Cálculo diferencial e integral

Sequências e séries infinitas

Aula 01
Sequências

Henrique Antonio Mendonça Faria
Henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Introdução sobre sequências.
2. Identificação de padrões.
3. Limites e convergência.
4. Sequências monótonas.

Pré-requisitos

Cálculo I: Estudo de funções reais e limites.

Introdução

Introdução

- Sequências e séries surgem da ideia da representação de funções como soma de termos.

- Muitas funções utilizadas na Física-Matemática e Química são definidas como somas de séries.
  - Exemplos: Taylor, Bessel, Fourie e outras.

- Sequências numéricas fornecem os conceitos fundamentais para a definição de séries.

Identificação de padrões

Definições de sequências numéricas

Sequência: lista de números em ordem definida.

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_n, \ldots$$

- O número a_n é chamado termo da sequência.

Definições de sequências numéricas

Sequência: lista de números em ordem definida.

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

- O número a_n é chamado termo da sequência.
- Outras notações para sequência:

$$\{a_n\} \qquad \text{ou} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

- Algumas sequências numéricas são definidas por uma fórmula para o n-ésimo termo.

Exemplo 1

(a) $\left\{ \dfrac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ $\qquad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad \left\{ \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots \right\}$

Exemplo 1

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\quad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

(c) $\left\{\sqrt{n-3}\,\right\}_{n=3}^{\infty}$ $\quad a_n = \sqrt{n-3},\ n \geqslant 3$ $\left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\right\}$

Exemplo 1

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\qquad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

(c) $\left\{\sqrt{n-3}\,\right\}_{n=3}^{\infty}$ $\qquad a_n = \sqrt{n-3},\ n \geqslant 3$ $\left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\right\}$

Exemplo 2

Encontre uma fórmula para o termo geral a_n da sequência:

$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3.125}, \ldots\right\}$$

Exemplo 1

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\qquad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

(c) $\left\{\sqrt{n-3}\,\right\}_{n=3}^{\infty}$ $\qquad a_n = \sqrt{n-3},\ n \geqslant 3$ $\left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\right\}$

Exemplo 2

Encontre uma fórmula para o termo geral a_n da sequência:

$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3.125}, \ldots\right\} \quad a_1 = \frac{3}{5},\ a_2 = -\frac{4}{25},\ a_3 = \frac{5}{125} \ldots$$

Exemplo 1

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\quad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

(c) $\left\{\sqrt{n-3}\right\}_{n=3}^{\infty}$ $\quad a_n = \sqrt{n-3},\ n \geqslant 3$ $\left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\right\}$

Exemplo 2 Encontre uma fórmula para o termo geral a_n da sequência:

$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3.125}, \ldots\right\} \quad a_1 = \frac{3}{5},\ a_2 = -\frac{4}{25},\ a_3 = \frac{5}{125} \ldots$$

numerador $n+2$

$$a_n = \frac{n+2}{}$$

Exemplo 1

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\quad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

(c) $\left\{\sqrt{n-3}\right\}_{n=3}^{\infty}$ $\quad a_n = \sqrt{n-3},\ n \geqslant 3$ $\left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\right\}$

Exemplo 2

Encontre uma fórmula para o termo geral a_n da sequência:

$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3.125}, \ldots\right\} \quad a_1 = \frac{3}{5},\ a_2 = -\frac{4}{25},\ a_3 = \frac{5}{125} \cdots$$

numerador $n+2$

denominador 5^n

$$a_n = \frac{n+2}{5^n}$$

Exemplo 1

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\quad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

(c) $\left\{\sqrt{n-3}\right\}_{n=3}^{\infty}$ $\quad a_n = \sqrt{n-3},\ n \geqslant 3$ $\left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\right\}$

Exemplo 2

Encontre uma fórmula para o termo geral a_n da sequência:

