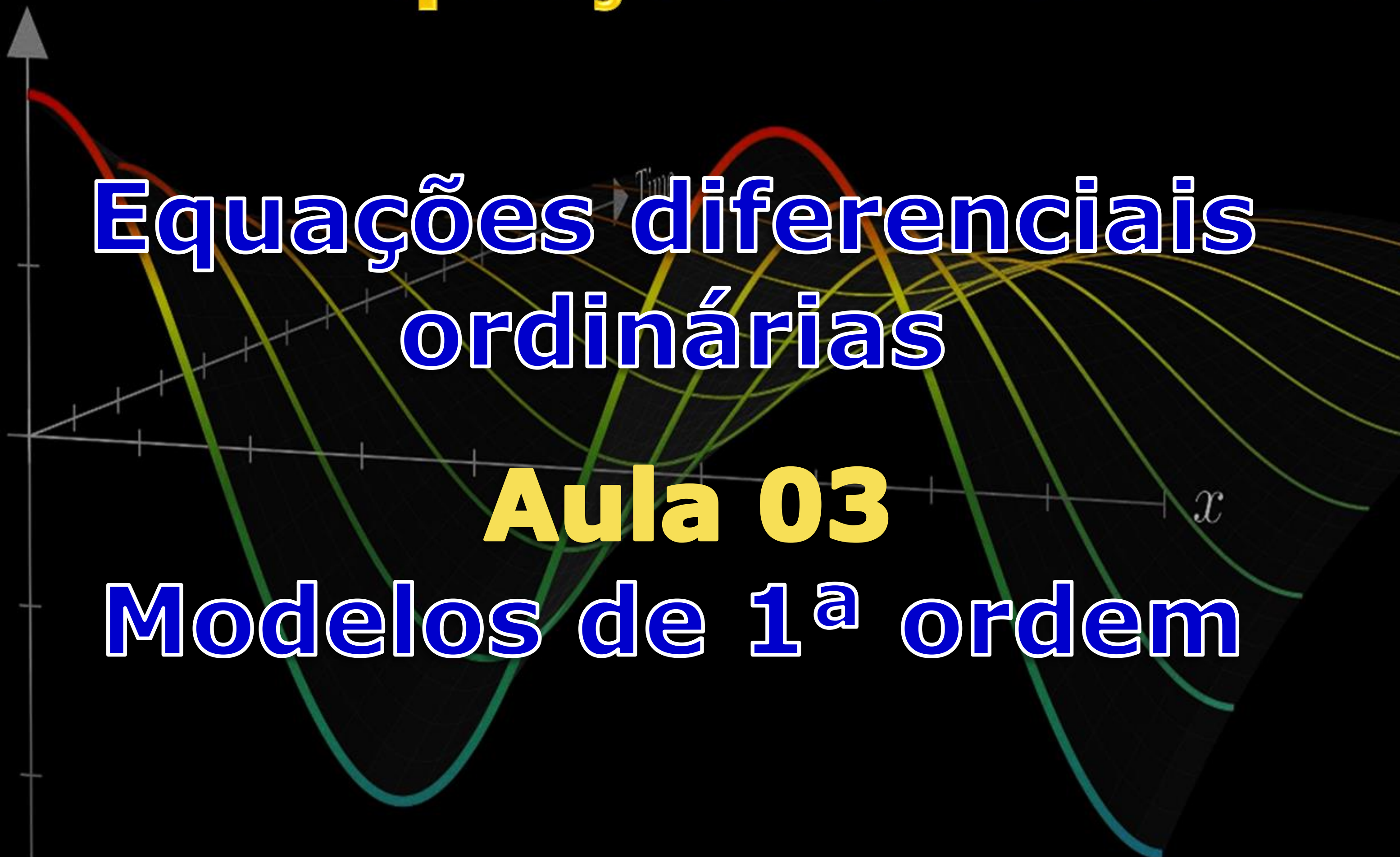
Equações diferenciais



Equações diferenciais ordinárias

Aula 03

Modelos de 1ª ordem

Henrique Antonio Mendonça Faria

Henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Modelagem com eq. dif. de 1ª ordem.
2. Etapas de construção.
3. Exemplo da mistura.
4. Exercício proposto.

Pré-requisitos

- Diferenciação e Integração de funções.
- Resolução de equações algébricas com logaritmo.

