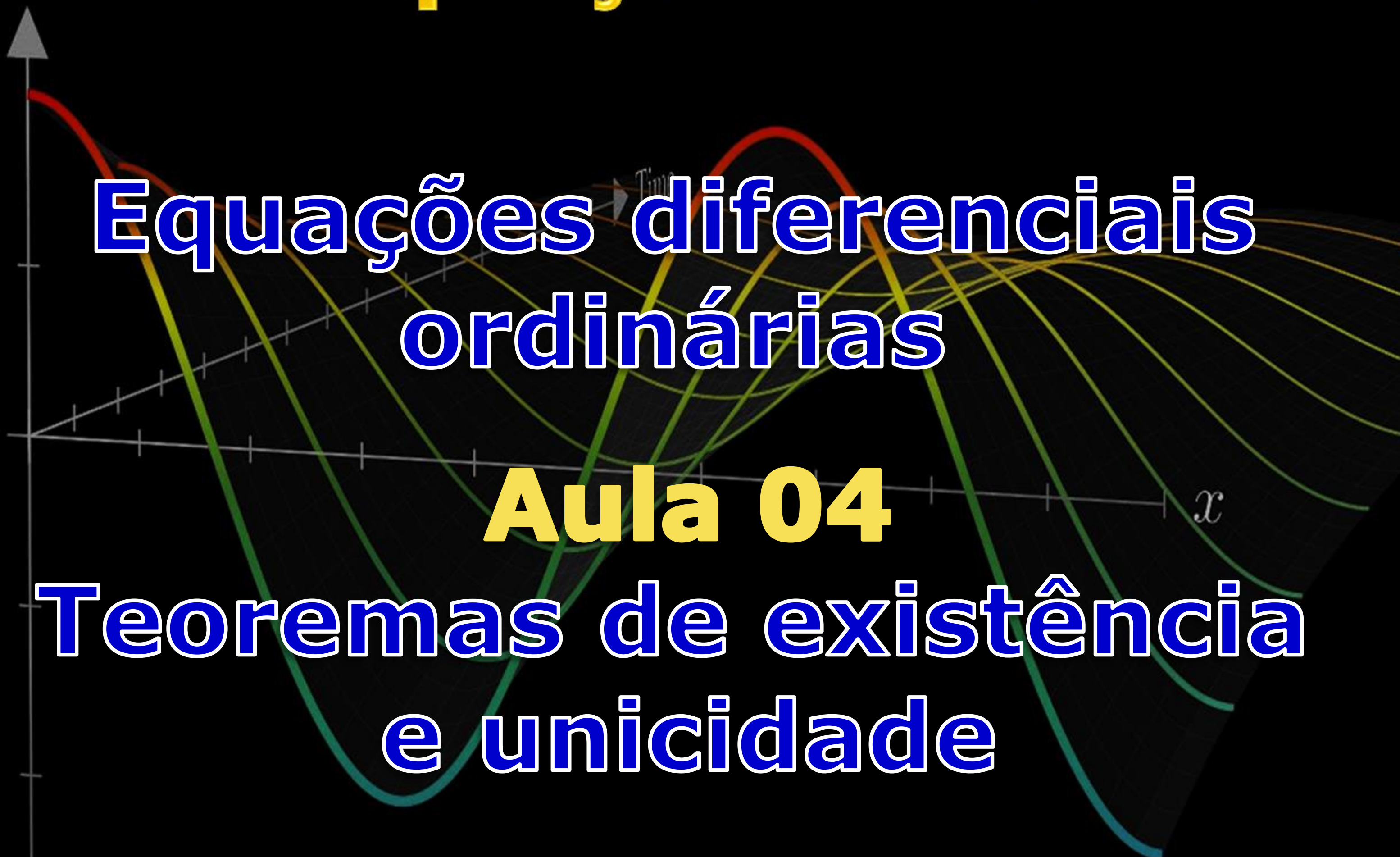
Equações diferenciais



Equações diferenciais ordinárias

Aula 04

Teoremas de existência e unicidade

Henrique Antonio Mendonça Faria

Henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Teoremas de existência e unicidade.
2. Exemplos.
3. Equações exatas.
4. Fator integrante nas equações exatas.

Pré-requisitos

- Diferenciação e Integração de funções.
- Derivadas parciais.
- Resolução de equações algébricas com logaritmo.

Teoremas de existência e unicidade

Teoremas de existência e unicidade

- Foram estudados até o momento os problemas de valor inicial com equações diferenciais de 1ª ordem.
- Foi visto que nem toda equação diferencial tem solução analítica.

Teoremas de existência e unicidade

- Foram estudados até o momento os problemas de valor inicial com equações diferenciais de 1ª ordem.
- Foi visto que nem toda equação diferencial tem solução analítica.
- Então, antes de resolver um PVI analiticamente, não seria interessante saber se existe solução?

Teoremas de existência e unicidade

- Foram estudados até o momento os problemas de valor inicial com equações diferenciais de 1ª ordem.
- Foi visto que nem toda equação diferencial tem solução analítica.
- Então, antes de resolver um PVI analiticamente, não seria interessante saber se existe solução?
- Além disso, verificar se a solução será única?