$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3.125}, \ldots\right\} \quad a_1 = \frac{3}{5},\ a_2 = -\frac{4}{25},\ a_3 = \frac{5}{125} \ldots$$

numerador $n+2$

denominador 5^n

sinais dos termos alternam

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n+2}{5^n}$$

Exemplo 3 - Sequência de Fibonacci $\{f_n\}$

Essa sequência $\{f_n\}$ é definida recursivamente pelas condições:

$$f_1 = 1 \qquad f_2 = 1 \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 3$$

Cada termo é a soma dos dois termos precedentes. Os primeiros termos são:

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$$

Exemplo 3 - Sequência de Fibonacci $\{f_n\}$

Essa sequência $\{f_n\}$ é definida recursivamente pelas condições:

$$f_1 = 1 \qquad f_2 = 1 \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 3$$

Cada termo é a soma dos dois termos precedentes. Os primeiros termos são:

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$$

Essa sequência surgiu quando o matemático italiano Fibonacci (Leonardo de Pisa – 1170 a 1250) exemplificou, no Libre Abaci (1202), um problema hipotético envolvendo a reprodução de coelhos.

Exemplo 4 – O problema de Fibonacci

Supondo que coelhos vivam para sempre e que a cada mês cada par produza um novo par, que se torna reprodutivo com 2 meses de idade. Se começarmos com um par recém-nascido, quantos pares de coelhos teremos no n-ésimo mês?

Exemplo 4 – O problema de Fibonacci

Supondo que coelhos vivam para sempre e que a cada mês cada par produza um novo par, que se torna reprodutivo com 2 meses de idade. Se começarmos com um par recém-nascido, quantos pares de coelhos teremos no n-ésimo mês?

Mês	Par 5	Par 7	Par 2	Par 6	Par 1	Par 4	Par 3	Par 8	f_n
1					OO				$f_1 = 1$

Exemplo 4 – O problema de Fibonacci

Supondo que coelhos vivam para sempre e que a cada mês cada par produza um novo par, que se torna reprodutivo com 2 meses de idade. Se começarmos com um par recém-nascido, quantos pares de coelhos teremos no n-ésimo mês?

Mês	Par 5	Par 7	Par 2	Par 6	Par 1	Par 4	Par 3	Par 8	f_n
1					oo				$f_1 = 1$
2					**OO**				$f_2 = 1$

Exemplo 4 – O problema de Fibonacci

Supondo que coelhos vivam para sempre e que a cada mês cada par produza um novo par, que se torna reprodutivo com 2 meses de idade. Se começarmos com um par recém-nascido, quantos pares de coelhos teremos no n-ésimo mês?

Mês	Par 5	Par 7	Par 2	Par 6	Par 1	Par 4	Par 3	Par 8	f_n
1					OO				$f_1 = 1$
2					**OO**				$f_2 = 1$
3			OO		**OO**				$f_3 = 2$

Exemplo 4 – O problema de Fibonacci

Supondo que coelhos vivam para sempre e que a cada mês cada par produza um novo par, que se torna reprodutivo com 2 meses de idade. Se começarmos com um par recém-nascido, quantos pares de coelhos teremos no n-ésimo mês?

Mês	Par 5	Par 7	Par 2	Par 6	Par 1	Par 4	Par 3	Par 8	f_n
1					OO				$f_1 = 1$
2					**OO**				$f_2 = 1$
3			OO		**OO**				$f_3 = 2$
4			**OO**		**OO**		OO		$f_4 = 3$

Exemplo 4 – O problema de Fibonacci

Supondo que coelhos vivam para sempre e que a cada mês cada par produza um novo par, que se torna reprodutivo com 2 meses de idade. Se começarmos com um par recém-nascido, quantos pares de coelhos teremos no n-ésimo mês?

Mês	Par 5	Par 7	Par 2	Par 6	Par 1	Par 4	Par 3	Par 8	f_n
1					OO				$f_1 = 1$
2					**OO**				$f_2 = 1$
3			OO		**OO**				$f_3 = 2$
4			**OO**		**OO**		OO		$f_4 = 3$
5	OO		**OO**		**OO**	OO	**OO**		$f_5 = 5$

Exemplo 4 – O problema de Fibonacci

Supondo que coelhos vivam para sempre e que a cada mês cada par produza um novo par, que se torna reprodutivo com 2 meses de idade. Se começarmos com um par recém-nascido, quantos pares de coelhos teremos no n-ésimo mês?