Modelagem com Eq. Dif. de 1ª ordem

Modelagem com Eq. Dif. de 1ª ordem

- A modelagem matemática e a experimentação têm papéis complementares na investigação científica.
- As análises matemáticas podem sugerir direções mais promissoras para exploração experimental.

Modelagem com Eq. Dif. de 1ª ordem

- A modelagem matemática e a experimentação têm papéis complementares na investigação científica.
- As análises matemáticas podem sugerir direções mais promissoras para exploração experimental.
- Independentemente do campo de aplicação, existem três etapas sempre presentes na modelagem matemática.
- A seguir serão relacionados os principais itens dessas etapas fundamentais da modelagem.

Etapas de construção de um modelo

Etapas de construção de um modelo

1. Construção do modelo inicial
2. Análise do modelo
3. Comparação com a experimentação ou observação

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para expressões matemáticas.

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para expressões matemáticas.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para expressões matemáticas.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.
3. Inicialmente, essa equação dará uma descrição aproximada do processo real.

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para expressões matemáticas.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.
3. Inicialmente, essa equação dará uma descrição aproximada do processo real.
4. Algumas vezes a modelagem envolve substituir conceitualmente um processo discreto por um processo contínuo.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Caso seja possível, resolver a eq. dif. analiticamente.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Caso seja possível, resolver a eq. dif. analiticamente.
2. A segunda alternativa é utilizar métodos numéricos para resolução.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Caso seja possível, resolver a eq. dif. analiticamente.
2. A segunda alternativa é utilizar métodos numéricos para resolução.
3. Uma terceira via consiste em analisar as propriedades da solução, sem resolver a eq. dif.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Caso seja possível, resolver a eq. dif. analiticamente.
2. A segunda alternativa é utilizar métodos numéricos para resolução.
3. Uma terceira via consiste em analisar as propriedades da solução, sem resolver a eq. dif.
4. O conhecimento da área em estudo permite sugerir aproximações razoáveis para tornar a resolução viável.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Caso seja possível, resolver a eq. dif. analiticamente.
2. A segunda alternativa é utilizar métodos numéricos para resolução.
3. Uma terceira via consiste em analisar as propriedades da solução, sem resolver a eq. dif.
4. O conhecimento da área em estudo permite sugerir aproximações razoáveis para tornar a resolução viável.
5. O jogo entre a compreensão do fenômeno e o conhecimento das limitações técnicas é característico da Matemática Aplicada.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

1. Interpretar a solução no contexto do problema.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

1. Interpretar a solução no contexto do problema.
2. Calcular os valores da solução em pontos específicos, comparando-os com os valores observados experimentalmente.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

1. Interpretar a solução no contexto do problema.
2. Calcular os valores da solução em pontos específicos, comparando-os com os valores observados experimentalmente.
3. Avaliar o comportamento da solução para tempos longos.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

1. Interpretar a solução no contexto do problema.
2. Calcular os valores da solução em pontos específicos, comparando-os com os valores observados experimentalmente.
3. Avaliar o comportamento da solução para tempos longos.
4. O fato da solução matemática existir e parecer razoável não garante que esteja correta.

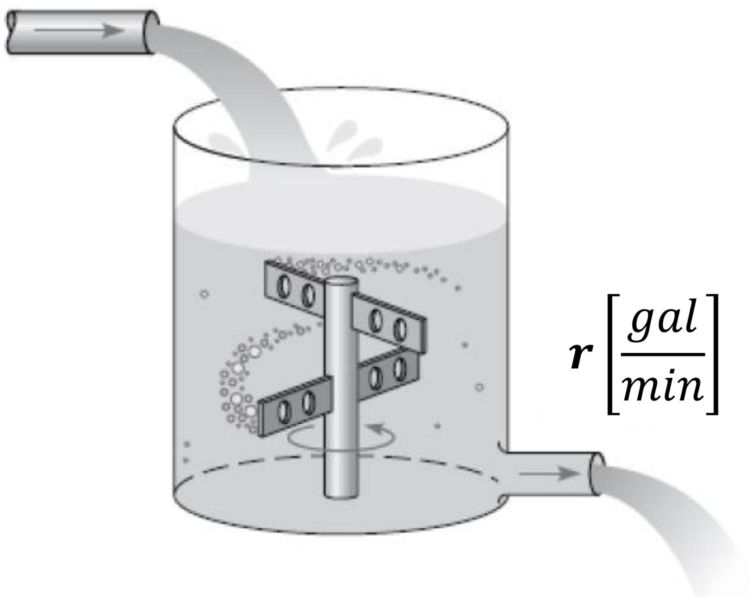
Etapa 3 – Comparação com experimentos

1. Interpretar a solução no contexto do problema.
2. Calcular os valores da solução em pontos específicos, comparando-os com os valores observados experimentalmente.
3. Avaliar o comportamento da solução para tempos longos.
4. O fato da solução matemática existir e parecer razoável não garante que esteja correta.
5. Caso as previsões do modelo estejam inconsistentes com o fenômeno ele deve ser corrigido ou refeito.

