeto em queda livre



✓ Lei do movimento: 2ª Lei Newton.

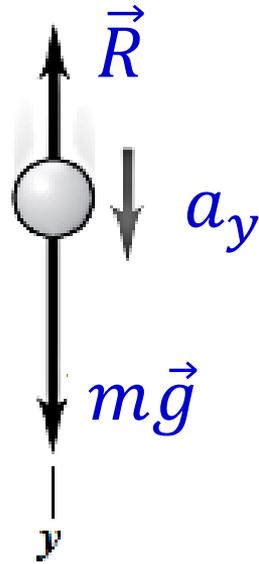
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\sum F_y = mg + (-R) = ma_y$$

✓ Supondo o arraste proporcional à velocidade: $R = \gamma v$

$$mg - \gamma v = m \frac{dv}{dt}$$

Exemplo 1: Objeto em queda livre



✓ Lei do movimento: 2ª Lei Newton.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\sum F_y = mg + (-R) = ma_y$$

✓ Supondo o arraste proporcional à velocidade: $R = \gamma v$

$$mg - \gamma v = m \frac{dv}{dt}$$



$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma}{m} v$$

*Modelo matemático do
corpo em queda*

Exemplo 1: Objeto em queda livre

- ✓ Resolver o modelo é encontrar uma função $v = v(t)$ que substituída satisfaz a equação.
- ✓ Em muitas problemas reais as **soluções analíticas**, ou explícitas, são de **difícil obtenção**.

Exemplo 1: Objeto em queda livre

- ✓ Resolver o modelo é encontrar uma função $v = v(t)$ que substituída satisfaz a equação.
- ✓ Em muitas problemas reais as **soluções analíticas**, ou explícitas, são de **difícil obtenção**.
- ✓ Em **outros casos** a expressão analítica é tão complicada que **não fornece interpretação válida**.

Exemplo 1: Objeto em queda livre

- ✓ Resolver o modelo é encontrar uma função $v = v(t)$ que substituída satisfaz a equação.
- ✓ Em muitas problemas reais as **soluções analíticas**, ou explícitas, são de **difícil obtenção**.
- ✓ Em **outros casos** a expressão analítica é tão complicada que **não fornece interpretação válida**.
- ✓ No entanto, é **possível extrair** do modelo muitas **informações** sem resolver a equação diferencial analiticamente.

Análise do modelo do corpo em queda

- O objetivo é descobrir características relevantes sobre as soluções sem encontrá-las diretamente.

Análise do modelo do corpo em queda

- O objetivo é descobrir características relevantes sobre as soluções sem encontrá-las diretamente.
- Supondo os seguintes valores numéricos para as constantes do exemplo 1:

$$g = 9,8 \frac{m}{s^2}; \quad \gamma = 2 \frac{kg}{s}; \quad m = 10 \text{ kg}$$

Análise do modelo do corpo em queda

- O objetivo é descobrir características relevantes sobre as soluções sem encontrá-las diretamente.
- Supondo os seguintes valores numéricos para as constantes do exemplo 1:

$$g = 9,8 \frac{m}{s^2}; \quad \gamma = 2 \frac{kg}{s}; \quad m = 10 \text{ kg}$$

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v}{5}$$

Análise do modelo do corpo em queda

- O objetivo é descobrir características relevantes sobre as soluções sem encontrá-las diretamente.
- Supondo os seguintes valores numéricos para as constantes do exemplo 1:

$$g = 9,8 \frac{m}{s^2}; \quad \gamma = 2 \frac{kg}{s}; \quad m = 10 \text{ kg}$$

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v}{5}$$

- Para cada valor de v pode-se encontrar $\frac{dv}{dt}$.

Análise do modelo do corpo em queda

- O objetivo é descobrir características relevantes sobre as soluções sem encontrá-las diretamente.
- Supondo os seguintes valores numéricos para as constantes do exemplo 1:

$$g = 9,8 \frac{m}{s^2}; \quad \gamma = 2 \frac{kg}{s}; \quad m = 10 \text{ kg}$$

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v}{5}$$

v (m/s)	$\frac{dv}{dt}$ (m/s ²)
40	1,8

- Para cada valor de v pode-se encontrar $\frac{dv}{dt}$.