Mês	Par 5	Par 7	Par 2	Par 6	Par 1	Par 4	Par 3	Par 8	f_n
1					OO				$f_1 = 1$
2					**OO**				$f_2 = 1$
3			OO		**OO**				$f_3 = 2$
4			**OO**		**OO**		OO		$f_4 = 3$
5	OO		**OO**		**OO**	OO	**OO**		$f_5 = 5$
6	**OO**	OO	**OO**	OO	**OO**	**OO**	**OO**	OO	$f_6 = 8$

Limites e convergência

Representação de sequências

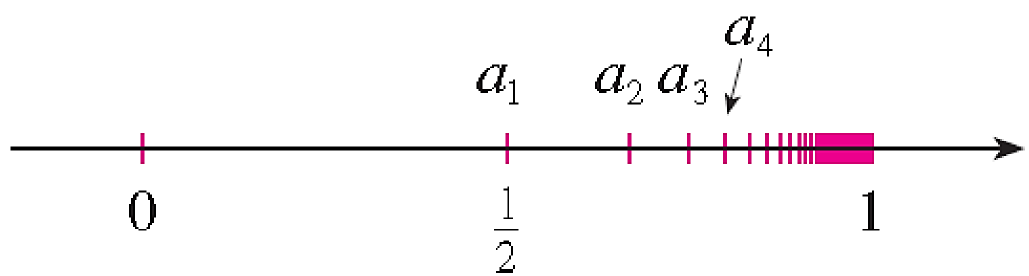
(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\qquad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

Fonte das figuras: Stewart, J. 2013.

Representação de sequências

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_n = \dfrac{n}{n+1} \quad$ $\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

- Representação na reta real.

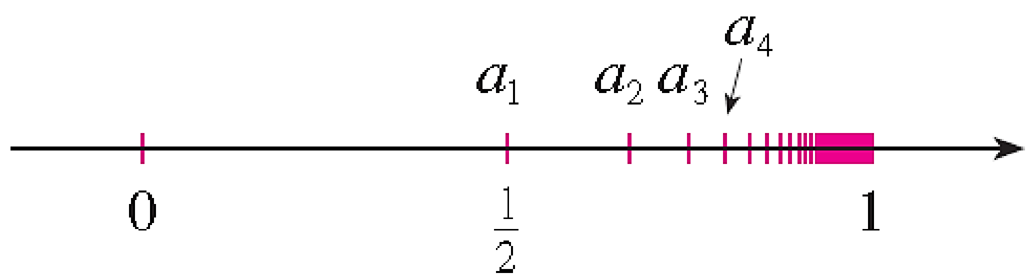


Fonte das figuras: Stewart, J. 2013.

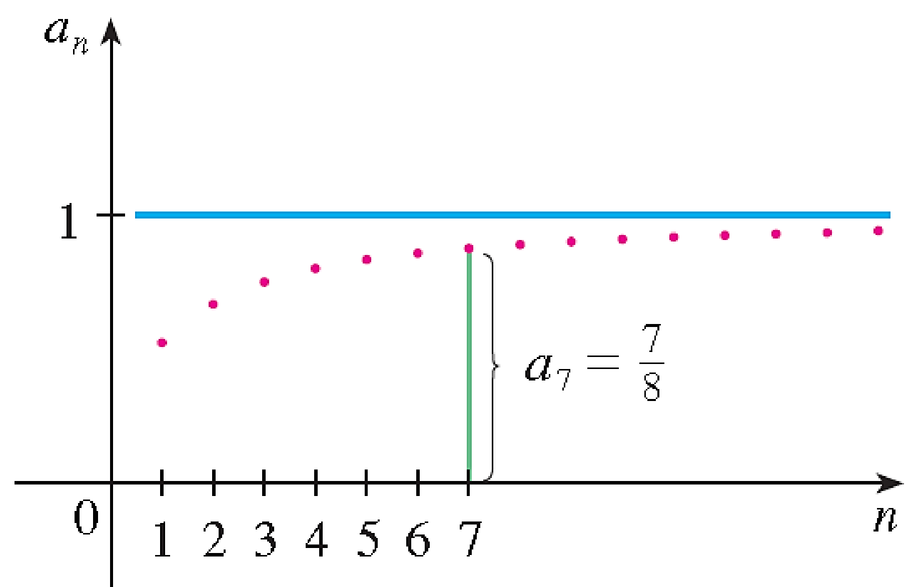
Representação de sequências

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\quad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

➢ Representação na reta real.