Exemplo da mistura

Exemplo 1 Dissolução de sal em um reator tanque com agitação contínua (CSTR).

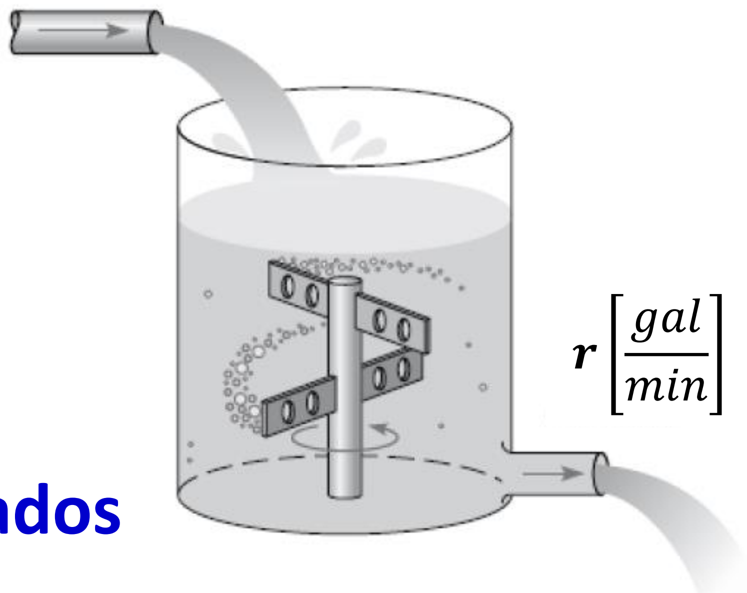
$$\boldsymbol{r}\left[\frac{gal}{min}\right], \frac{1}{4}\ lb/gal$$



$$\boldsymbol{r}\left[\frac{gal}{min}\right]$$

Exemplo 1 Dissolução de sal em um reator tanque com agitação contínua (CSTR).

$\boldsymbol{r}\left[\dfrac{gal}{min}\right], \dfrac{1}{4}\ lb/gal$

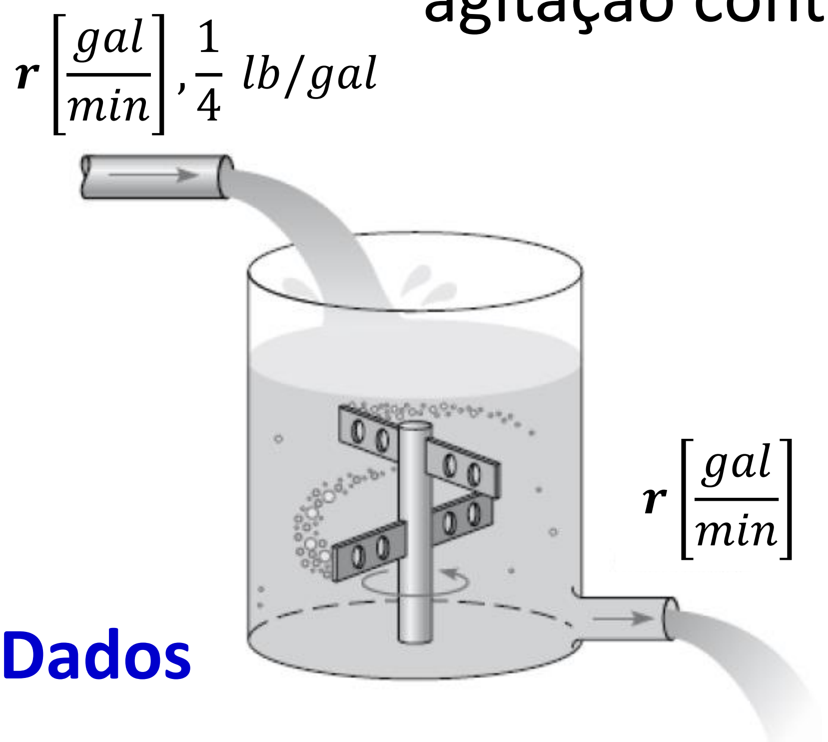


$\boldsymbol{r}\left[\dfrac{gal}{min}\right]$

Dados

- ✓ Em $t = 0$, um tanque contém Q_o libras de sal em 100 galões de água.
- ✓ $\boldsymbol{r}$: galões por minuto.
- ✓ $\boldsymbol{Q(t)}$: quantidade de sal**?**

Exemplo 1 Dissolução de sal em um reator tanque com agitação contínua (CSTR).



