

Cálculo diferencial e integral

Sequências e séries infinitas

Aula 08

Série de Fourier

Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Séries de Fourier.
2. Exemplo.

Pré-requisitos

- Integração de funções trigonométricas.



Séries de Fourier

Séries de Fourier

- Séries de Fourier expressam muitas funções como uma **série de senos e cossenos**.



Séries de Fourier



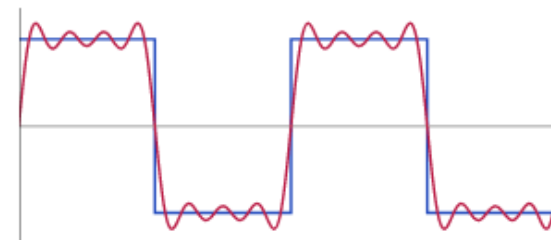
- Séries de Fourier expressam muitas funções como uma **série de senos e cossenos**.
- Algumas propriedades com **periodicidade** e **ortogonalidade** são relevantes para defini-la.

Séries de Fourier



- Séries de Fourier expressam muitas funções como uma **série de senos e cossenos**.
- Algumas propriedades com **periodicidade** e **ortogonalidade** são relevantes para defini-la.
- As séries de Fourier foram criadas em 1807 por Jean Fourier para o **estudo de transferência de calor**.

Séries de Fourier



- Séries de Fourier expressam muitas funções como uma **série de senos e cossenos**.
- Algumas propriedades com **periodicidade** e **ortogonalidade** são relevantes para defini-la.
- As séries de Fourier foram criadas em 1807 por Jean Fourier para o **estudo de transferência de calor**.
- Atualmente, elas são usadas em análise de vibrações, acústica, óptica, processamento de sinais, processamento de imagens e econometria.

1- Periodicidade de funções

- Uma função f é periódica, com período $T > 0$, se $f(x + T) = f(x)$.
- Qualquer múltiplo de T também será o período.

1- Periodicidade de funções

- Uma função f é periódica, com período $T > 0$, se $f(x + T) = f(x)$.
- Qualquer múltiplo de T também será o período.
- Se f e g são funções periódicas de período T , então:
 fg é periódica; $C_1f + C_2g$ também é periódica.

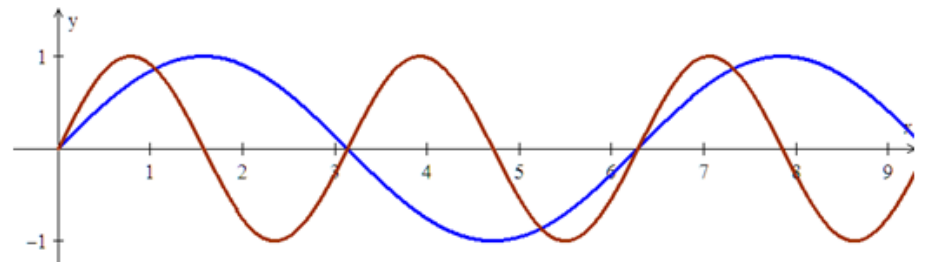
1- Periodicidade de funções

- Uma função f é periódica, com período $T > 0$, se $f(x + T) = f(x)$.
- Qualquer múltiplo de T também será o período.
- Se f e g são funções periódicas de período T , então:
 fg é periódica; $C_1f + C_2g$ também é periódica.