➢ Representação no plano cartesiano.



Fonte das figuras: Stewart, J. 2013.

Limite de sequências

Definição Uma sequência $\{a_n\}$ tem **limite** $\boldsymbol{L}$ e escrevemos

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \qquad \text{ou} \qquad a_n \to L \text{ quando } n \to \infty$$

se, para cada $\varepsilon > 0$ existir um inteiro correspondente N tal que

$$\text{se} \qquad n > N \qquad \text{então} \qquad |a_n - L| < \varepsilon$$

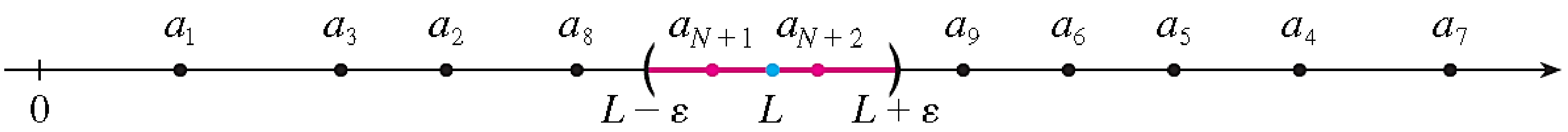
Limite de sequências

Definição Uma sequência $\{a_n\}$ tem **limite** $\boldsymbol{L}$ e escrevemos

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \qquad \text{ou} \qquad a_n \to L \text{ quando } n \to \infty$$