Dados

- ✓ Em $t = 0$, um tanque contém Q_o libras de sal em 100 galões de água.
- ✓ r: galões por minuto.
- ✓ $Q(t)$: quantidade de sal?

Questões

a) Escrever o PVI.

b) Encontrar a expressão para $Q(t)$.

c) Qual a quantidade limite Q_L quando $t \to \infty$.

d) Se $r = 3$ e $Q_o = 2Q_L$ encontrar T para o nível de sal a 2% de Q_L.

e) Determinar r para $t = 45\ \text{min}$.

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para matemática.
   - Quantidade de sal no tanque é devida aos fluxos de entrada e saída.

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para matemática.
   - Quantidade de sal no tanque é devida aos fluxos de entrada e saída.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.

$$\frac{dQ}{dt} = tx\ ent - tx\ saída$$

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para matemática.
   - Quantidade de sal no tanque é devida aos fluxos de entrada e saída.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.

$$\frac{dQ}{dt} = tx\ ent - tx\ saída$$

$$\boldsymbol{tx\ ent} = \frac{1}{4} r\ \left[\frac{lb}{gal}\frac{gal}{min}\right]$$

P/ cada gal r há ¼ lb sal

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para matemática.
   - Quantidade de sal no tanque é devida aos fluxos de entrada e saída.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.

$$\frac{dQ}{dt} = tx\ ent - tx\ saída$$

$$\boldsymbol{tx\ ent} = \frac{1}{4}r\ \left[\frac{lb}{gal}\frac{gal}{min}\right] = \frac{r}{4}\left[\frac{lb}{min}\right]$$

P/ cada gal r há
¼ lb sal

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para matemática.
   - Quantidade de sal no tanque é devida aos fluxos de entrada e saída.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.

$$\frac{dQ}{dt} = tx\ ent - tx\ saída$$

$$\boldsymbol{tx\ ent} = \frac{1}{4} r \left[\frac{lb}{gal} \frac{gal}{min} \right] = \frac{r}{4} \left[\frac{lb}{min} \right]$$

P/ cada gal r há ¼ lb sal

$$\boldsymbol{tx\ saída} = \frac{Q}{100} r \left[\frac{lb}{gal} \frac{gal}{min} \right]$$

Q que sai é diluída em 100 gal

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para matemática.
   - Quantidade de sal no tanque é devida aos fluxos de entrada e saída.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.

$$\frac{dQ}{dt} = tx\ ent - tx\ saída$$

$$\boldsymbol{tx\ ent} = \frac{1}{4}r\left[\frac{lb}{gal}\frac{gal}{min}\right] = \frac{r}{4}\left[\frac{lb}{min}\right]$$

P/ cada gal r há ¼ lb sal

$$\boldsymbol{tx\ saída} = \frac{Q}{100}r\left[\frac{lb}{gal}\frac{gal}{min}\right] = \frac{rQ}{100}\left[\frac{lb}{min}\right]$$

Q que sai é diluída em 100 gal

Etapa 1 – Construção do modelo inicial

- a) PVI: $\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{rQ}{100} = \dfrac{r}{4}$ $\quad Q(o) = Q_o$ (*condição inicial*)

Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: $\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{rQ}{100} = \dfrac{r}{4}$ $Q(o) = Q_o$ (*condição inicial*)

3. A equação diferencial dará uma descrição aproximada do processo real.

Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: $\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{rQ}{100} = \dfrac{r}{4}$ $Q(o) = Q_o$ (*condição inicial*)

3. A equação diferencial dará uma descrição aproximada do processo real.
4. O processo neste caso é contínuo.

Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: $$\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}$$ $$Q(o) = Q_o$$ (*condição inicial*)

3. A equação diferencial dará uma descrição aproximada do processo real.
4. O processo neste caso é contínuo.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Neste caso é possível resolver o PVI analiticamente.

Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: $$\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}$$ $Q(o) = Q_o$ (*condição inicial*)

3. A equação diferencial dará uma descrição aproximada do processo real.
4. O processo neste caso é contínuo.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Neste caso é possível resolver o PVI analiticamente.
   - Eq. Dif. ordinária de 1ª ordem.

Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: $\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{rQ}{100} = \dfrac{r}{4}$ $\quad Q(o) = Q_o$ (*condição inicial*)

3. A equação diferencial dará uma descrição aproximada do processo real.
4. O processo neste caso é contínuo.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Neste caso é possível resolver o PVI analiticamente.
   - Eq. Dif. ordinária de 1ª ordem.
   - Resolução pelo método do fator integrante.

Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: $\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}$ $Q(o) = Q_o$ (*condição inicial*)

3. A equação diferencial dará uma descrição aproximada do processo real.
4. O processo neste caso é contínuo.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Neste caso é possível resolver o PVI analiticamente.
   - Eq. Dif. ordinária de 1ª ordem.
   - Resolução pelo método do fator integrante.
   - $\boldsymbol{Q(t)}$ é a função incógnita e $\boldsymbol{p(t) = r/100}$.

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t) = exp\int \frac{r}{100}dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t) = exp\int \frac{r}{100}dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{100}}\frac{dQ}{dt} + e^{\frac{rt}{100}}\frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}e^{\frac{rt}{100}}$$

Etapa 2 – Análise do modelo

✓ Calcular o fator integrante $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t) = exp\int \frac{r}{100}dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{100}}\frac{dQ}{dt} + e^{\frac{rt}{100}}\frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}e^{\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}[e^{\frac{rt}{100}}Q] = \frac{r}{4}e^{\frac{rt}{100}}$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t) = exp \int \frac{r}{100} dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{100}} \frac{dQ}{dt} + e^{\frac{rt}{100}} \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}[e^{\frac{rt}{100}} Q] = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}}$$

$$\int \frac{d}{dt}[e^{\frac{rt}{100}} Q] dt = \int \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}} dt$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t) = exp\int \frac{r}{100}dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{100}}\frac{dQ}{dt} + e^{\frac{rt}{100}}\frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}e^{\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}[e^{\frac{rt}{100}}Q] = \frac{r}{4}e^{\frac{rt}{100}}$$

$$\int \frac{d}{dt}[e^{\frac{rt}{100}}Q]dt = \int \frac{r}{4}e^{\frac{rt}{100}}\,dt \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{rt}{100}}Q = \frac{r}{4}\int e^{\frac{rt}{100}}\,dt$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t) = exp\int \frac{r}{100}dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{100}}\frac{dQ}{dt} + e^{\frac{rt}{100}}\frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}e^{\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[e^{\frac{rt}{100}}Q\right] = \frac{r}{4}e^{\frac{rt}{100}}$$

$$\int \frac{d}{dt}\left[e^{\frac{rt}{100}}Q\right]dt = \int \frac{r}{4}e^{\frac{rt}{100}}\,dt \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{rt}{100}}Q = \frac{r}{4}\int e^{\frac{rt}{100}}\,dt$$

$$e^{\frac{rt}{100}}Q = \frac{r}{4}\frac{1}{{}^{r}/_{100}}e^{\frac{rt}{100}} + C$$

Etapa 2 – Análise do modelo

✓ Calcular o fator integrante $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t) = exp\int \frac{r}{100}dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{100}}\frac{dQ}{dt} + e^{\frac{rt}{100}}\frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}e^{\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[e^{\frac{rt}{100}}Q\right] = \frac{r}{4}e^{\frac{rt}{100}}$$

$$\int \frac{d}{dt}\left[e^{\frac{rt}{100}}Q\right]dt = \int \frac{r}{4}e^{\frac{rt}{100}}\,dt \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{rt}{100}}Q = \frac{r}{4}\int e^{\frac{rt}{100}}\,dt$$

$$e^{\frac{rt}{100}}Q = \frac{r}{4}\frac{1}{{}^{r}/_{100}}e^{\frac{rt}{100}} + C \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{rt}{100}}Q = 25e^{\frac{rt}{100}} + C$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Solução geral da equação diferencial:
  - ✓ b) Expressão: $Q = 25 + Ce^{-\frac{rt}{100}}$