Teoremas de existência e unicidade

- Foram estudados até o momento os problemas de valor inicial com equações diferenciais de 1ª ordem.
- Foi visto que nem toda equação diferencial tem solução analítica.
- Então, antes de resolver um PVI analiticamente, não seria interessante saber se existe solução?
- Além disso, verificar se a solução será única?
- Os teoremas seguintes respondem estas duas perguntas.

Teorema 2.4.1 (Ref. Boyce 9ª ed.)

Se as funções p e g são contínuas em um intervalo aberto I, contendo o ponto $t = t_o$,

Então, existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação:

$$y' + p(t)y = g(t)$$

E a condição inicial $y(t_o) = y_o$ para cada t em I.

Teorema 2.4.1 (Ref. Boyce 9ª ed.)

Se as funções p e g são contínuas em um intervalo aberto I, contendo o ponto $t = t_o$,

Então, existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação:

$$y' + p(t)y = g(t)$$

E a condição inicial $y(t_o) = y_o$ para cada t em I.

O teorema diz que:

- *O PVI tem solução única se $p(t)$e $g(t)$ são contínuas.*

Teorema 2.4.1 (Ref. Boyce 9ª ed.)

Se as funções p e g são contínuas em um intervalo aberto I, contendo o ponto $t = t_o$,
Então, existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação:

$$y' + p(t)y = g(t)$$

E a condição inicial $y(t_o) = y_o$ para cada t em I.

O teorema diz que:

- *O PVI tem solução única se $p(t)$e $g(t)$ são contínuas.*
- *A solução existe em qualquer intervalo I, contendo a condição inicial e no qual $p(t)$e $g(t)$ são contínuas.*

Teorema 2.4.1 (Ref. Boyce 9ª ed.)

Se as funções p e g são contínuas em um intervalo aberto I, contendo o ponto $t = t_o$,
Então, existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação:

$$y' + p(t)y = g(t)$$

E a condição inicial $y(t_o) = y_o$ para cada t em I.

O teorema diz que:

- *O PVI tem solução única se $p(t)$e $g(t)$ são contínuas.*
- *A solução existe em qualquer intervalo I, contendo a condição inicial e no qual $p(t)$e $g(t)$ são contínuas.*
- *Poderá haver descontinuidade da solução nos pontos em que $p(t)$e $g(t)$ forem descontínuas.*

Teorema 2.4.2 (Eq. dif. não lineares)

Supondo que as funções f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sejam contínuas em um retângulo $\alpha < t < \beta$, $\gamma < y < \delta$ contendo o ponto (t_o, y_o),

Então, em algum intervalo $t_o - h < t < t_o + h$, contido em $\alpha < t < \beta$, existe solução única do PVI:

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_o) = y_o$$

Teorema 2.4.2 (Eq. dif. não lineares)

Supondo que as funções f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sejam contínuas em um retângulo $\alpha < t < \beta$, $\gamma < y < \delta$ contendo o ponto (t_o, y_o),
Então, em algum intervalo $t_o - h < t < t_o + h$, contido em $\alpha < t < \beta$, existe solução única do PVI:

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_o) = y_o$$

Consequências geométricas dos teoremas

Os gráficos de duas soluções não se cruzam.

Teorema 2.4.2 (Eq. dif. não lineares)

Supondo que as funções f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sejam contínuas em um retângulo $\alpha < t < \beta$, $\gamma < y < \delta$ contendo o ponto (t_o, y_o),

Então, em algum intervalo $t_o - h < t < t_o + h$, contido em $\alpha < t < \beta$, existe solução única do PVI:

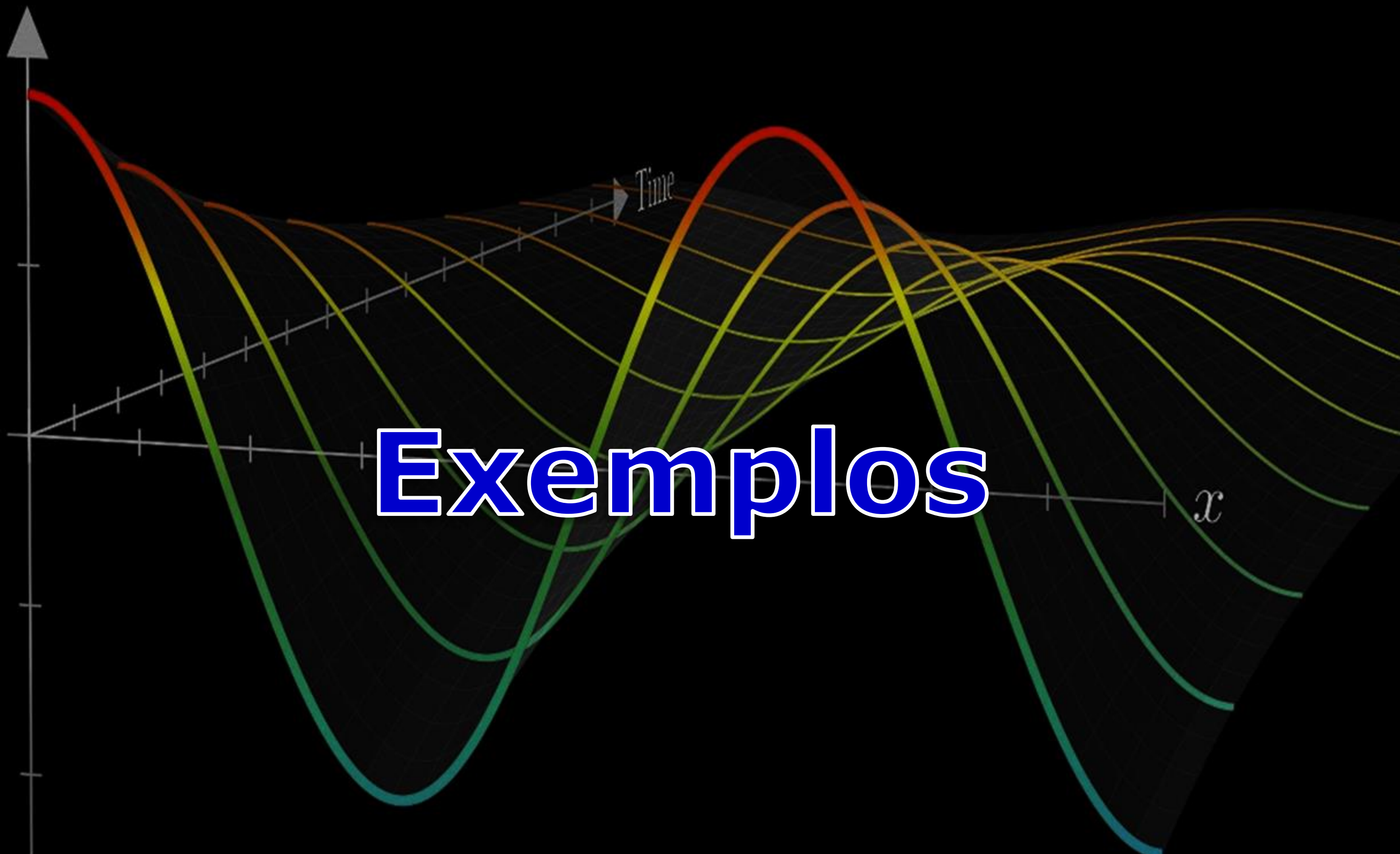
$$y' = f(t, y), \qquad y(t_o) = y_o$$

Consequências geométricas dos teoremas

Os gráficos de duas soluções não se cruzam.

Caso contrário, existiriam duas soluções satisfazendo a mesma condição inicial.

Exemplos



Exemplo 1: Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$ty' + 2y = 4t^2 \qquad y(1) = 2$$

Exemplo 1: Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$ty' + 2y = 4t^2 \qquad y(1) = 2$$

✓ Colocar a eq. dif. na forma padrão.

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t,$$

Exemplo 1: Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$ty' + 2y = 4t^2 \qquad y(1) = 2$$

- ✓ Colocar a eq. dif. na forma padrão.

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t, \qquad p(t) = \frac{2}{t} \quad e \quad g(t) = 4t$$

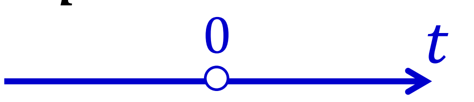
Exemplo 1: Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$ty' + 2y = 4t^2 \qquad y(1) = 2$$

✓ Colocar a eq. dif. na forma padrão.

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t, \qquad p(t) = \frac{2}{t} \quad e \quad g(t) = 4t$$

✓ A eq. dif. é linear, g é contínua em $\mathbb{R}$ e p é contínua para todo $t \neq 0$ $(t < 0 \;\; ou \; t > 0)$.



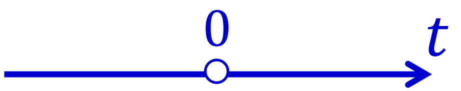
Exemplo 1: Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$ty' + 2y = 4t^2 \qquad y(1) = 2$$

- ✓ Colocar a eq. dif. na forma padrão.

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t, \qquad p(t) = \frac{2}{t} \quad e \quad g(t) = 4t$$

- ✓ A eq. dif. é linear, g é contínua em $\mathbb{R}$ e p é contínua para todo $t \neq 0$ $(t < 0 \;\; ou \; t > 0)$.



- ✓ O intervalo $t > 0$ contém a condição $y(1) = 2$

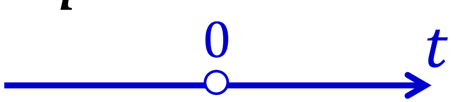
Exemplo 1: Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$ty' + 2y = 4t^2 \qquad y(1) = 2$$

- ✓ Colocar a eq. dif. na forma padrão.

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t, \qquad p(t) = \frac{2}{t} \quad e \quad g(t) = 4t$$

- ✓ A eq. dif. é linear, g é contínua em $\mathbb{R}$ e p é contínua para todo $t \neq 0 \;\; (t < 0 \;\; ou \; t > 0)$.



- ✓ O intervalo $t > 0$ contém a condição $y(1) = 2$
- ✓ Então, o Teorema 2.4.1 garante que o PVI tem uma única solução no intervalo $(0, +\infty)$ para t.