se, para cada $\varepsilon > 0$ existir um inteiro correspondente N tal que

$$\text{se} \qquad n > N \qquad \text{então} \qquad |a_n - L| < \varepsilon$$



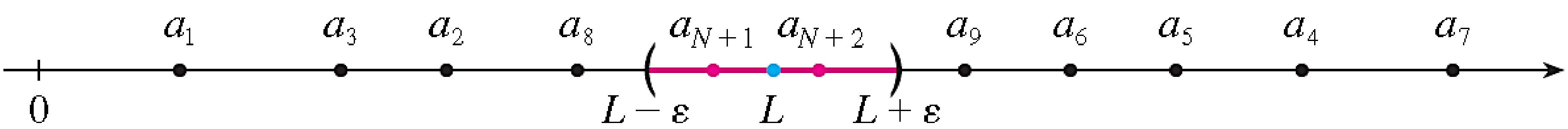
Limite de sequências

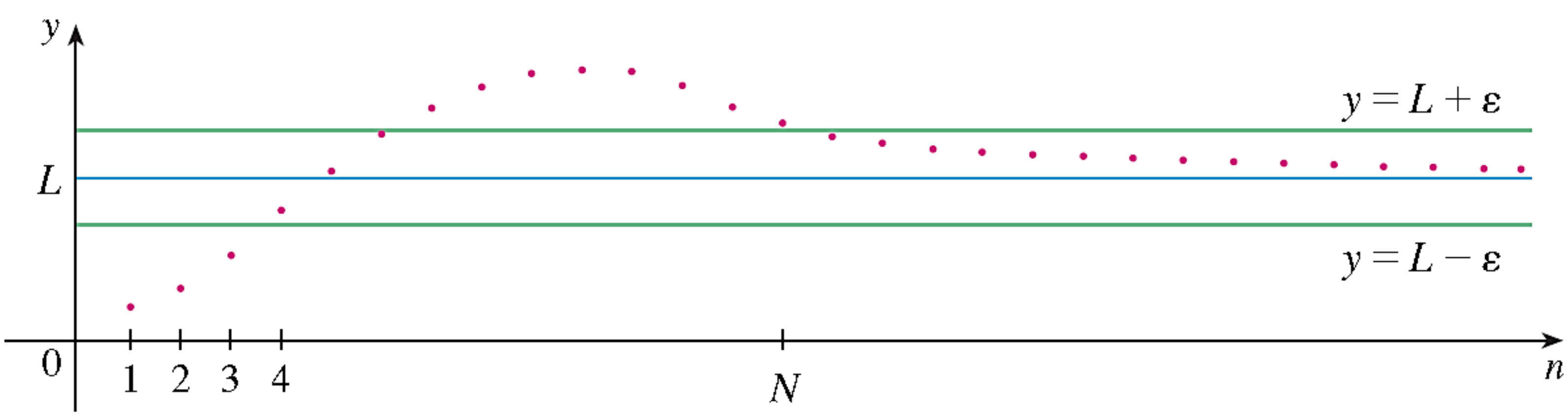
Definição Uma sequência $\{a_n\}$ tem **limite L** e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{ou} \qquad a_n \to L \text{ quando } n \to \infty$$

se, para cada $\varepsilon > 0$ existir um inteiro correspondente N tal que

$$\text{se} \qquad n > N \qquad \text{então} \qquad |a_n - L| < \varepsilon$$





Limite de sequências

Definição $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ significa que para cada número positivo M existe um inteiro N tal que

$$\text{se} \qquad n > N \qquad \text{então} \qquad a_n > M$$

Limite de sequências

Definição $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ significa que para cada número positivo M existe um inteiro N tal que

$$\text{se} \qquad n > N \qquad \text{então} \qquad a_n > M$$

- Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, então a sequência $\{a_n\}$ é divergente, Dizemos que $\{a_n\}$ diverge para ∞.

- As Propriedades do Limite também valem para os limites de sequências

Limite de sequências

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem sequências convergentes e c for uma constante, então

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \pm \lim_{n \to \infty} b_n$$

$$\lim_{n \to \infty} c a_n = c \lim_{n \to \infty} a_n \qquad \lim_{n \to \infty} c = c$$

Limite de sequências

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem sequências convergentes e c for uma constante, então

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \lim_{n\to\infty} c = c$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \quad \text{se } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \text{ se } p > 0 \text{ e } a_n > 0$$

Exemplo 5

Encontre $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1}$

Exemplo 5

Encontre $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1}$

Utiliza-se método semelhante ao cálculo de limites de funções:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

Exemplo 5

Encontre $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1}$

Utiliza-se método semelhante ao cálculo de limites de funções:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{\lim_{n \to \infty} 1}{\lim_{n \to \infty} 1 + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1$$

Exemplo 6 Calcule $\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n}$

Exemplo 6 Calcule $\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n}$

- Numerador e denominador se aproximam do infinito quando $n \to \infty$.
- A regra de L'Hôspital não pode ser usada diretamente.

Exemplo 6 Calcule $\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n}$

- Numerador e denominador se aproximam do infinito quando $n \to \infty$.
- A regra de L'Hôspital não pode ser usada diretamente.
- Pode-se usar a regra na função relacionada utilizando-se o seguinte teorema:

> Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ e $f(n) = a_n$ quando n é um inteiro, então $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Exemplo 6 Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$

- Numerador e denominador se aproximam do infinito quando $n \to \infty$.
- A regra de L'Hôspital não pode ser usada diretamente.
- Pode-se usar a regra na função relacionada utilizando-se o seguinte teorema:

> Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ e $f(n) = a_n$ quando n é um inteiro, então $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

Exemplo 7 Para que valores de r a sequência $\{r^n\}$ é convergente?

- Sabemos dos gráficos das funções exponenciais que:

Exemplo 7 Para que valores de r a sequência $\{r^n\}$ é convergente?

- Sabemos dos gráficos das funções exponenciais que:

$\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$ para $a > 1$ e

$\lim_{x \to \infty} a^x = 0$ para $0 < a < 1$. Logo,

Exemplo 7 Para que valores de r a sequência $\{r^n\}$ é convergente?