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Solução geral da equação diferencial:
  - ✓ b) Expressão: $Q = 25 + Ce^{-\frac{rt}{100}}$
- ✓ Inserindo a condição inicial $Q(o) = Q_o$:

$$Q_o = 25 + C$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Solução geral da equação diferencial:
  - ✓ b) Expressão: $Q = 25 + Ce^{-\frac{rt}{100}}$
- ✓ Inserindo a condição inicial $Q(o) = Q_o$:

$$Q_o = 25 + C \quad \Rightarrow \quad C = Q_o - 25$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Solução geral da equação diferencial:
  - ✓ b) Expressão: $$Q = 25 + Ce^{-\frac{rt}{100}}$$
- ✓ Inserindo a condição inicial $Q(o) = Q_o$:

$$Q_o = 25 + C \quad \Rightarrow \quad C = Q_o - 25$$

- ✓ Voltando o valor da constante C na expressão de Q:

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Solução geral da equação diferencial:
  - ✓ b) Expressão: $$Q = 25 + Ce^{-\frac{rt}{100}}$$
- ✓ Inserindo a condição inicial $Q(o) = Q_o$:

$$Q_o = 25 + C \quad \Rightarrow \quad C = Q_o - 25$$

- ✓ Voltando o valor da constante C na expressão de Q:

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$Q = 25(1 - e^{-\frac{rt}{100}}) + Q_o e^{-\frac{rt}{100}}$$

solução particular do PVI

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \to \infty$:

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} Q = \lim_{t\to\infty} 25 + \lim_{t\to\infty} (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \to \infty$:

$$\lim_{t \to \infty} Q = \lim_{t \to \infty} 25 + \lim_{t \to \infty} (Q_o - 25) e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t \to \infty} Q = 25 + \ (Q_o - 25) \lim_{t \to \infty} e^{-\frac{rt}{100}}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} Q = \lim_{t\to\infty} 25 + \lim_{t\to\infty} (Q_o - 25) e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t\to\infty} Q = 25 + (Q_o - 25) \underbrace{\cancel{\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{rt}{100}}}}_{=0}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} Q = \lim_{t\to\infty} 25 + \lim_{t\to\infty} (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t\to\infty} Q = 25 + (Q_o - 25)\cancel{\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{rt}{100}}} = 0$$

- ✓ c) Quantidade sal: $\boxed{Q_L = 25\ [lb]}$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- Quantidade de sal limite Q_L para $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} Q = \lim_{t\to\infty} 25 + \lim_{t\to\infty} (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t\to\infty} Q = 25 + (Q_o - 25)\underbrace{\cancel{\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{rt}{100}}}}_{=0}$$

- c) Quantidade sal: $\boxed{Q_L = 25\ [lb]}$

- Valor do tempo T para $Q(t)$ a 2% de Q_L:

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} Q = \lim_{t\to\infty} 25 + \lim_{t\to\infty} (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t\to\infty} Q = 25 + (Q_o - 25)\cancel{\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{rt}{100}}} = 0$$

- ✓ c) Quantidade sal: $\boxed{Q_L = 25\ [lb]}$

- ✓ Valor do tempo T para $Q(t)$ a 2% de Q_L:

$r = 3\ gal/min,$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} Q = \lim_{t\to\infty} 25 + \lim_{t\to\infty} (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t\to\infty} Q = 25 + (Q_o - 25)\cancelto{0}{\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{rt}{100}}}$$

  - ✓ c) Quantidade sal: $\boxed{Q_L = 25\ [lb]}$

- ✓ Valor do tempo T para $Q(t)$ a 2% de Q_L:

$$r = 3\ gal/min, \quad Q_o = 2Q_L = 50\ lb,$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} Q = \lim_{t\to\infty} 25 + \lim_{t\to\infty} (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t\to\infty} Q = 25 + (Q_o - 25)\cancel{\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{rt}{100}}} = 0$$

- ✓ c) Quantidade sal: $\boxed{Q_L = 25\ [lb]}$

- ✓ Valor do tempo T para $Q(t)$ a 2% de Q_L:

$$r = 3\ gal/min, \quad Q_o = 2Q_L = 50\ lb, \quad Q = Q_L + 2\%Q_L$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- Quantidade de sal limite Q_L para $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} Q = \lim_{t\to\infty} 25 + \lim_{t\to\infty} (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t\to\infty} Q = 25 + (Q_o - 25)\cancel{\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{rt}{100}}} = 0$$