Exemplo 2: O PVI não linear tem solução única?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)} \qquad y(0) = -1$$

Exemplo 2: O PVI não linear tem solução única?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)} \qquad y(0) = -1$$

- ✓ A eq. dif. é não linear, então é válido o Teorema 2.4.2.

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}$$

Exemplo 2: O PVI não linear tem solução única?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)} \qquad y(0) = -1$$

- ✓ A eq. dif. é não linear, então é válido o Teorema 2.4.2.

$$f(x,y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)^2}$$

Exemplo 2: O PVI não linear tem solução única?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)} \qquad y(0) = -1$$

- ✓ A eq. dif. é não linear, então é válido o Teorema 2.4.2.

$$f(x,y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)^2}$$

- ✓ Para f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ a descontinuidade ocorre em $y = 1$.

Exemplo 2: O PVI não linear tem solução única?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)} \qquad y(0) = -1$$

- ✓ A eq. dif. é não linear, então é válido o Teorema 2.4.2.

$$f(x,y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)^2}$$

- ✓ Para f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ a descontinuidade ocorre em $y = 1$.
- ✓ O Teorema 2.4.2 garante que o PVI tem uma única solução em um intervalo em torno de $x_0 = 0$.

Exemplo 2: O PVI não linear tem solução única?

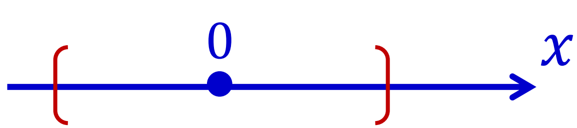
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)} \qquad y(0) = -1$$

✓ A eq. dif. é não linear, então é válido o Teorema 2.4.2.

$$f(x,y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)^2}$$

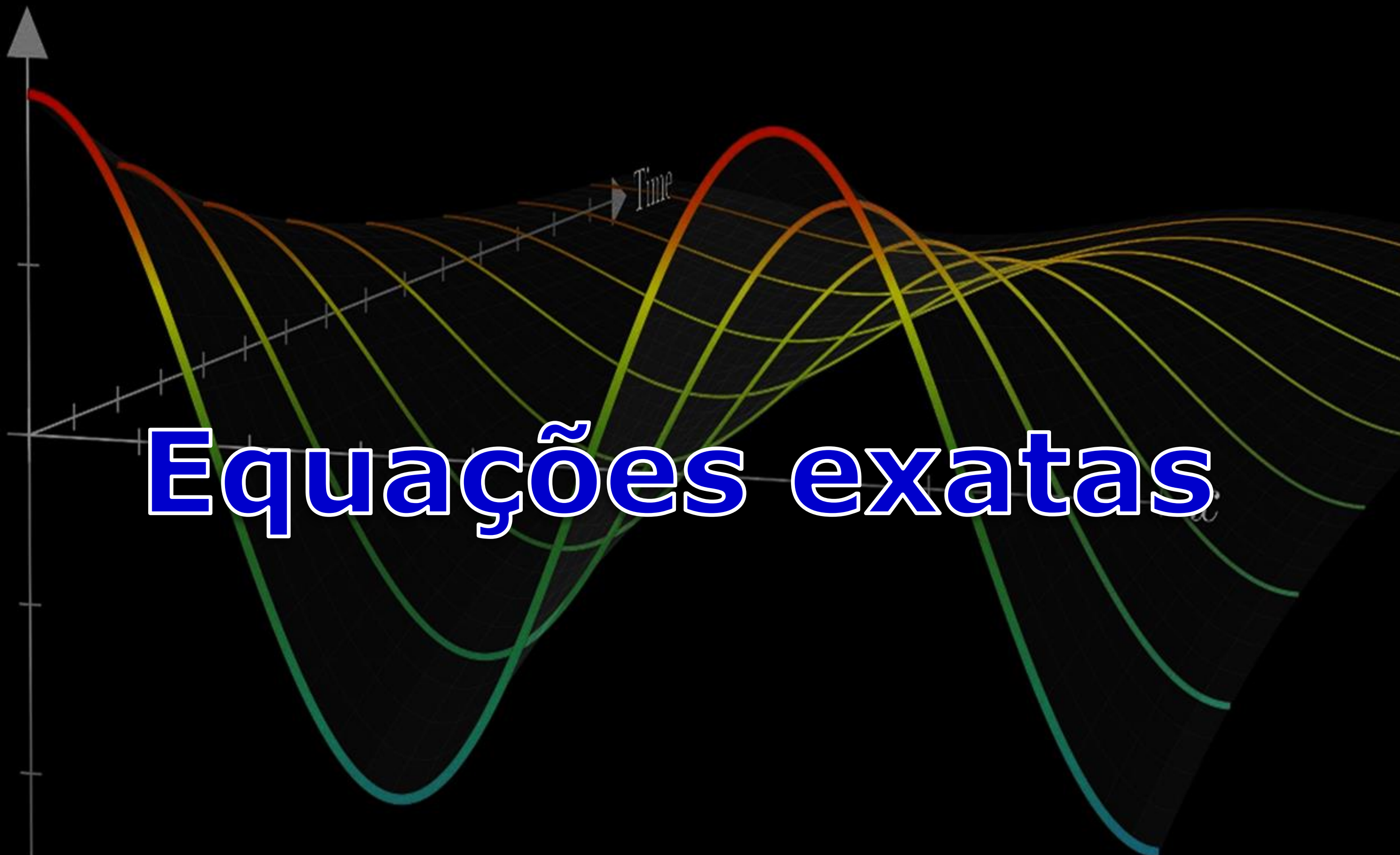
✓ Para f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ a descontinuidade ocorre em $y = 1$.