Exemplos

$$f = \text{sen}x$$

$$g = \text{sen}2x$$



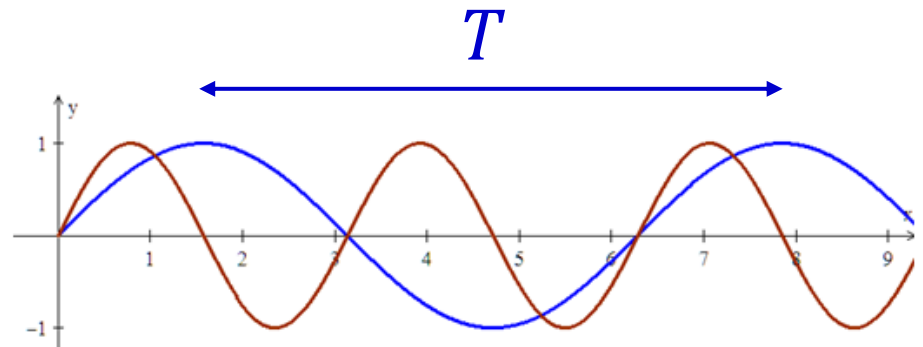
1- Periodicidade de funções

- Uma função f é periódica, com período $T > 0$, se $f(x + T) = f(x)$.
- Qualquer múltiplo de T também será o período.
- Se f e g são funções periódicas de período T , então:
 fg é periódica; $C_1f + C_2g$ também é periódica.

Exemplos

$$f = \text{sen}x \quad T = 2\pi$$

$$g = \text{sen}2x$$



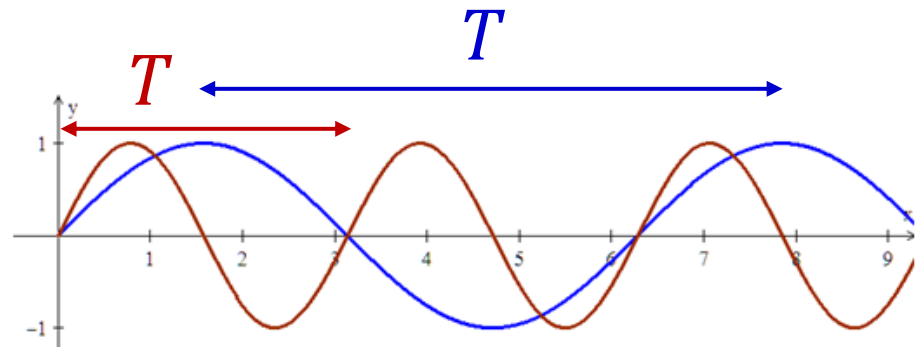
1- Periodicidade de funções

- Uma função f é periódica, com período $T > 0$, se $f(x + T) = f(x)$.
- Qualquer múltiplo de T também será o período.
- Se f e g são funções periódicas de período T , então:
 fg é periódica; $C_1f + C_2g$ também é periódica.

Exemplos

$$f = \text{sen}x \quad T = 2\pi$$

$$g = \text{sen}2x \quad T = \pi$$



2- Ortogonalidade de funções

- Duas funções f e g são ortogonais se o produto interno entre elas $\langle f, g \rangle = 0$.
- O produto escalar da geometria é um caso particular do produto interno de funções.

2- Ortogonalidade de funções

- Duas funções f e g são ortogonais se o produto interno entre elas $\langle f, g \rangle = 0$.
- O produto escalar da geometria é um caso particular do produto interno de funções.
- O **produto interno** de funções é representado por uma integral:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

2- Ortogonalidade de funções

- Duas funções f e g são ortogonais se o produto interno entre elas $\langle f, g \rangle = 0$.
- O produto escalar da geometria é um caso particular do produto interno de funções.
- O **produto interno** de funções é representado por uma integral:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

- Caso o resultado da integral seja nulo, as funções f e g serão ortogonais entre si (seus vetores aproximação são ortogonais).

2- Ortogonalidade de funções

- Propriedades de ortogonalidade do seno e cosseno.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\cos(mx)dx = 0 \quad \forall n, m > 0 \text{ inteiros}$$

2- Ortogonalidade de funções

- Propriedades de ortogonalidade do seno e cosseno.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\cos(mx)dx = 0 \quad \forall n, m > 0 \text{ inteiros}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \pi & \text{se } n = m \end{cases}$$

2- Ortogonalidade de funções

- Propriedades de ortogonalidade do seno e cosseno.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\cos(mx)dx = 0 \quad \forall n, m > 0 \text{ inteiros}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \pi & \text{se } n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\text{sen}(mx)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \pi & \text{se } n = m \end{cases}$$

Séries de Fourier



- A maioria das funções podem ser representadas por uma **série de Fourier** da forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

Séries de Fourier

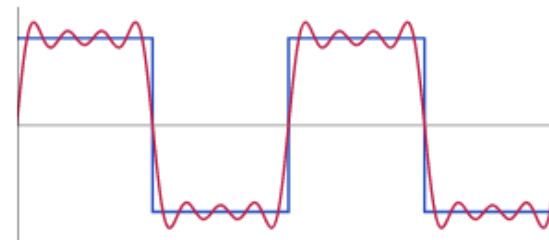


- A maioria das funções podem ser representadas por uma **série de Fourier** da forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

- Esta série converge no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$.

