Cálculo diferencial e integral

Sequências e séries infinitas

Aula 02
Aplicações de Sequências

Henrique Antonio Mendonça Faria

Henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Revisar sequências conhecidas (PA e PG).
2. Verificação de convergência.
3. Cálculo de limites.

Pré-requisitos

Cálculo I: limites no infinito.

Sequências conhecidas (PA e PG)

Progressão Aritmética (PA)

- Sequências de números.
- Cada termo, a partir do segundo, é a soma do termo anterior com uma constante r.
- A constante r é chamada razão da PA.

$$a_n = a_{n-1} + r$$

- Caso a razão e o primeiro termo sejam conhecidos pode-se construir o termo geral da PA.

Exemplo 1 Sabendo que em uma PA $a_7 = 45$ e $a_{12} = 30$ determine a_1, r e o termo geral.

Solução

Exemplo 1 Sabendo que em uma PA $a_7 = 45$ e $a_{12} = 30$ determine a_1, r e o termo geral.

Solução

$$a_7 = a_6 + r \quad \boldsymbol{mas}: \; a_2 = a_1 + r, \quad a_3 = a_2 + r, \ldots$$

Exemplo 1 Sabendo que em uma PA $a_7 = 45$ e $a_{12} = 30$ determine a_1, r e o termo geral.

Solução

$$a_7 = a_6 + r \quad \boldsymbol{mas}: \; a_2 = a_1 + r, \quad a_3 = a_2 + r, \ldots$$

$$a_7 = a_1 + 6r$$

$$a_{12} = a_1 + 11r$$

Exemplo 1 Sabendo que em uma PA $a_7 = 45$ e $a_{12} = 30$ determine a_1, r e o termo geral.

Solução

$$a_7 = a_6 + r \quad \boldsymbol{mas}: \; a_2 = a_1 + r, \quad a_3 = a_2 + r, \ldots$$

$$\begin{matrix} a_7 = a_1 + 6r \\ a_{12} = a_1 + 11r \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 45 = a_1 + 6r \quad \mathbf{(1)} \\ 30 = a_1 + 11r \; \mathbf{(2)} \end{matrix}$$

Exemplo 1 Sabendo que em uma PA $a_7 = 45$ e $a_{12} = 30$ determine a_1, r e o termo geral.

Solução

$$a_7 = a_6 + r \quad \boldsymbol{mas}: \; a_2 = a_1 + r, \quad a_3 = a_2 + r, \ldots$$

$$a_7 = a_1 + 6r \qquad\qquad 45 = a_1 + 6r \quad \mathbf{(1)}$$

$$\rightarrow$$

$$a_{12} = a_1 + 11r \qquad\qquad 30 = a_1 + 11r \; \mathbf{(2)}$$

Eq. $(\mathbf{1}) - (\mathbf{2})$: $15 = -5r \rightarrow \quad \boxed{r = -3}$

Exemplo 1 Sabendo que em uma PA $a_7 = 45$ e $a_{12} = 30$ determine a_1, r e o termo geral.

Solução

$$a_7 = a_6 + r \quad \boldsymbol{mas}: \; a_2 = a_1 + r, \quad a_3 = a_2 + r, \ldots$$

$$a_7 = a_1 + 6r \qquad\qquad 45 = a_1 + 6r \quad \mathbf{(1)}$$

$$\rightarrow$$

$$a_{12} = a_1 + 11r \qquad\qquad 30 = a_1 + 11r \; \mathbf{(2)}$$

Eq. $(\mathbf{1}) - (\mathbf{2})$: $15 = -5r \rightarrow \boxed{r = -3}$

Em $(\mathbf{1})$: $45 = a_1 + 6(-3) \rightarrow \boxed{a_1 = 63}$

Exemplo 1 Sabendo que em uma PA $a_7 = 45$ e $a_{12} = 30$ determine a_1, r e o termo geral.

Solução

$a_7 = a_6 + r$ $\quad$ $\boldsymbol{mas}$: $a_2 = a_1 + r, \quad a_3 = a_2 + r, \ldots$

$a_7 = a_1 + 6r \quad \rightarrow \quad 45 = a_1 + 6r \quad \mathbf{(1)}$

$a_{12} = a_1 + 11r \quad\quad 30 = a_1 + 11r\ \mathbf{(2)}$

Eq. $(\mathbf{1}) - (\mathbf{2})$: $15 = -5r \rightarrow \boxed{r = -3}$

Em $(\mathbf{1})$: $45 = a_1 + 6(-3) \rightarrow \boxed{a_1 = 63}$

Termo geral: $a_n = a_1 + (n-1)r$

Exemplo 1 Sabendo que em uma PA $a_7 = 45$ e $a_{12} = 30$ determine a_1, r e o termo geral.