✓ O Teorema 2.4.2 garante que o PVI tem uma única solução em um intervalo em torno de $x_0 = 0$.



Solução do PVI

Equações exatas



Equações exatas

- As equações exatas são uma subclasse das eq. dif. de 1ª ordem.
- Existe um método bem definido para sua resolução.

Equações exatas

- As equações exatas são uma subclasse das eq. dif. de 1ª ordem.
- Existe um método bem definido para sua resolução.
- Inicialmente, é necessário determinar se a equação é exata.

Equações exatas

- As equações exatas são uma subclasse das eq. dif. de 1ª ordem.
- Existe um método bem definido para sua resolução.
- Inicialmente, é necessário determinar se a equação é exata.
- O teorema seguinte fornece as condições para a classificação de eq. dif. de 1ª ordem em exata.

Teorema 2.6.1 (Eq. dif. exatas)

Sejam as funções M, N, $\frac{\partial M}{\partial y}$ e $\frac{\partial N}{\partial x}$ contínuas em uma região retangular $\alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta$.

Teorema 2.6.1 (Eq. dif. exatas)

Sejam as funções M, N, $\frac{\partial M}{\partial y}$ e $\frac{\partial N}{\partial x}$ contínuas em uma região retangular $\alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta$.

A equação $\mathrm{M}(x, y) + \mathrm{N}(x, y)y' = 0$ (1)

É uma equação exata se, e somente se:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Teorema 2.6.1 (Eq. dif. exatas)

Sejam as funções M, N, $\frac{\partial M}{\partial y}$ e $\frac{\partial N}{\partial x}$ contínuas em uma região retangular $\alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta$.

A equação $\mathrm{M}(x, y) + \mathrm{N}(x, y)y' = 0$ (1)

É uma equação exata se, e somente se:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Isto é, existe uma função ψ tal que:

$$\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} = M(x, y) \text{ e } \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} = N(x, y)$$

Se, e somente se, M e N satisfazem a eq. dif. (1).

Exemplo 3: Resolver a eq. dif. exata.

$$(ycosx + 2xe^{y}) + (senx + x^{2}e^{y} - 1)y' = 0$$

Exemplo 3: Resolver a eq. dif. exata.

$$(ycosx + 2xe^y) + (senx + x^2e^y - 1)y' = 0$$

- ✓ Identificar das funções de duas variáveis M e N:

$$M(x, y) = (ycosx + 2xe^y),$$

Exemplo 3: Resolver a eq. dif. exata.

$$(ycosx + 2xe^{y}) + (senx + x^{2}e^{y} - 1)y' = 0$$

- ✓ Identificar das funções de duas variáveis M e N:

$$M(x,y) = (ycosx + 2xe^{y}), \quad N(x,y) = (senx + x^{2}e^{y} - 1)$$

Exemplo 3: Resolver a eq. dif. exata.

$$(ycosx + 2xe^y) + (senx + x^2e^y - 1)y' = 0$$

- ✓ Identificar das funções de duas variáveis M e N:

$$M(x,y) = (ycosx + 2xe^y), \quad N(x,y) = (senx + x^2e^y - 1)$$

- ✓ Calcular as derivadas:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = cosx + 2xe^y$$

Exemplo 3: Resolver a eq. dif. exata.

$$(ycosx + 2xe^y) + (senx + x^2e^y - 1)y' = 0$$

- Identificar das funções de duas variáveis M e N:

$$M(x,y) = (ycosx + 2xe^y), \quad N(x,y) = (senx + x^2e^y - 1)$$

- Calcular as derivadas:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = cosx + 2xe^y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = cosx + 2xe^y$$

Exemplo 3: Resolver a eq. dif. exata.

$$(ycosx + 2xe^y) + (senx + x^2e^y - 1)y' = 0$$

- ✓ Identificar das funções de duas variáveis M e N:

$$M(x,y) = (ycosx + 2xe^y), \quad N(x,y) = (senx + x^2e^y - 1)$$

- ✓ Calcular as derivadas:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = cosx + 2xe^y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = cosx + 2xe^y$$

- ✓ Como as derivadas parciais são iguais, haverá uma função ψ tal que :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y) = ycosx + 2xe^y \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x,y) = senx + x^2e^y - 1 \qquad (2)$$

Exemplo 3

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y) = y cos x + 2xe^{y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x,y) = sen x + x^{2}e^{y} - 1 \qquad (2)$$

- ✓ Integrar a eq. (1) em x:

Exemplo 3

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = M(x,y) = ycosx + 2xe^y \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = N(x,y) = senx + x^2e^y - 1 \qquad (2)$$

