Equações diferenciais

Equações diferenciais ordinárias

Aula 02

Equações diferenciais de 1ª ordem

Henrique Antonio Mendonça Faria

Henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Introdução às equações diferenciais de 1ª ordem.
2. Método do fator integrante.
3. Método das equações separáveis.

Pré-requisitos

- Diferenciação e Integração de funções de uma variável.

Introdução

Introdução

- Uma equação diferencial (eq. dif.) de primeira ordem tem a forma geral:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

- O objetivo é determinar uma função diferenciável $y = \phi(t)$ que satisfaça a equação.

Introdução

- Uma equação diferencial (eq. dif.) de primeira ordem tem a forma geral:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

- O objetivo é determinar uma função diferenciável $y = \phi(t)$ que satisfaça a equação.
- Caso essa função solução exista, serão desenvolvidos métodos para encontrá-la.
- Não existe método geral, mas métodos que se aplicam a alguma subclasse das eq. dif. de 1ª ordem.

Método do fator integrante

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Algumas equações diferenciais lineares de 1ª ordem podem ser escritas na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Em que p e g são funções dadas da variável independente t.

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Algumas equações diferenciais lineares de 1ª ordem podem ser escritas na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Em que p e g são funções dadas da variável independente t.
- O método direto de integração não pode ser aplicado diretamente nessa equação.

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Algumas equações diferenciais lineares de 1ª ordem podem ser escritas na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Em que p e g são funções dadas da variável independente t.

- O método direto de integração não pode ser aplicado diretamente nessa equação.

- A alternativa é encontrar um fator multiplicativo que torna possível a integração.

Método do fator integrante (eq. lineares)

- O método do fator integrante é devido a Leibniz.
- Consiste em multiplicar cada termo da eq. dif. por uma função $\boldsymbol{\mu(t)}$.

Método do fator integrante (eq. lineares)

- O método do fator integrante é devido a Leibniz.
- Consiste em multiplicar cada termo da eq. dif. por uma função $\boldsymbol{\mu(t)}$.
- Essa multiplicação torna a eq. dif. integrável.
- A função $\boldsymbol{\mu(t)}$ é chamada de **fator integrante**.

Método do fator integrante (eq. lineares)

- O método do fator integrante é devido a Leibniz.
- Consiste em multiplicar cada termo da eq. dif. por uma função $\boldsymbol{\mu(t)}$.
- Essa multiplicação torna a eq. dif. integrável.
- A função $\boldsymbol{\mu(t)}$ é chamada de **fator integrante**.
- Após a aplicação desse fator multiplicativo a eq. dif. é resolvida por integração, em semelhança ao método aplicado no modelo do corpo em queda.

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Seja a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Seja a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Multiplica-se cada termo pelo fator $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t)$$

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Seja a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Multiplica-se cada termo pelo fator $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t)$$

- O lado esquerdo da eq. dif. é a derivada do produto $\boldsymbol{\mu(t)y}$, então a derivada de $\boldsymbol{\mu(t)}$ deve ser:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t)$$

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Seja a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Multiplica-se cada termo pelo fator $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t)$$

- O lado esquerdo da eq. dif. é a derivada do produto $\boldsymbol{\mu(t)y}$, então a derivada de $\boldsymbol{\mu(t)}$ deve ser:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu(t)}\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)$$

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Seja a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Multiplica-se cada termo pelo fator $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t)$$

- O lado esquerdo da eq. dif. é a derivada do produto $\boldsymbol{\mu(t)y}$, então a derivada de $\boldsymbol{\mu(t)}$ deve ser:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu(t)}\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)$$

$$ln|\mu(t)| = \int p(t)dt + k$$

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Seja a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Multiplica-se cada termo pelo fator $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t)$$

- O lado esquerdo da eq. dif. é a derivada do produto $\boldsymbol{\mu(t)y}$, então a derivada de $\boldsymbol{\mu(t)}$ deve ser:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu(t)}\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)$$

$$ln|\mu(t)| = \int p(t)dt + k \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu(t) = exp\int p(t)dt}$$

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Então, a eq. dif. original pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)g(t)$$

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Então, a eq. dif. original pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)g(t)$$