Análise do modelo do corpo em queda

- O objetivo é descobrir características relevantes sobre as soluções sem encontrá-las diretamente.
- Supondo os seguintes valores numéricos para as constantes do exemplo 1:

$$g = 9,8 \frac{m}{s^2}; \quad \gamma = 2 \frac{kg}{s}; \quad m = 10 \text{ kg}$$

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v}{5}$$

- Para cada valor de v pode-se encontrar $\frac{dv}{dt}$.

v (m/s)	$\frac{dv}{dt}$ (m/s ²)
40	1,8
44	1,0
50	- 0,2
52	- 0,6
56	- 1,4

Análise do modelo do corpo em queda

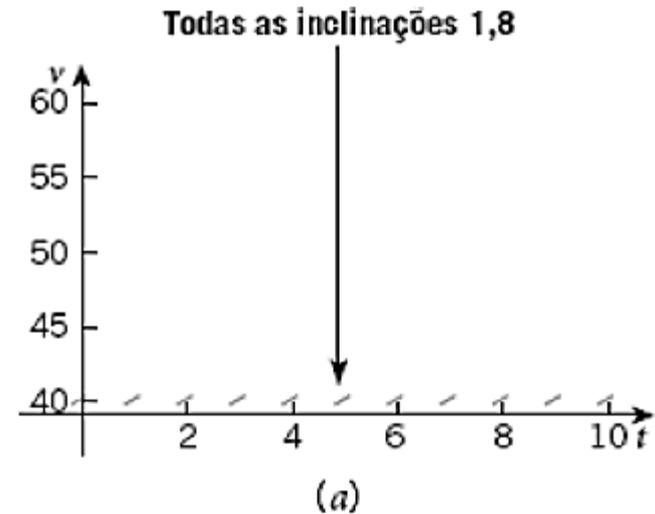
- Para cada v a derivada independe de t .

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v}{5}$$

Análise do modelo do corpo em queda

- Para cada v a derivada independe de t .

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v}{5}$$



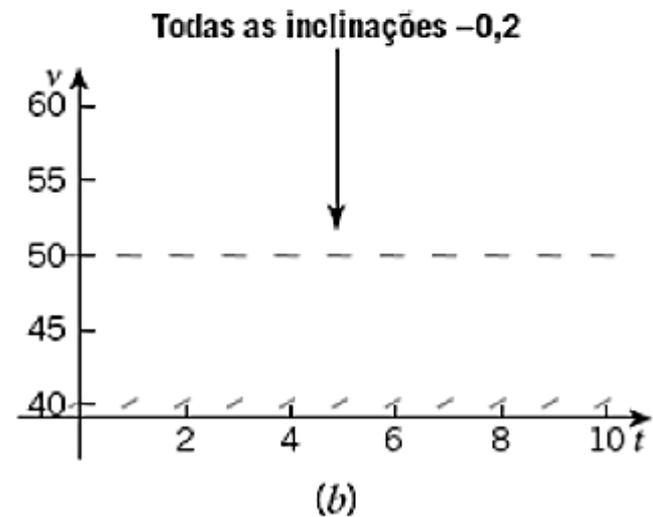
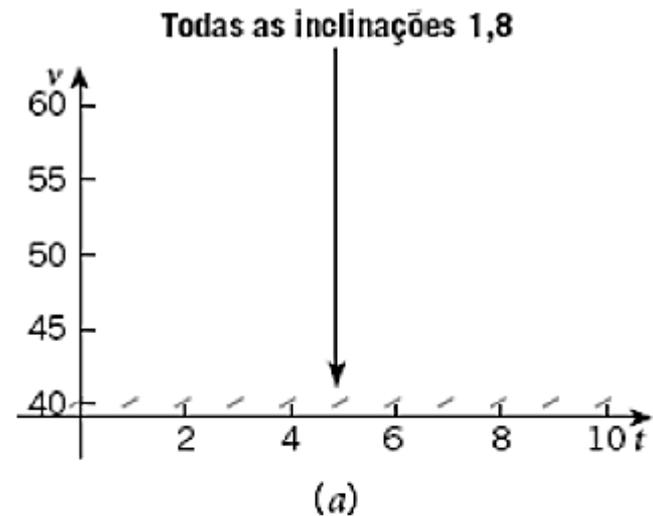
v (m/s)	$\frac{dv}{dt}$ (m/s ²)
40	1,8
44	1,0
50	- 0,2
52	- 0,6
56	- 1,4