Solução

$a_7 = a_6 + r \quad \boldsymbol{mas}: \ a_2 = a_1 + r, \quad a_3 = a_2 + r, \ldots$

$$\begin{matrix} a_7 = a_1 + 6r & & 45 = a_1 + 6r \quad \mathbf{(1)} \\ & \rightarrow & \\ a_{12} = a_1 + 11r & & 30 = a_1 + 11r \ (\mathbf{2}) \end{matrix}$$

Eq. $(\mathbf{1}) - (\mathbf{2})$: $15 = -5r \rightarrow \boxed{r = -3}$

Em $(\mathbf{1})$: $45 = a_1 + 6(-3) \rightarrow \boxed{a_1 = 63}$

Termo geral: $a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_n = 63 + (n-1)(-3) \rightarrow$

Exemplo 1 Sabendo que em uma PA $a_7 = 45$ e $a_{12} = 30$ determine a_1, r e o termo geral.

Solução

$$a_7 = a_6 + r \quad \boldsymbol{mas}: \; a_2 = a_1 + r, \quad a_3 = a_2 + r, \ldots$$

$$\begin{array}{lcl} a_7 = a_1 + 6r & \multirow{2}{*}{$\rightarrow$} & 45 = a_1 + 6r \quad \mathbf{(1)} \\ a_{12} = a_1 + 11r & & 30 = a_1 + 11r \; \mathbf{(2)} \end{array}$$

Eq. $(\mathbf{1}) - (\mathbf{2})$: $15 = -5r \rightarrow \boxed{r = -3}$

Em $(\mathbf{1})$: $45 = a_1 + 6(-3) \rightarrow \boxed{a_1 = 63}$

Termo geral: $a_n = a_1 + (n-1)r$

$$a_n = 63 + (n-1)(-3) \rightarrow \boxed{a_n = 66 - 3n \quad (n \geq 1)}$$

Exercícios

a) Sabendo que em uma PA $a_7 + a_8 = 46$ e $a_{12} + a_{14} = 68$ determine a_1, r e o termo geral.

Respostas: $a_1 = 10$, $r = 2$ e $a_n = 8 + 2n$

b) Dada a PA $(-33, -29, -25, -21 \ldots)$ determine a_{20}, r e o termo geral.

Respostas: $a_{20} = 43$, $r = 4$ e $a_n = -37 + 4n$

Progressão Geométrica (PG)

- Sequências de números reais.
- Cada termo, a partir do segundo, é o produto do termo anterior com uma constante real q.
- A constante q é chamada razão da PG.

$$\boxed{a_{p+1} = a_p q}$$

Progressão Geométrica (PG)

- Sequências de números reais.
- Cada termo, a partir do segundo, é o produto do termo anterior com uma constante real q.
- A constante q é chamada razão da PG.

$$\boxed{a_{p+1} = a_p q}$$

- Fórmula para o termo geral da PG:

$$a_2 = a_1 q; \quad a_3 = a_2 q = a_1 q q; \quad \ldots \qquad \boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$$

Exemplo 2 Em uma PG $a_4 = 32$ e $a_1 = 1/2$. determine a_8, e a razão q.

Solução

Exemplo 2 Em uma PG $a_4 = 32$ e $a_1 = 1/2$. determine a_8, e a razão q.

Solução

$$a_4 = a_1 q^3 \rightarrow 32 = \frac{1}{2} q^3 \rightarrow q = \sqrt[3]{64} \rightarrow \boxed{q = 4}$$

Exemplo 2 Em uma PG $a_4 = 32$ e $a_1 = 1/2$. determine a_8, e a razão q.

Solução

$$a_4 = a_1 q^3 \rightarrow 32 = \frac{1}{2} q^3 \rightarrow q = \sqrt[3]{64} \rightarrow \boxed{q = 4}$$

$$a_8 = a_1 q^7 \rightarrow a_8 = \frac{1}{2} 4^7 \rightarrow a_8 = \frac{1}{2} (2^2)^7 \rightarrow$$

Exemplo 2 Em uma PG $a_4 = 32$ e $a_1 = 1/2$. determine a_8, e a razão q.