Séries de Fourier



- A maioria das funções podem ser representadas por uma **série de Fourier** da forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

- Esta série converge no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$.
- Como as **funções seno e cosseno são periódicas** a série irá convergir para todo x .

Séries de Fourier



- A maioria das funções podem ser representadas por uma **série de Fourier** da forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

- Esta série converge no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$.
- Como as **funções seno e cosseno são periódicas** a série irá convergir para todo x .
- A propriedade da ortogonalidade permite o cálculo dos coeficientes a_0 , a_n e b_n .

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_0

- ✓ Integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } nx dx)$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_0

- ✓ Integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{\cos nx} dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{\sin nx} dx)$$

= 0 = 0

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_0

- ✓ Integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{\cos nx} dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{\sin nx} dx)$$

= 0 = 0

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_0

- ✓ Integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{\cos nx dx}^{=0} + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{\sin nx dx}^{=0})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx \quad \Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} 2\pi$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_0

- ✓ Integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{\cos nx} dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{\sin nx} dx)$$

= 0 = 0

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx \quad \Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_0

- ✓ Integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{\cos nx} dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{\sin nx} dx)$$

= 0 = 0

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx \quad \Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_n

- ✓ Multiplica-se a série por $\cos mx$ (m inteiro) e integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx \, dx +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx)$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_n

- ✓ Multiplica-se a série por $\cos mx$ (m inteiro) e integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cancel{\cos mx} \, dx +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{\cos mx} \sin nx \, dx)$$

The diagram shows the integration of the Fourier series term-by-term. The first term is $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx \, dx$, where the $\cos mx$ term is crossed out with a red slash and labeled $= 0$. The second term is $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx)$, where the $\cos mx$ term in the second integral is crossed out with a red slash and labeled $= 0$.

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_n

- ✓ Multiplica-se a série por $\cos mx$ (m inteiro) e integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cancel{\cos mx} \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{\cos mx} \sin nx \, dx \right)$$

(Red slashes and "= 0" annotations indicate that the first and third terms are zero.)

- ✓ O inteiro m é fixo, e o inteiro n varia na série.
- ✓ Então, a única integral que não se anula do lado direito é a do duplo cosseno quando $m = n$.

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_n ($m = n$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_n ($m = n$)

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx &= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx \\ &= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2nx \right) dx\end{aligned}$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_n ($m = n$)

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx &= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx \\ &= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2nx \right) dx \\ &= a_n \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx dx \right]\end{aligned}$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_n ($m = n$)

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx &= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx \\ &= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2nx \right) dx \\ &= a_n \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{\cos 2nx dx} \right] = 0\end{aligned}$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_n ($m = n$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx$$

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2nx \right) dx$$

$$= a_n \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{\cos 2nx dx} \right] = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \pi a_n$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_n ($m = n$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx$$

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2nx \right) dx$$

$$= a_n \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{\cos 2nx} dx \right] \quad \begin{matrix} = 0 \\ \text{red slash} \end{matrix}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \pi a_n$$

\Rightarrow

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_n ($m = n$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx$$

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2nx \right) dx$$

$$= a_n \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{\cos 2nx} dx \right] = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \pi a_n \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

✓ O b_n é obtido multiplicando-se a série por $\sin mx$.

Série de Fourier de uma função

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx$$

Série de Fourier de uma função

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx$$

➤ Para um intervalo mais geral L .

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$



Exemplo

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$$

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes a_0 e a_n .

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes a_0 e a_n .

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes a_0 e a_n .

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} \Rightarrow a_0 = 0$$

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes a_0 e a_n .

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} \Rightarrow a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes a_0 e a_n .