Análise do modelo do corpo em queda

- Para cada v a derivada independe de t .

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v}{5}$$

v (m/s)	$\frac{dv}{dt}$ (m/s ²)
40	1,8
44	1,0
50	-0,2
52	-0,6
56	-1,4



Análise do modelo do corpo em queda

- Atribuindo valores para v constrói-se o gráfico $v \times t$.

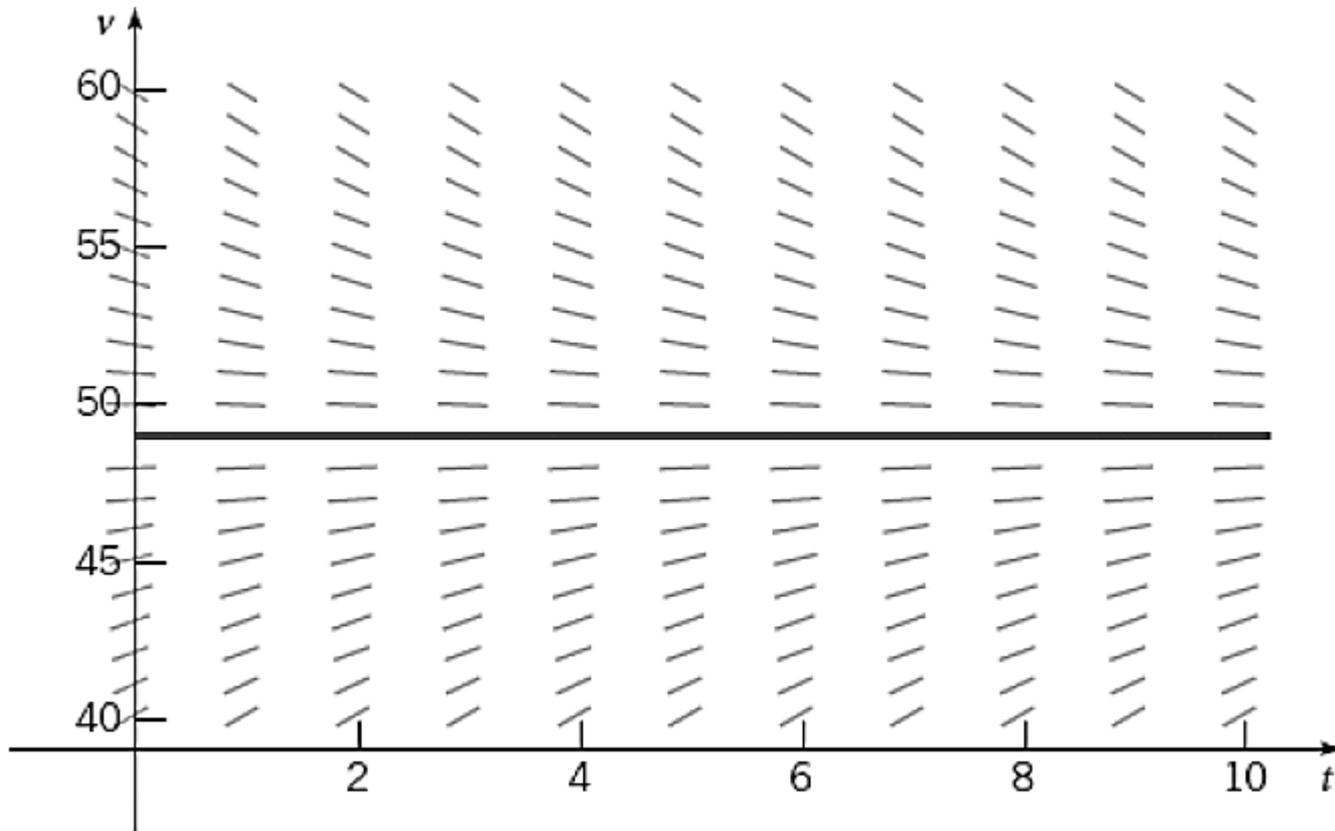


Figura 1.1.3: Campo de direções para o modelo do corpo em queda.

Análise do modelo do corpo em queda

- Atribuindo valores para v constrói-se o gráfico $v \times t$.