- Sabemos dos gráficos das funções exponenciais que:

$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ para $a > 1$ e

$\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ para $0 < a < 1$. Logo,

com $a = r$ e usando o Teorema, temos

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{se } r > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < r < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1 \text{ e}$$

$$\lim_{n\to\infty} 0^n = 0$$

Exemplo 7 Para que valores de r a sequência $\{r^n\}$ é convergente?

➢ Sabemos dos gráficos das funções exponenciais que:

$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ para $a > 1$ e

$\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ para $0 < a < 1$. Logo,

com $a = r$ e usando o Teorema, temos

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{se } r > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < r < 1 \end{cases}$$

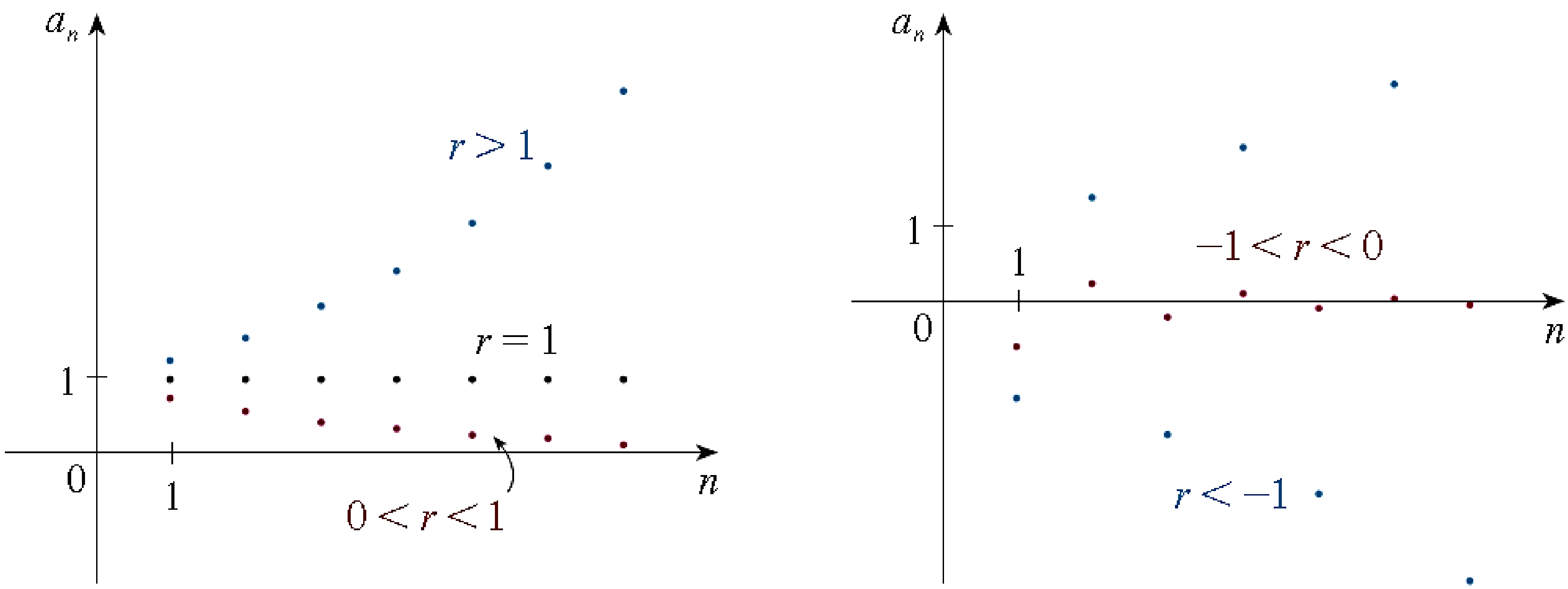
$$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1 \text{ e}$$