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} \Rightarrow a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes a_0 e a_n .

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} \Rightarrow a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx$$

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes a_0 e a_n .

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} \Rightarrow a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \operatorname{sen} nx \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx dx$$

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes a_0 e a_n .

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} \Rightarrow a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \overset{=0}{\cancel{\text{sen } nx}} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } nx dx$$

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes a_0 e a_n .

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} \Rightarrow a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \overset{=0}{\cancel{\text{sen } nx}} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } nx dx$$

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi}$$

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes a_0 e a_n .

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} \Rightarrow a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \overset{=0}{\cancel{\text{sen } nx}} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } nx dx$$

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \overset{=0}{\cancel{\cos nx}} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes a_0 e a_n .

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} \Rightarrow a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \cancel{\text{sen } nx} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } nx dx$$

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \cancel{\cos nx} \right]_{-\pi}^{\pi} \Rightarrow a_n = 0$$

Exemplo 2: $f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$

✓ Cálculo dos coeficientes b_n .

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

Exemplo 2: $f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$

✓ Cálculo dos coeficientes b_n .

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

Exemplo 2: $f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$

✓ Cálculo dos coeficientes b_n .

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx dx$$

Exemplo 2: $f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$

✓ Cálculo dos coeficientes b_n .

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx dx \quad \Rightarrow \quad b_n = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -\cos nx dx$$

Exemplo 2: $f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$

✓ Cálculo dos coeficientes b_n .

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx dx \quad \Rightarrow \quad b_n = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -\cos nx dx = 0$$

Exemplo 2: $f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$

✓ Cálculo dos coeficientes b_n .

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx dx \Rightarrow b_n = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -\cos nx dx = 0$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi} [\pi \cos n\pi - (-\pi) \cos n(-\pi)]$$

Exemplo 2: $f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$

✓ Cálculo dos coeficientes b_n .

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx dx \quad \Rightarrow \quad b_n = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -\cancel{\cos nx} dx = 0$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi} [\pi \cos n\pi - (-\pi) \cos n(-\pi)] = -\frac{\pi}{n\pi} 2 \cos n\pi$$

Exemplo 2: $f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$

✓ Cálculo dos coeficientes b_n .

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx dx \quad \Rightarrow \quad b_n = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -\cos nx dx = 0$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi} [\pi \cos n\pi - (-\pi) \cos n(-\pi)] = -\frac{\pi}{n\pi} 2 \cos n\pi \quad b_n = -\frac{2}{n} (-1)^n$$

Exemplo 2: $f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$

✓ Cálculo dos coeficientes b_n .

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx dx \quad \Rightarrow \quad b_n = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -\cos nx dx = 0$$