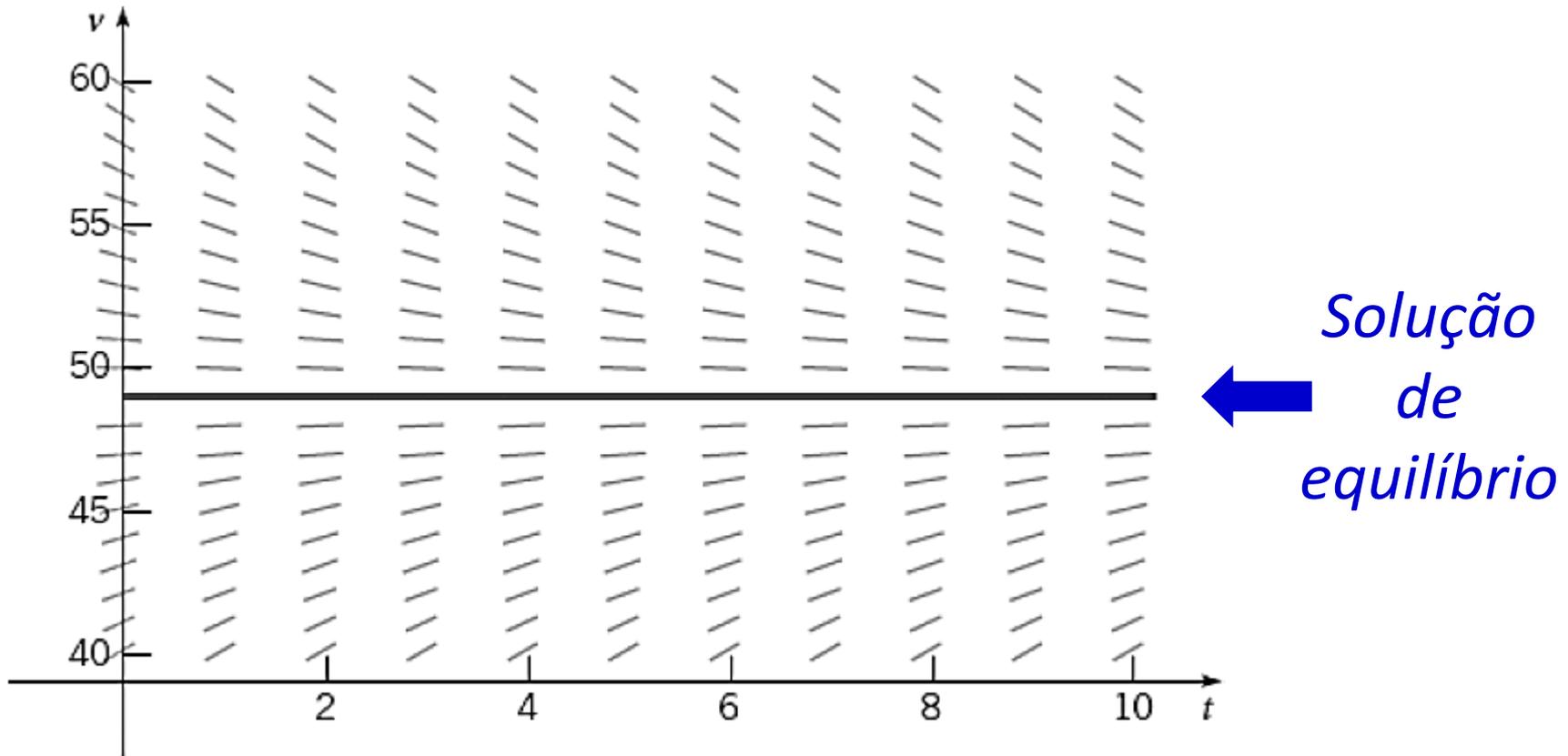


Figura 1.1.3: Campo de direções para o modelo do corpo em queda.

Análise do modelo do corpo em queda

- Cada segmento é tangente ao gráfico da solução.
- Se $v <$ valor de equilíbrio todos os segmentos têm coeficiente angular positivo e v aumenta enquanto o corpo cai.

Análise do modelo do corpo em queda

- Cada segmento é tangente ao gráfico da solução.
- Se $v <$ valor de equilíbrio todos os segmentos têm coeficiente angular positivo e v aumenta enquanto o corpo cai.
- O valor de equilíbrio (**crítico**) pode ser determinado:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad 9,8 - \frac{v}{5} = 0 \quad \rightarrow \quad v_c = 49 \text{ m/s}$$

Análise do modelo do corpo em queda

- Cada segmento é tangente ao gráfico da solução.
- Se $v <$ valor de equilíbrio todos os segmentos têm coeficiente angular positivo e v aumenta enquanto o corpo cai.

- O valor de equilíbrio (**crítico**) pode ser determinado:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad 9,8 - \frac{v}{5} = 0 \quad \rightarrow \quad v_c = 49 \text{ m/s}$$

- O valor $v_c = 49 \text{ m/s}$ é chamado de **solução de equilíbrio** entre as forças da gravidade e de arraste.



Campos de direções e construção de modelos

Campos de direções

- São representações gráficas úteis para o estudo das soluções de equações diferenciais da forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

Campos de direções

- São representações gráficas úteis para o estudo das soluções de equações diferenciais da forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

- Primeiro passo para investigar um modelo.
- Para construí-lo não é necessário resolver a equação diferencial.

Campos de direções