- Integrando em dt em ambos os lados:

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t) + c$$

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Então, a eq. dif. original pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)g(t)$$

- Integrando em dt em ambos os lados:

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t) + c$$

- Portanto, a expressão para o cálculo de y será:

$$y = \frac{1}{\mu(t)}\int \mu(t)g(t)dt + c$$

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Então, a eq. dif. original pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)g(t)$$

- Integrando em dt em ambos os lados:

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t) + c$$

- Portanto, a expressão para o cálculo de y será:

$$y = \frac{1}{\mu(t)}\int \mu(t)g(t)dt + c$$

$$\mu(t) = exp\int p(t)dt$$

Exemplo 1 Resolver o P.V.I. (problema de valor inicial) pelo método do fator integrante.

$$ty' + 2y = 4t^2 \qquad y(1) = 2 \quad \textit{(condição inicial)}$$

Solução ex. 1

- ✓ Escrever a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t \quad \Rightarrow \quad p(t) = \frac{2}{t}$$

Solução ex. 1

- ✓ Escrever a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t \quad \Rightarrow \quad p(t) = \frac{2}{t}$$

- ✓ Calcular o fator integrante $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t) = exp\int \frac{2}{t}dt = e^{2ln|t|} = e^{lnt^2} = t^2$$

Solução ex. 1

- ✓ Escrever a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t \quad \Rightarrow \quad p(t) = \frac{2}{t}$$

- ✓ Calcular o fator integrante $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t) = exp\int \frac{2}{t}dt = e^{2ln|t|} = e^{lnt^2} = t^2$$

Demonstração

$$t^2 = e^{lnt^2}$$
$$lnt^2 = lne^{lnt^2}$$
$$lnt^2 = lnt^2 lne$$
$$lnt^2 = lnt^2$$

Solução ex. 1

- ✓ Escrever a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t \quad \Rightarrow \quad p(t) = \frac{2}{t}$$

- ✓ Calcular o fator integrante $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t) = exp\int \frac{2}{t}dt = e^{2ln|t|} = e^{lnt^2} = t^2$$

Demonstração

$$t^2 = e^{lnt^2}$$
$$lnt^2 = lne^{lnt^2}$$
$$lnt^2 = lnt^2 lne$$
$$lnt^2 = lnt^2$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$t^2y' + 2ty = 4t^3$$

Solução ex. 1

- ✓ Escrever a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t \quad \Rightarrow \quad p(t) = \frac{2}{t}$$

- ✓ Calcular o fator integrante $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t) = exp\int \frac{2}{t}dt = e^{2ln|t|} = e^{lnt^2} = t^2$$

Demonstração

$$t^2 = e^{lnt^2}$$
$$lnt^2 = lne^{lnt^2}$$
$$lnt^2 = lnt^2 lne$$
$$lnt^2 = lnt^2$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$t^2y' + 2ty = 4t^3 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d}{dt}(t^2y)dt = \int 4t^3\,dt$$

Solução ex. 1

- ✓ Escrever a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t \quad \Rightarrow \quad p(t) = \frac{2}{t}$$

- ✓ Calcular o fator integrante $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t) = exp\int \frac{2}{t}dt = e^{2ln|t|} = e^{lnt^2} = t^2$$

Demonstração

$$t^2 = e^{lnt^2}$$
$$lnt^2 = lne^{lnt^2}$$
$$lnt^2 = lnt^2 lne$$
$$lnt^2 = lnt^2$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$t^2y' + 2ty = 4t^3 \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{d}{dt}(t^2y)dt = \int 4t^3\, dt$$

$$t^2y = t^4 + \mathrm{c} \Rightarrow y = t^2 + \frac{c}{t^2}$$

Solução ex. 1

- ✓ Escrever a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t \quad \Rightarrow \quad p(t) = \frac{2}{t}$$

- ✓ Calcular o fator integrante $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t) = exp\int \frac{2}{t}dt = e^{2ln|t|} = e^{lnt^2} = t^2$$