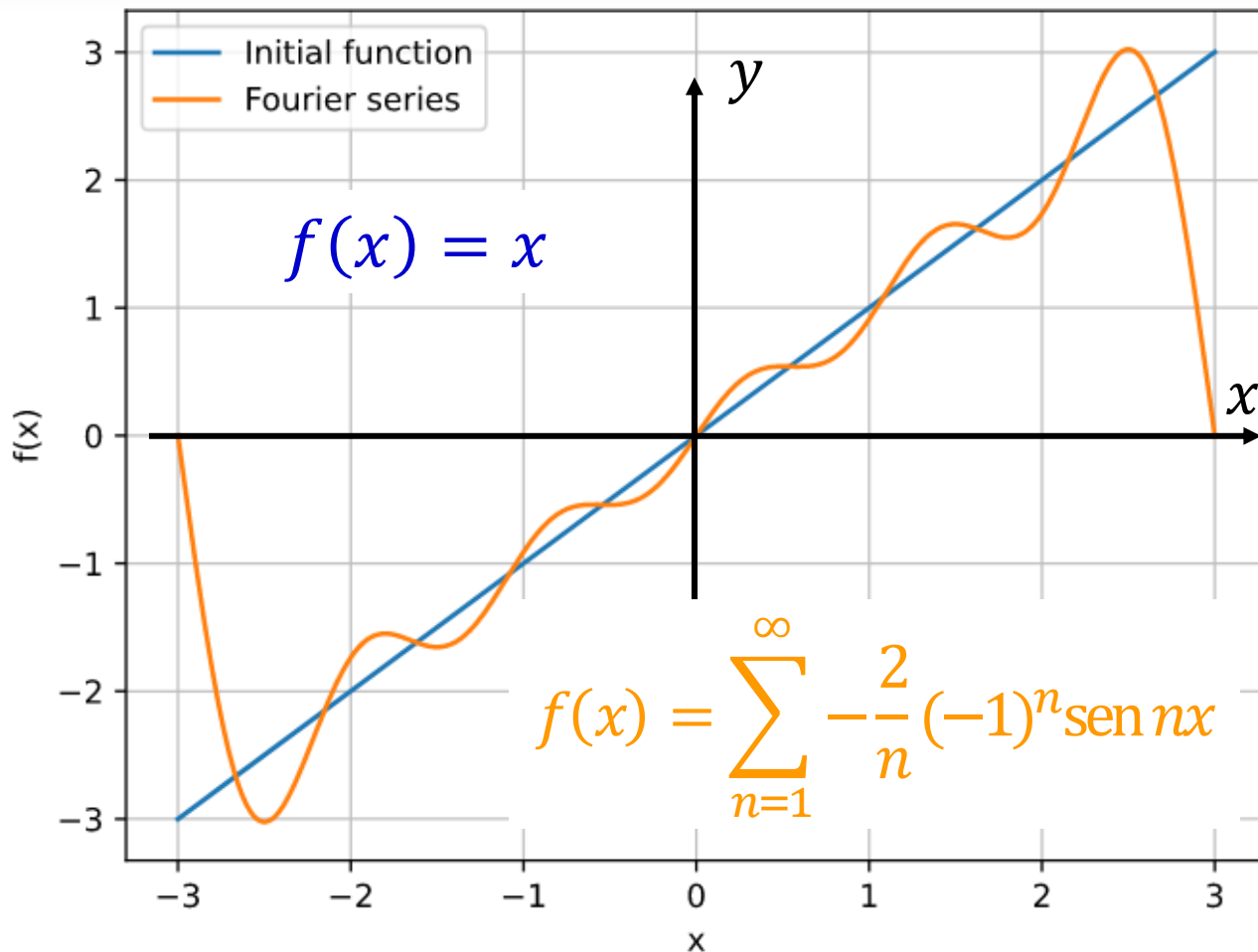
$$b_n = -\frac{1}{n\pi} [\pi \cos n\pi - (-\pi) \cos n(-\pi)] = -\frac{\pi}{n\pi} 2 \cos n\pi \quad b_n = -\frac{2}{n} (-1)^n$$

✓ Série de Fourier de $f(x) = x$.

$$f(x) = x \cong \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n} (-1)^n \operatorname{sen} nx$$

Exemplo 2: $f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$

- ✓ Gráfico da série de Fourier de $f(x) = x$ com 5 termos.



Para depois desta aula:

- Estudar seções 10.1 e 10.2 do livro Boyce e DiPrima (referência no último slide).
- Resolver os exemplos.
- Praticar: exercícios da seções 10.1 e 10.2.

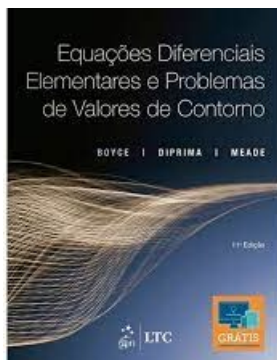
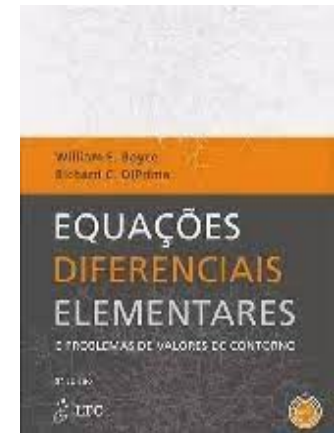
Próxima aula:

- Transformada de Fourier.

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Numeração dos exercícios
com base na 9ª ed. ▶



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2020.