- ✓ Integrar a eq. (1) em x:

$$\int \frac{\partial\psi}{\partial x} dx = \int (ycosx + 2xe^y)\, dx$$

Exemplo 3

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = M(x,y) = ycosx + 2xe^y \quad (1)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = N(x,y) = senx + x^2e^y - 1 \quad (2)$$

✓ Integrar a eq. (1) em x:

$$\int \frac{\partial\psi}{\partial x} dx = \int (ycosx + 2xe^y)\, dx$$

$$\psi = ysenx + x^2e^y + g(y) \quad (3)$$

Exemplo 3

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = M(x,y) = ycosx + 2xe^y \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = N(x,y) = senx + x^2e^y - 1 \qquad (2)$$

- ✓ Integrar a eq. (1) em x:

$$\int \frac{\partial\psi}{\partial x} dx = \int (ycosx + 2xe^y)\, dx$$

$$\psi = ysenx + x^2e^y + g(y) \qquad (3)$$

- ✓ Derivar a eq. (3) em relação a y:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = senx + x^2e^y + g'(y) \qquad (4)$$

Exemplo 3

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = M(x,y) = ycosx + 2xe^y \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = N(x,y) = senx + x^2e^y - 1 \qquad (2)$$

- ✓ Integrar a eq. (1) em x:

$$\int \frac{\partial\psi}{\partial x} dx = \int (ycosx + 2xe^y)\, dx$$

$$\psi = ysenx + x^2e^y + g(y) \qquad (3)$$

- ✓ Derivar a eq. (3) em relação a y:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = senx + x^2e^y + g'(y) \qquad (4)$$

- ✓ Igualar eq. (4) com eq. (2):

$$senx + x^2e^y + g'(y) = senx + x^2e^y - 1$$

Exemplo 3

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y) = ycosx + 2xe^{y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x,y) = senx + x^2e^{y} - 1 \qquad (2)$$

- ✓ Integrar a eq. (1) em x:

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \int (ycosx + 2xe^{y})\, dx$$

$$\psi = ysenx + x^2e^{y} + g(y) \qquad (3)$$

- ✓ Derivar a eq. (3) em relação a y:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = senx + x^2e^{y} + g'(y) \qquad (4)$$

- ✓ Igualar eq. (4) com eq. (2):

$$senx + x^2e^{y} + g'(y) = senx + x^2e^{y} - 1$$

$$g'(y) = -1$$

Exemplo 3

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = M(x,y) = ycosx + 2xe^y \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = N(x,y) = senx + x^2e^y - 1 \qquad (2)$$

- ✓ Integrar a eq. (1) em x:

$$\int \frac{\partial\psi}{\partial x} dx = \int (ycosx + 2xe^y)\, dx$$

$$\psi = ysenx + x^2e^y + g(y) \qquad (3)$$

- ✓ Derivar a eq. (3) em relação a y:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = senx + x^2e^y + g'(y) \qquad (4)$$

- ✓ Igualar eq. (4) com eq. (2):

$$senx + x^2e^y + g'(y) = senx + x^2e^y - 1$$

$$g'(y) = -1 \qquad \Rightarrow \qquad g(y) = -y + C$$

Exemplo 3

$$\boxed{\psi = ysenx + x^2e^y + g(y) \quad (3)}$$

- ✓ Substituir $g(y) = -y + C$ na eq. (3)

Exemplo 3

$$\boxed{\psi = ysenx + x^2e^y + g(y) \quad (3)}$$

✓ Substituir $g(y) = -y + C$ na eq. (3)

$$\psi = ysenx + x^2e^y - y + C$$

Exemplo 3

$$\boxed{\psi = ysenx + x^2e^y + g(y) \quad (3)}$$

- Substituir $g(y) = -y + C$ na eq. (3)

$$\psi = ysenx + x^2e^y - y + C$$

- Conferência das derivadas parciais de ψ :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = ycosx + 2xe^y = M(x, y)$$

Exemplo 3

$$\boxed{\psi = ysenx + x^2e^y + g(y) \quad (3)}$$

- Substituir $g(y) = -y + C$ na eq. (3)

$$\psi = ysenx + x^2e^y - y + C$$

- Conferência das derivadas parciais de ψ :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = ycosx + 2xe^y = M(x,y)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = senx + x^2e^y - 1 = N(x,y)$$

Exemplo 3

$$\boxed{\psi = ysenx + x^2e^y + g(y) \quad (3)}$$

- ✓ Substituir $g(y) = -y + C$ na eq. (3)

$$\psi = ysenx + x^2e^y - y + C$$

- ✓ Conferência das derivadas parciais de ψ :