Demonstração

$$t^2 = e^{lnt^2}$$
$$lnt^2 = lne^{lnt^2}$$
$$lnt^2 = lnt^2 lne$$
$$lnt^2 = lnt^2$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$t^2y' + 2ty = 4t^3 \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{d}{dt}(t^2y)dt = \int 4t^3\,dt$$

$$t^2y = t^4 + \mathrm{c} \Rightarrow y = t^2 + \frac{c}{t^2} \overset{y(1)=2}{\Rightarrow} \boxed{y = t^2 + \frac{1}{t^2}} \; y > 0$$

Exemplo 2 Resolver o P.V.I. (problema de valor inicial) pelo método do fator integrante.

$$2y' + ty = 2 \qquad y(0) = 1$$ *(condição inicial)*

Exemplo 2 Resolver o P.V.I. (problema de valor inicial) pelo método do fator integrante.

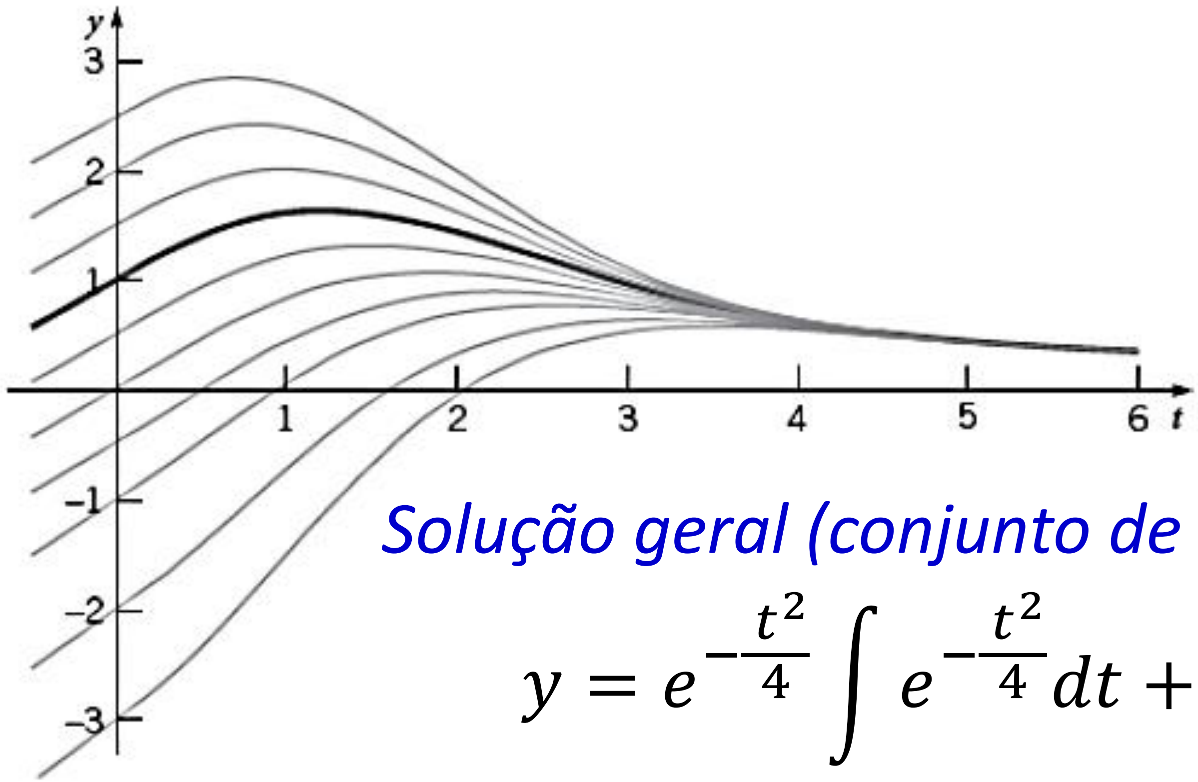
$$2y' + ty = 2 \qquad y(0) = 1 \quad \textit{(condição inicial)}$$

Solução geral (conjunto de curvas):

$$y = e^{-\frac{t^2}{4}} \int e^{-\frac{t^2}{4}} dt + ce^{-\frac{t^2}{4}}$$

Exemplo 2 Resolver o P.V.I. (problema de valor inicial) pelo método do fator integrante.

$$2y' + ty = 2 \qquad y(0) = 1$$ *(condição inicial)*



Solução geral (conjunto de curvas):

$$y = e^{-\frac{t^2}{4}} \int e^{-\frac{t^2}{4}} dt + ce^{-\frac{t^2}{4}}$$

FIGURA 2.1.4 Curvas integrais para $2y' + ty = 2$;
curva em cinza-escuro: solução particular que satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$.