- São representações gráficas úteis para o estudo das soluções de equações diferenciais da forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

- Primeiro passo para investigar um modelo.
- Para construí-lo não é necessário resolver a equação diferencial.
- A utilização de softwares é recomendada para construção de campos de direções.

Ex.: <https://homepages.bluffton.edu/~nesterd/apps/slopefields.html>

Passos para construção de modelos

1. Identificar as variáveis independente e dependente.
2. Escolher as unidades de medida para cada variável.

Passos para construção de modelos

1. Identificar as variáveis independente e dependente.
2. Escolher as unidades de medida para cada variável.
3. Usar o princípio ou a lei que rege o fenômeno a ser investigado.

Passos para construção de modelos

1. Identificar as variáveis independente e dependente.
2. Escolher as unidades de medida para cada variável.
3. Usar o princípio ou a lei que rege o fenômeno a ser investigado.
4. Expressar a lei em função das variáveis escolhidas.

Passos para construção de modelos

1. Identificar as variáveis independente e dependente.
2. Escolher as unidades de medida para cada variável.
3. Usar o princípio ou a lei que rege o fenômeno a ser investigado.
4. Expressar a lei em função das variáveis escolhidas.
5. Certificar que cada termo da equação está dimensionalmente correto.

Passos para construção de modelos

1. Identificar as variáveis independente e dependente.
2. Escolher as unidades de medida para cada variável.
3. Usar o princípio ou a lei que rege o fenômeno a ser investigado.
4. Expressar a lei em função das variáveis escolhidas.
5. Certificar que cada termo da equação está dimensionalmente correto.
6. Em problemas complexos é necessário um sistema com várias equações diferenciais.