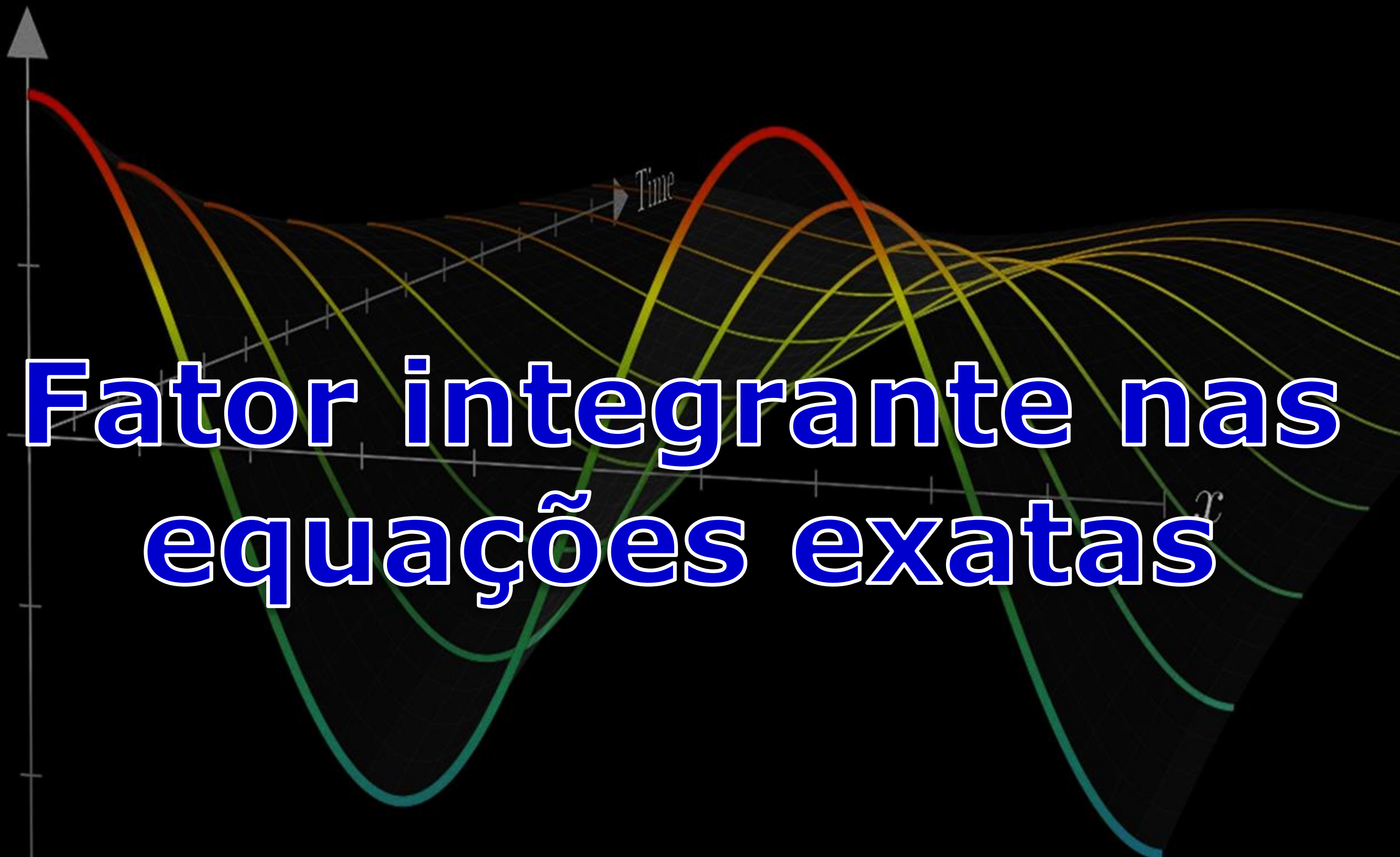
$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = ycosx + 2xe^y = M(x,y)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = senx + x^2e^y - 1 = N(x,y)$$

- ✓ Portanto, a solução geral para eq. dif. original é:

$$ysenx + x^2e^y - y = C \qquad C:\ constante$$

Fator integrante nas equações exatas



Fator integrante nas equações exatas

- Algumas equações apresentam a forma das equações exatas, mas não são exatas.
- Muitas vezes é possível convertê-las para equação exata, multiplicando-a por um fator integrante μ.

Fator integrante nas equações exatas

- Algumas equações apresentam a forma das equações exatas, mas não são exatas.
- Muitas vezes é possível convertê-las para equação exata, multiplicando-a por um fator integrante μ.

- Pelo Teorema 2.6.1 uma eq. é exata se, e só se:

$$\frac{\partial \mu M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \mu N(x,y)}{\partial x} \quad (1)$$

Fator integrante nas equações exatas

- Algumas equações apresentam a forma das equações exatas, mas não são exatas.
- Muitas vezes é possível convertê-las para equação exata, multiplicando-a por um fator integrante μ.
- Pelo Teorema 2.6.1 uma eq. é exata se, e só se:

$$\frac{\partial \mu M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \mu N(x,y)}{\partial x} \quad (1) \quad \text{com:} \quad \mu = \mu(x,y)$$

Fator integrante nas equações exatas

- Algumas equações apresentam a forma das equações exatas, mas não são exatas.
- Muitas vezes é possível convertê-las para equação exata, multiplicando-a por um fator integrante μ.

