Traçar gráficos

Os conceitos sobre funções e derivadas permitem estudar o comportamento de um modelo, mesmo que não se disponha de ferramentas computacionais. Utilizando-se desses conceitos é possível traçar, a mão, um gráfico preciso de uma função mais elaborada. A metodologia para traçar um gráfico pode ser resumida em oito passos como descritos a seguir.

Metodologia para traçar gráficos

A- Domínio: Determinar $\mathrm{D} \in \mathbb{R}$ (atenção para funções racionais e raízes);

B- Interceptos: Pontos em que a curva corta o $eixo\ y$ ($\boldsymbol{x}$=$\mathbf{0}$) e o $eixo\ x$ ($\boldsymbol{y}$=$\mathbf{0}$)

C- Simetria

Se $f(-x) = f(x) \quad \forall \ x \in D$: $\quad f$ é par e simétrica pelo eixo y;
Se $f(-x) = -f(x) \quad \forall \ x \in D$: $\quad f$ é ímpar e simétrica pela origem;
Se $f(x+p) = f(x) \quad \forall \ x \in D \ \ e \ \ p>0$: $\quad f$ é periódica de período p.

D- Assíntotas

(i) Horizontais

Se: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ então: $\mathrm{y} = L$ é uma assíntota horizontal

(ii) Verticais

A reta $x = a$ é uma assíntota vertical se pelo menos uma das afirmativas for verdadeira:

$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$
$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

E- Intervalos de crescimento e decrescimento: Encontrar onde $\boldsymbol{f}' < \mathbf{0}$ ou $\boldsymbol{f}' > \mathbf{0}$.

F- Valores de máximo e mínimo locais: Encontrar pontos críticos ($\boldsymbol{x_c}$):

$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x_c}) = \mathbf{0}$ (teste da primeira derivada)

$$\begin{cases} f'(\boldsymbol{x_c}) > \mathbf{0} \ \ \forall \ \ \boldsymbol{x} < \boldsymbol{x_c} \\ f'(\boldsymbol{x_c}) < \mathbf{0} \ \ \forall \ \ \boldsymbol{x} > \boldsymbol{x_c} \end{cases} \text{pto. de máximo}$$

$$\begin{cases} f'(\boldsymbol{x_c}) < \mathbf{0} \ \ \forall \ \ \boldsymbol{x} < \boldsymbol{x_c} \\ f'(\boldsymbol{x_c}) > \mathbf{0} \ \ \forall \ \ \boldsymbol{x} > \boldsymbol{x_c} \end{cases} \text{pto. de mínimo}$$

$\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x_c}) \neq \mathbf{0}$ (teste da segunda derivada)

$$\begin{cases} f''(\boldsymbol{x_c}) > \mathbf{0} \quad \textbf{mínimo local} \\ f''(\boldsymbol{x_c}) < \mathbf{0} \quad \textbf{máximo local} \end{cases}$$

G- Concavidade e ponto de inflexão

Calcular $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x})$
$$\begin{cases} f''(\boldsymbol{x}) > \mathbf{0} \quad \textbf{côncava p/ } \boldsymbol{cima} \\ f''(\boldsymbol{x}) < \mathbf{0} \quad \textbf{côncava p/ baixo} \end{cases}$$

O ponto de inflexão ocorre quando a derivada segunda muda de sinal em $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (raíz de $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x})$).

H- Esboço do gráfico: Com os dados dos itens A até G traçar o gráfico da função.