Passos para construção de modelos

1. Identificar as variáveis independente e dependente.
2. Escolher as unidades de medida para cada variável.
3. Usar o princípio ou a lei que rege o fenômeno a ser investigado.
4. Expressar a lei em função das variáveis escolhidas.
5. Certificar que cada termo da equação está dimensionalmente correto.
6. Em problemas complexos é necessário um sistema com várias equações diferenciais.
7. Comparar o resultado do modelo com resultados experimentais.

Resolução do modelo do corpo em queda

O objeto parte do repouso e cai de uma altura de 300 m.

(a) Qual é a velocidade em um instante qualquer?

(b) Quanto tempo leva para atingir o solo?

(c) Qual a velocidade no momento do impacto?

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v}{5} \quad v(0) = 0 \quad (\text{condição inicial})$$



Classificação das equações diferenciais

Objetivos da disciplina

- Distinguir propriedades das soluções das equações diferenciais (E.D.).
- Descrever métodos eficazes para resolver essas E.D.

Objetivos da disciplina

- Distinguir propriedades das soluções das equações diferenciais (E.D.).
- Descrever métodos eficazes para resolver essas E.D.
- Em alguns casos, encontrar uma solução aproximada para o problema.

Objetivos da disciplina

- Distinguir propriedades das soluções das equações diferenciais (E.D.).
- Descrever métodos eficazes para resolver essas E.D.
- Em alguns casos, encontrar uma solução aproximada para o problema.
- A classificação das E.D. é útil para aplicação do método adequado de resolução.
- Existem, pelo menos, quatro maneiras para classificar as E.D., como indicadas a seguir.

A – Quanto à dependência das variáveis

- **Equação diferencial ordinária:** a função incógnita depende de uma única variável independente.

$$L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = E(t),$$

A – Quanto à dependência das variáveis

- **Equação diferencial ordinária:** a função incógnita depende de uma única variável independente.

$$L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = E(t),$$

- **Equação diferencial parcial:** as derivadas são parciais, ou seja, a função depende de duas ou mais variáveis.

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

equação de calor

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}.$$

equação de onda

B – Quanto à ordem

- A ordem da E.D. é definida pela derivada de ordem mais alta.

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right) \quad (\text{Orden } n)$$

$$ty' - y = t^2 \quad (\text{Primeira orden})$$

$$y'' - y = 0 \quad (\text{Segunda orden})$$

$$y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4 \quad (\text{Terceira orden})$$

C – Quanto à linearidade

- **Equações lineares:** os termos da E.D., ou seja, as funções aparecem elevadas à primeira potência.

C – Quanto à linearidade

- **Equações lineares:** os termos da E.D., ou seja, as funções aparecem elevadas à primeira potência.

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = g(t).$$

$$y'' - y = 0$$

$$ty' - y = t^2$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0.$$

➤ **Equações NÃO lineares:**

- As funções incógnitas estão elevadas à potências maiores do que a unidade ou,
- contém produtos das funções incógnitas ou,
- contém funções transcendentais (e , \log , \textit{seno} , $\textit{cosseno}$, etc).

➤ Equações NÃO lineares:

- As funções incógnitas estão elevadas à potências maiores do que a unidade ou,
- contém produtos das funções incógnitas ou,
- contém funções transcendentais (e , \log , seno , cosseno , etc).

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\text{sen}\theta = 0,$$

problema do pêndulo.

$$(1 + y^2)\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + y = e^t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \text{sen}(t + y) = \text{sen}t$$

D – Sistemas de equações diferenciais

- Composto de mais de uma equação.
 - As equações seguem as classificações anteriores.

$$x_1' = x_2,$$

$$x_2' = -x_1 - \frac{1}{8}x_2.$$

$$x_1' = 2x_2$$

$$x_2' = -2x_1$$

Questões relevantes

- **Solução analítica de uma E.D.:** qualquer função da variável independente que satisfaça a equação.