  - c) Quantidade sal: $\boxed{Q_L = 25\ [lb]}$

- Valor do tempo T para $Q(t)$ a 2% de Q_L:

$$r = 3\ gal/min, \quad Q_o = 2Q_L = 50\ lb, \quad Q = Q_L + 2\%Q_L$$

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$25 + 0,02 \times 25 = 25 + 25e^{-0,03T}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$\cancel{25} + 0,02 \times 25 = \cancel{25} + 25e^{-0,03T}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$\cancel{25} + 0,02 \times 25 = \cancel{25} + 25e^{-0,03T} \quad \Rightarrow \quad 0,02 = e^{-0,03T}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0{,}03T}$$

$$\cancel{25} + 0{,}02 \times 25 = \cancel{25} + 25e^{-0{,}03T} \quad \Rightarrow \quad 0{,}02 = e^{-0{,}03T}$$

$$ln0{,}02 = lne^{-0{,}03T}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$\cancel{25} + 0,02 \times 25 = \cancel{25} + 25e^{-0,03T} \quad \Rightarrow \quad 0,02 = e^{-0,03T}$$

$$ln0,02 = lne^{-0,03T} \quad \Rightarrow \quad ln0,02 = -0,03T\ lne$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$\cancel{25} + 0,02 \times 25 = \cancel{25} + 25e^{-0,03T} \quad \Rightarrow \quad 0,02 = e^{-0,03T}$$

$$ln0,02 = lne^{-0,03T} \quad \Rightarrow \quad ln0,02 = -0,03T\ lne$$

$$T = \frac{ln0,02}{-0,03} = \frac{-3,91}{-0,03} = 130,4$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\% Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100} Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$\cancel{25} + 0,02 \times 25 = \cancel{25} + 25e^{-0,03T} \quad \Rightarrow \quad 0,02 = e^{-0,03T}$$

$$ln0,02 = lne^{-0,03T} \quad \Rightarrow \quad ln0,02 = -0,03T\ lne$$

$$T = \frac{ln0,02}{-0,03} = \frac{-3,91}{-0,03} = 130,4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 130,4\ [min.]}$$

✓ d) tempo: 2% de Q_L

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45\ min$.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45\ min$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L.

$$Q = Q_L + 2\% Q_L$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- Fluxo de galões (r) para $t = 45\ min$.
- Considerando o nível de sal a 2% de Q_L.

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1{,}02Q_L$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45\ min$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L.

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1{,}02Q_L = 25{,}5\ lb$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45\,min$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L.

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1{,}02Q_L = 25{,}5\,lb$$

$$t = 45\,min, \qquad Q_o = 2Q_L = 50\,lb,$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45\,min$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L.

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1{,}02Q_L = 25{,}5\,lb$$

$$t = 45\,min, \qquad Q_o = 2Q_L = 50\,lb,$$

- ✓ Inserindo valores na solução particular.

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45\,min$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L.

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1{,}02Q_L = 25{,}5\,lb$$

$$t = 45\,min, \qquad Q_o = 2Q_L = 50\,lb,$$

- ✓ Inserindo valores na solução particular.

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad 25{,}5 = 25 + 25e^{-\frac{r45}{100}}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45\, min$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L.

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1{,}02Q_L = 25{,}5\, lb$$

$$t = 45\, min, \qquad Q_o = 2Q_L = 50\, lb,$$

- ✓ Inserindo valores na solução particular.

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad 25{,}5 = 25 + 25e^{-\frac{r45}{100}}$$

$$1{,}02 = 1 + 1e^{-0{,}45r}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45\,min$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L.

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1{,}02Q_L = 25{,}5\,lb$$

$$t = 45\,min, \qquad Q_o = 2Q_L = 50\,lb,$$

- ✓ Inserindo valores na solução particular.

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad 25{,}5 = 25 + 25e^{-\frac{r45}{100}}$$

$$1{,}02 = 1 + 1e^{-0{,}45r} \quad \Rightarrow \quad 0{,}02 = e^{-0{,}45r}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45\, min$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L.

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1{,}02Q_L = 25{,}5\, lb$$

$$t = 45\, min, \qquad Q_o = 2Q_L = 50\, lb,$$

- ✓ Inserindo valores na solução particular.

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad 25{,}5 = 25 + 25e^{-\frac{r45}{100}}$$

$$1{,}02 = 1 + 1e^{-0{,}45r} \quad \Rightarrow \quad 0{,}02 = e^{-0{,}45r}$$

$$ln0{,}02 = lne^{-0{,}45r}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45\, min$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L.

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1{,}02Q_L = 25{,}5\, lb$$

$$t = 45\, min, \qquad Q_o = 2Q_L = 50\, lb,$$

- ✓ Inserindo valores na solução particular.