Equações separáveis

Equações separáveis

- Na aula 1 foi utilizado o processo de integração para resolver a eq. dif. de 1ª ordem da forma:

$$\frac{dy}{dt} = ay + b$$

Equações separáveis

- Na aula 1 foi utilizado o processo de integração para resolver a eq. dif. de 1ª ordem da forma:

$$\frac{dy}{dt} = ay + b$$

- Esse processo pode ser utilizado para uma classe muito maior de equações.

Equações separáveis

- Na aula 1 foi utilizado o processo de integração para resolver a eq. dif. de 1ª ordem da forma:

$$\frac{dy}{dt} = ay + b$$

- Esse processo pode ser utilizado para uma classe muito maior de equações.

- Utilizando a variável x para variável independente, a eq. dif. geral de 1ª ordem fica:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Equações separáveis

- Escrevendo a eq. dif. na forma:

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Equações separáveis

- Escrevendo a eq. dif. na forma:

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

- Considerando o caso especial em que $M = M(x)$ e $N = N(y)$ tem-se:

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Equações separáveis

- Escrevendo a eq. dif. na forma:

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

- Considerando o caso especial em que $M = M(x)$ e $N = N(y)$ tem-se:

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

- Esta equação é separável, pois os termos podem ser colocados em lados opostos na forma diferencial:

$$M(x)dx = -N(y)dy$$

Integrando ambos os lados tem-se a solução.

Exemplo 3 Encontrar a solução da equação diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 - y^2}$$

[redacted]

Solução ex. 3

- ✓ Escrevendo na forma separável:

$$-x^2 + (1 - y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

Solução ex. 3

- Escrevendo na forma separável:

$$-x^2 + (1 - y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

- Separando as variáveis:

$$(1 - y^2)dy = x^2dx$$

Solução ex. 3

- ✓ Escrevendo na forma separável:

$$-x^2 + (1 - y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

- ✓ Separando as variáveis:

$$(1 - y^2)dy = x^2dx$$

- ✓ Integrando em ambos os lados tem-se:

$$\int (1 - y^2)dy = \int x^2dx$$

Solução ex. 3

- ✓ Escrevendo na forma separável:

$$-x^2 + (1 - y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

- ✓ Separando as variáveis:

$$(1 - y^2)dy = x^2 dx$$

- ✓ Integrando em ambos os lados tem-se:

$$\int (1 - y^2)dy = \int x^2 dx \quad \Rightarrow \quad y - \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + c$$

Solução ex. 3

- ✓ Escrevendo na forma separável:

$$-x^2 + (1 - y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

- ✓ Separando as variáveis:

$$(1 - y^2)dy = x^2 dx$$

- ✓ Integrando em ambos os lados tem-se:

$$\int (1 - y^2)dy = \int x^2 dx \quad \Rightarrow \quad y - \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\boxed{3y - y^3 - x^3 = c}$$

A constante c é determinada da condição inicial.