$$\lim_{n\to\infty} 0^n = 0$$

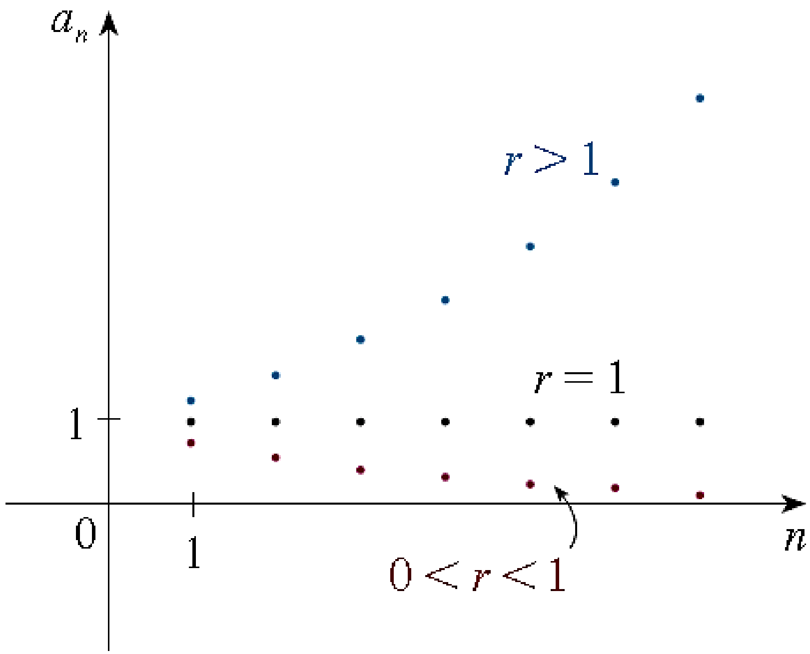
Se $-1 < r < 0$ então $0 < |r| < 1$ então

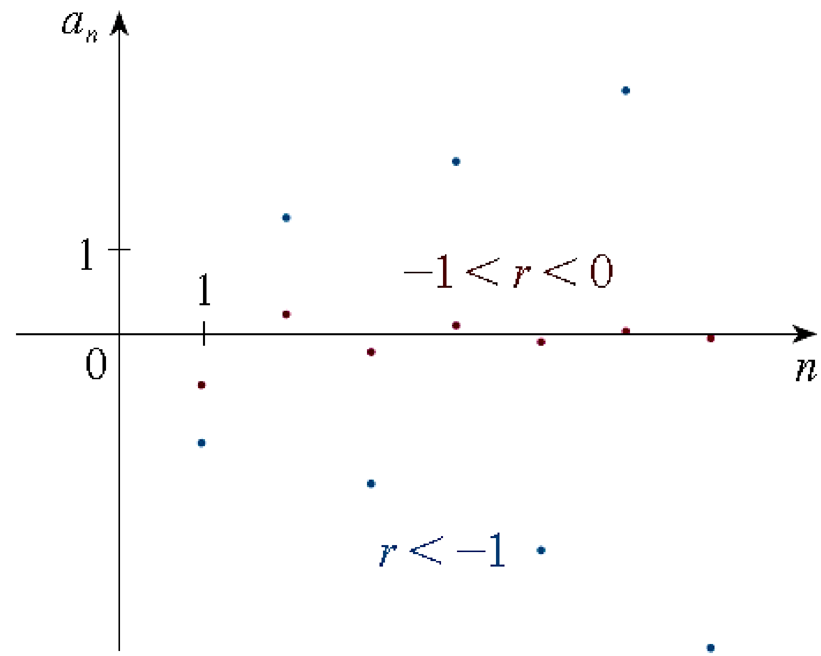
$$\lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$$

Exemplo 7 Gráficos da sequência $a_n = r^n$



Exemplo 7 Gráficos da sequência $a_n = r^n$





A sequência $\{r^n\}$ é convergente se $-1 < r \leqslant 1$ e divergente para todos os outros valores de r.

$$\lim_{n \to \infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{se } r = 1 \end{cases}$$

Sequências monótonas

Sequências monótonas

Definição

Uma sequência $\{a_n\}$ é chamada **crescente** se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$,

isso é, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$.