Questões relevantes

- **Solução analítica de uma E.D.:** qualquer função da variável independente que satisfaça a equação.
- **Solução de um problema de valor inicial.:** qualquer solução da E.D. que satisfaça a condição inicial.

Questões relevantes

- **Solução analítica de uma E.D.:** qualquer função da variável independente que satisfaça a equação.
- **Solução de um problema de valor inicial.:** qualquer solução da E.D. que satisfaça a condição inicial.
- **Existência de solução:** nem sempre uma E.D. tem solução analítica.
- Existem teoremas que, em certas condições, podem garantir a solução analítica da E.D.

Questões relevantes

- **Solução analítica de uma E.D.:** qualquer função da variável independente que satisfaça a equação.
- **Solução de um problema de valor inicial.:** qualquer solução da E.D. que satisfaça a condição inicial.
- **Existência de solução:** nem sempre uma E.D. tem solução analítica.
- Existem teoremas que, em certas condições, podem garantir a solução analítica da E.D.
- Mesmo que existam soluções pode não ser possível expressá-las por meio de funções elementares (polinômios, trigonométricas, exp., log. e hiperbólicas).

Utilização de softwares

- Os softwares podem ser ferramentas extremamente úteis para o estudo de equações diferenciais.

Utilização de softwares

- Os softwares podem ser ferramentas extremamente úteis para o estudo de equações diferenciais.
- As **apresentações gráficas** são, muitas vezes, mais claras e úteis para compreender e **interpretar a solução** de uma equação diferencial.

Utilização de softwares

- Os softwares podem ser ferramentas extremamente úteis para o estudo de equações diferenciais.
- As **apresentações gráficas** são, muitas vezes, mais claras e úteis para compreender e **interpretar a solução** de uma equação diferencial.
- **Pacotes computacionais mais robustos:** Maple, o Mathematica (Wolfram) e o **MATLAB**.

Utilização de softwares

- Os softwares podem ser ferramentas extremamente úteis para o estudo de equações diferenciais.
- As **apresentações gráficas** são, muitas vezes, mais claras e úteis para compreender e **interpretar a solução** de uma equação diferencial.
- **Pacotes computacionais mais robustos:** Maple, o Mathematica (Wolfram) e o **MATLAB**.
- Para utilizá-los é **essencial compreender como os métodos** de solução funcionam.

Utilização de softwares

- Os softwares podem ser ferramentas extremamente úteis para o estudo de equações diferenciais.
- As **apresentações gráficas** são, muitas vezes, mais claras e úteis para compreender e **interpretar a solução** de uma equação diferencial.
- **Pacotes computacionais mais robustos:** Maple, o Mathematica (Wolfram) e o **MATLAB**.
- Para utilizá-los é **essencial compreender como os métodos** de solução funcionam.
- Delegar os detalhes de rotina a um computador, e **focar mais a atenção à formulação correta do problema** e à interpretação da solução.

Para depois desta aula:

- Estudar seções 1.1 a 1.3 do livro texto (Boyce).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar: exercícios da seções 1.1 a 1.3 do Boyce.

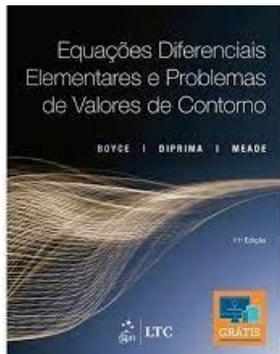
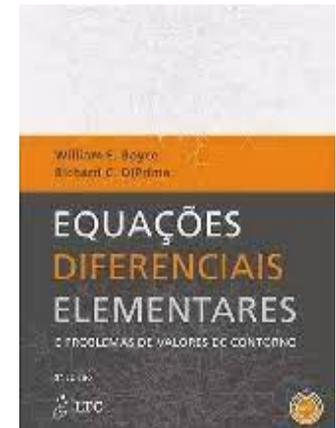
Próxima aula:

- Equações diferenciais de primeira ordem.

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Numeração dos exercícios com base na 9ª ed. ▶



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2020.