Ex. 3: campos de direção e curvas integrais

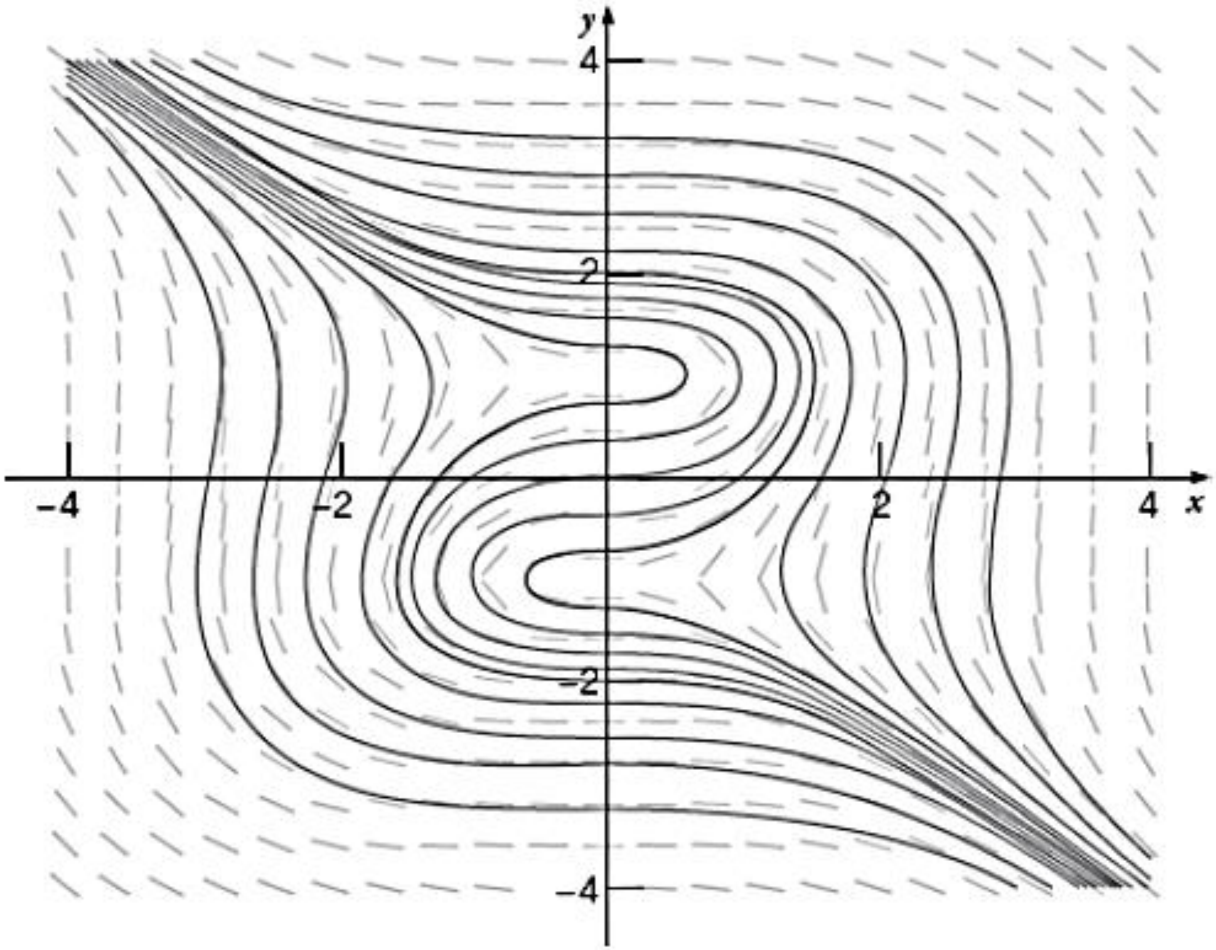


FIGURA 2.2.1 Campo de direções e curvas integrais para $y' = x^2/(1 - y^2)$.