Solução

$$a_4 = a_1 q^3 \rightarrow 32 = \frac{1}{2} q^3 \rightarrow q = \sqrt[3]{64} \rightarrow \boxed{q = 4}$$

$$a_8 = a_1 q^7 \rightarrow a_8 = \frac{1}{2} 4^7 \rightarrow a_8 = \frac{1}{2} (2^2)^7 \rightarrow$$

$$a_8 = \frac{1}{2} 2^{14} \rightarrow a_8 = 2^{13} \rightarrow \boxed{a_8 = 8192}$$

Exercícios

a) Sabendo que em uma PG $a_5 = 6$ e $a_7 = 54$ determine a_6.

Resposta: $a_6 = 18$

b) Sabendo que em uma PG $a_8 = 1/2$ e $a_9 = 1/4$ determine a_1.

Respostas: $a_1 = 64$

Verificar convergência

Verificação de convergência

- Uma sequência convergente é aquela na qual o limite do termo geral, quando $n \to \infty$, é um número finito.

Verificação de convergência

- Uma sequência convergente é aquela na qual o limite do termo geral, quando $n - \infty$, é um número finito.

Exemplo 3 A sequência seguinte é convergente?

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{10 + n}}$$

Verificação de convergência

- Uma sequência convergente é aquela na qual o limite do termo geral, quando $n - \infty$, é um número finito.

Exemplo 3 A sequência seguinte é convergente?

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{10 + n}}$$

dividimos o numerador e o denominador por n:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\sqrt{10 + n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{10}{n^2} + \frac{1}{n}}} = \infty$$

Verificação de convergência

- Uma sequência convergente é aquela na qual o limite do termo geral, quando $n - \infty$, é um número finito.

Exemplo 3 A sequência seguinte é convergente?

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{10 + n}}$$

dividimos o numerador e o denominador por n:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\sqrt{10 + n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{10}{n^2} + \frac{1}{n}}} = \infty$$

Então $\{a_n\}$ é divergente.

Exercícios Verifique se as sequências (para $n \geq 1$) converge pelo cálculo dos limites.

a) $a_n = 3.2^n$ Resp.: $diverge$.

b) $a_n = 3.(\frac{1}{2})^n$ Resp.: $converge$.

c) $a_n = 3.(-1)^n$ Resp.: $diverge$.

d) $a_n = (n-2)^2 - (n+1)^2$ Resp.: $diverge$.

e) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ Resp.: $diverge$.

Cálculo de Limites

Cálculo de limites

- O número de Euler (e) pode ser escrito como uma sequência numérica.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$a_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Cálculo de limites

- O número de Euler (e) pode ser escrito como uma sequência numérica.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

- Cálculo do limite dessa sequência:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

APROXIMAÇÕES DE e POR $(1 + 1/x)^x$ COM VALORES CRESCENTES DE x

x	$1 + \frac{1}{x}$	$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
1	2	≈2,000000
10	1,1	2,593742
100	1,01	2,704814
1000	1,001	2,716924
10.000	1,0001	2,718146
100.000	1,00001	2,718268
1.000.000	1,000001	2,718280

Exercícios Calcular os limites das sequências.

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$ Resp.: $1/e$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$$ Resp.: e^2

c) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n}$$ Resp.: $\sqrt[3]{e^2}$

Para depois desta aula:

- Estudar seção 11.1 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar: exercícios Seção 11.1 do Stewart.

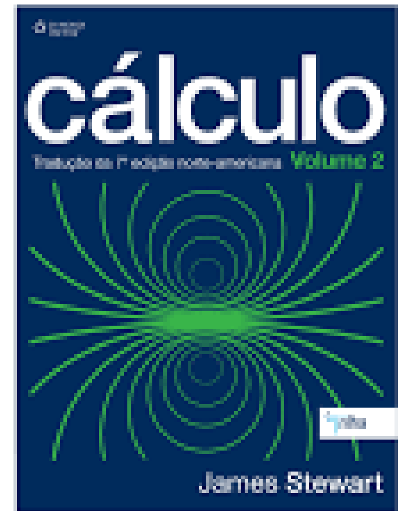
Próxima aula:

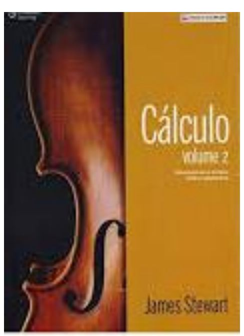
- Séries.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed. ►





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.