É chamado **decrescente** se $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$.

Uma sequência é **monótona** se for crescente ou decrescente.

Sequências monótonas

Definição

Uma sequência $\{a_n\}$ é chamada **crescente** se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$, isso é, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$.

É chamado **decrescente** se $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$.

Uma sequência é **monótona** se for crescente ou decrescente.

Exemplo 8

A sequência $\left\{\dfrac{3}{n+5}\right\}$ é decrescente porque

$$\frac{3}{n+5} > \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6}$$

e, portanto, $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$.

Sequências monótonas

Definição

Uma sequência $\{a_n\}$ é **limitada superiormente** se existir um número M tal que $a_n \leqslant M$ para todo $n \geqslant 1$

Ela é **limitada inferiormente** se existir um número m tal que $m \leqslant a_n$ para todo $n \geqslant 1$

Se ela for limitada superior e inferiormente, então $\{a_n\}$ é uma **sequência limitada**.

Sequências monótonas

Teorema da Sequência Monótona

Toda sequência monótona limitada é convergente.

Sequências monótonas

Teorema da Sequência Monótona

Toda sequência monótona limitada é convergente.

- Nem sempre é possível determinar se uma sequência é monótona pelos primeiros termos.

Sequências monótonas

Teorema da Sequência Monótona

Toda sequência monótona limitada é convergente.

- Nem sempre é possível determinar se uma sequência é monótona pelos primeiros termos.
- Uma maneira de verificar a monoticidade consiste da razão de termos sucessivos.

RAZÃO DE TERMOS SUCESSIVOS	CONCLUSÃO
$a_{n+1}/a_n > 1$	Estritamente crescente
$a_{n+1}/a_n < 1$	Estritamente decrescente
$a_{n+1}/a_n \geq 1$	Crescente
$a_{n+1}/a_n \leq 1$	Decrescente

Exemplo 9

Mostrar que a sequência é estritamente crescente.

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

Exemplo 9

Mostrar que a sequência é estritamente crescente.

$$a_n = \frac{n}{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)/(n+2)}{n/(n+1)}$$

Exemplo 9

Mostrar que a sequência é estritamente crescente.

$$a_n = \frac{n}{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)/(n+2)}{n/(n+1)}$$

$$= \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$$

Exemplo 9

Mostrar que a sequência é estritamente crescente.

$$a_n = \frac{n}{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)/(n+2)}{n/(n+1)}$$

$$= \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$$

vemos que $a_{n+1}/a_n > 1$ se $n \geq 1$.

Isso prova que a sequência é estritamente crescente.

Exemplo 9

Mostrar que a sequência é estritamente crescente.

$$a_n = \frac{n}{n+1} \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)/(n+2)}{n/(n+1)}$$

$$= \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$$

Do ex. 5:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Também é convergente!

vemos que $a_{n+1}/a_n > 1$ se $n \geq 1$.

Isso prova que a sequência é estritamente crescente.

Para depois desta aula:

- Estudar seção 11.1 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar: exercícios Seção 11.1 do Stewart.

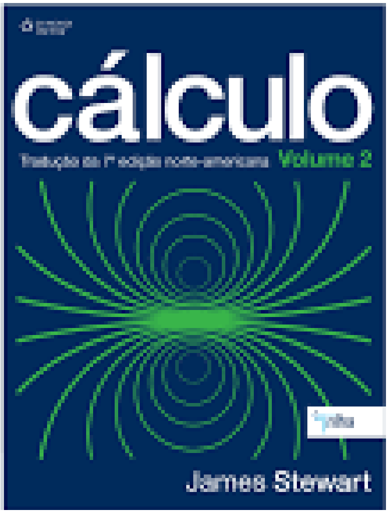
Próxima aula:

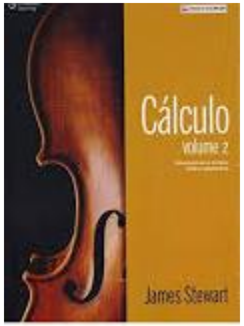
- Sequências conhecidas e aplicações.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed.





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.