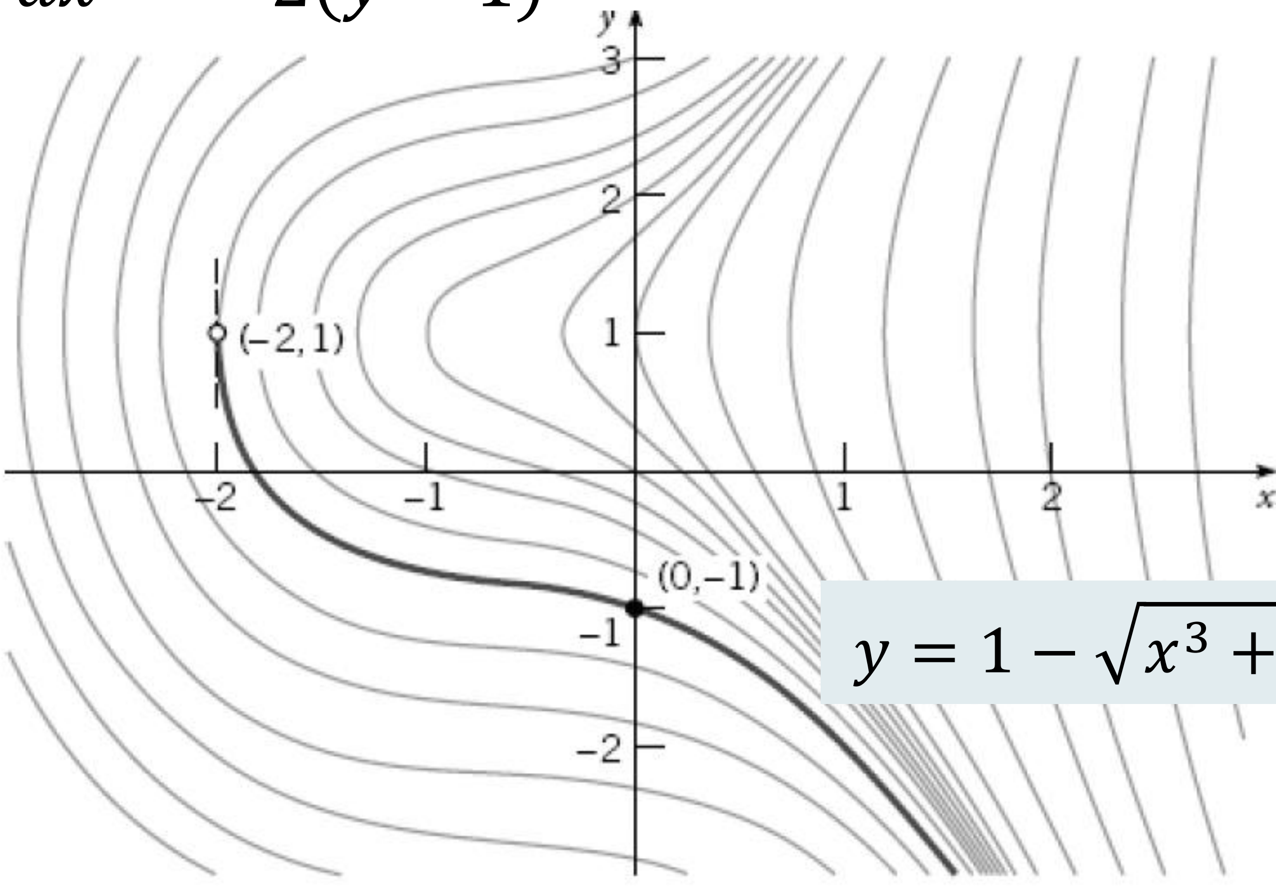
$$3y - y^3 - x^3 = c$$

Exemplo 4 Resolver o P.V.I.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)} \qquad y(0) = -1$$

Exemplo 4 Resolver o P.V.I.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)} \qquad y(0) = -1$$



$$y = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$

FIGURA 2.2.2 Curvas integrais para $y' = (3x^2 + 4x + 2)/[2(y-1)]$;
a solução que satisfaz $y(0) = -1$ em cinza escuro.

Para depois desta aula:

- Estudar seções 2.1 e 2.2 do livro texto (Boyce).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar: exercícios da seções 2.1 e 2.2 do Boyce.

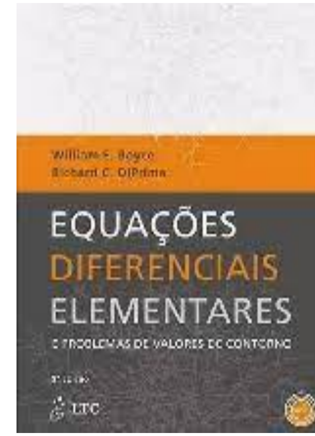
Próxima aula:

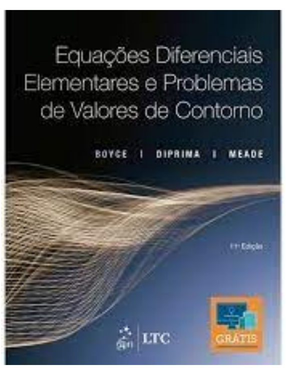
- Modelagem com eq. dif. de 1ª ordem.

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Numeração dos exercícios com base na 9ª ed.





BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2020.