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}} \Rightarrow 25{,}5 = 25 + 25e^{-\frac{r45}{100}}$$

$$1{,}02 = 1 + 1e^{-0{,}45r} \Rightarrow 0{,}02 = e^{-0{,}45r}$$

$$ln0{,}02 = lne^{-0{,}45r} \Rightarrow \boxed{r = 8{,}69\, [{}^{gal}/_{min}]}$$

✓ e) Galões p/ $t = 45\, min$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Considerando as taxas de fluxo como enunciadas e a concentração de sal no tanque uniforme.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Considerando as taxas de fluxo como enunciadas e a concentração de sal no tanque uniforme.
- ✓ A equação diferencial é uma descrição precisa do processo de fluxo.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Considerando as taxas de fluxo como enunciadas e a concentração de sal no tanque uniforme.
- ✓ A equação diferencial é uma descrição precisa do processo de fluxo.
- ✓ Modelos desse tipo são também utilizados em problemas envolvendo poluentes em um lago.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Considerando as taxas de fluxo como enunciadas e a concentração de sal no tanque uniforme.
- ✓ A equação diferencial é uma descrição precisa do processo de fluxo.
- ✓ Modelos desse tipo são também utilizados em problemas envolvendo poluentes em um lago.
- ✓ A variável incógnita (Q) varia no tempo.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Considerando as taxas de fluxo como enunciadas e a concentração de sal no tanque uniforme.
- ✓ A equação diferencial é uma descrição precisa do processo de fluxo.
- ✓ Modelos desse tipo são também utilizados em problemas envolvendo poluentes em um lago.
- ✓ A variável incógnita (Q) varia no tempo.
- ✓ O parâmetro (r) condição inicial (Q_o) são ajustados de acordo com aplicação a ser modelada.

Exercício

Exercício: Produtos químicos em uma lagoa.

Considere uma lagoa que contém, inicialmente, $10^7\ gal$ de água fresca. Água contendo um produto químico indesejável flui para a lagoa a uma taxa de 5.10^6 de gal/ano e a mistura sai da lagoa à mesma taxa. A concentração $\gamma(t)$ do produto químico na água que entra varia periodicamente com o tempo t de acordo com a expressão $\gamma(t) = 2 + sen(2t)\ g/gal$.

Exercício: Produtos químicos em uma lagoa.

Considere uma lagoa que contém, inicialmente, $10^7\ gal$ de água fresca. Água contendo um produto químico indesejável flui para a lagoa a uma taxa de 5.10^6 de gal/ano e a mistura sai da lagoa à mesma taxa. A concentração $\gamma(t)$ do produto químico na água que entra varia periodicamente com o tempo t de acordo com a expressão $\gamma(t) = 2 + sen(2t)\ g/gal$.

Pede-se

a) Construa um modelo matemático desse processo de fluxo.

b) Determine a quantidade $Q(t)$ de produto químico na lagoa em qualquer instante. Sugestão: transforme $q[t] = 10^6 Q[g]$.

c) Desenhe o gráfico da solução particular.

d) Descreva o efeito da concentração do produto químico na água da lagoa para $t = 0, t = 1, t = 10\ e\ t \to \infty$.

Para depois desta aula:

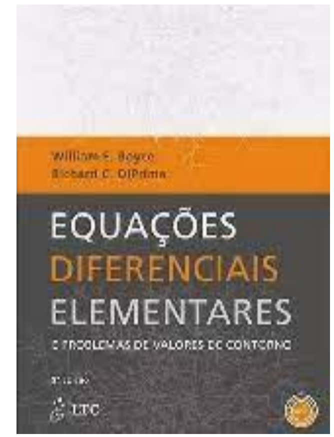
- Estudar seções 2.3 do livro texto (Boyce).
- Resolver o exercício proposto.
- Praticar: exercícios da seções 2.3 do Boyce.

Próxima aula:

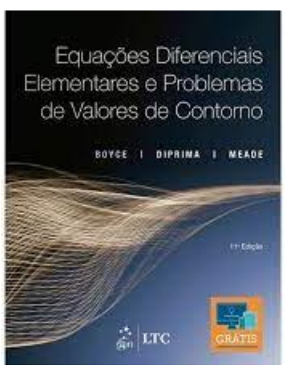
- Teoremas de existência e unicidade.
- Equações exatas e fator integrante.

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.



Numeração dos exercícios com base na 9ª ed.



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2020.