- Pelo Teorema 2.6.1 uma eq. é exata se, e só se:

$$\frac{\partial \mu M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \mu N(x,y)}{\partial x} \quad (1) \quad \text{com:} \quad \mu = \mu(x,y)$$

- Derivando pela regra do produto:

$$\frac{\mu \partial M}{\partial y} + \frac{M \partial \mu}{\partial y} = \frac{\mu \partial N}{\partial x} + \frac{N \partial \mu}{\partial x} \quad (2)$$

Fator integrante nas equações exatas

- Algumas equações apresentam a forma das equações exatas, mas não são exatas.
- Muitas vezes é possível convertê-las para equação exata, multiplicando-a por um fator integrante μ.
- Pelo Teorema 2.6.1 uma eq. é exata se, e só se:

$$\frac{\partial \mu M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \mu N(x,y)}{\partial x} \quad (1) \quad \text{com:} \quad \mu = \mu(x,y)$$

- Derivando pela regra do produto:

$$\frac{\mu \partial M}{\partial y} + \frac{M \partial \mu}{\partial y} = \frac{\mu \partial N}{\partial x} + \frac{N \partial \mu}{\partial x} \quad (2)$$

Esta eq. pode ser de resolução mais difícil do que a original.

Fator integrante nas equações exatas

- Nos casos mais simples o fator integrante μ depende de uma única variável, x ou y.

Fator integrante nas equações exatas

- Nos casos mais simples o fator integrante μ depende de uma única variável, x ou y.
- Supondo $\mu = \mu(x)$, a derivada parcial fica:

$$\frac{\partial \mu(x) M}{\partial y} = \frac{\partial \mu(x) N}{\partial x}$$

Fator integrante nas equações exatas

- Nos casos mais simples o fator integrante μ depende de uma única variável, x ou y.
- Supondo $\mu = \mu(x)$, a derivada parcial fica:

$$\frac{\partial\mu(x)M}{\partial y} = \frac{\partial\mu(x)N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu\partial M}{\partial y} = \frac{\mu\partial N}{\partial x} + \frac{Nd\mu}{dx}$$

Fator integrante nas equações exatas

- Nos casos mais simples o fator integrante μ depende de uma única variável, x ou y.
- Supondo $\mu = \mu(x)$, a derivada parcial fica:

$$\frac{\partial \mu(x) M}{\partial y} = \frac{\partial \mu(x) N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu \partial M}{\partial y} = \frac{\mu \partial N}{\partial x} + \frac{N d\mu}{dx}$$

$$\frac{N d\mu}{dx} = \frac{\mu \partial M}{\partial y} - \frac{\mu \partial N}{\partial x}$$

Fator integrante nas equações exatas

- Nos casos mais simples o fator integrante μ depende de uma única variável, x ou y.
- Supondo $\mu = \mu(x)$, a derivada parcial fica:

$$\frac{\partial \mu(x) M}{\partial y} = \frac{\partial \mu(x) N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu \partial M}{\partial y} = \frac{\mu \partial N}{\partial x} + \frac{N d\mu}{dx}$$

$$\frac{N d\mu}{dx} = \frac{\mu \partial M}{\partial y} - \frac{\mu \partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu\left({}^{\partial M}/_{\partial y} - {}^{\partial N}/_{\partial x}\right)}{N}} \qquad (3)$$

Fator integrante nas equações exatas

- Nos casos mais simples o fator integrante μ depende de uma única variável, x ou y.
- Supondo $\mu = \mu(x)$, a derivada parcial fica:

$$\frac{\partial\mu(x)M}{\partial y} = \frac{\partial\mu(x)N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu\partial M}{\partial y} = \frac{\mu\partial N}{\partial x} + \frac{Nd\mu}{dx}$$

$$\frac{Nd\mu}{dx} = \frac{\mu\partial M}{\partial y} - \frac{\mu\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu\left({}^{\partial M}/_{\partial y} - {}^{\partial N}/_{\partial x}\right)}{N}} \qquad (3)$$

- Se o lado direito da equação (3) só depende de x, então existe μ que também só dependerá de x.

Fator integrante nas equações exatas

- Nos casos mais simples o fator integrante μ depende de uma única variável, x ou y.
- Supondo $\mu = \mu(x)$, a derivada parcial fica:

$$\frac{\partial \mu(x) M}{\partial y} = \frac{\partial \mu(x) N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu \partial M}{\partial y} = \frac{\mu \partial N}{\partial x} + \frac{N d\mu}{dx}$$

$$\frac{N d\mu}{dx} = \frac{\mu \partial M}{\partial y} - \frac{\mu \partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu\left({}^{\partial M}/_{\partial y} - {}^{\partial N}/_{\partial x}\right)}{N}} \quad (3)$$

- Se o lado direito da equação (3) só depende de x, então existe μ que também só dependerá de x.
- Resolvendo a eq. (3) encontra-se $\mu = \mu(x)$.

Exemplo 4: Resolver a eq. dif. por fator integrante.

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \qquad \text{(a)}$$

Exemplo 4: Resolver a eq. dif. por fator integrante.

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \qquad \text{(a)}$$

- ✓ Verificar se é uma equação exata:

$$M(x,y) = (3xy + y^2), \qquad N(x,y) = (x^2 + xy)$$

Exemplo 4: Resolver a eq. dif. por fator integrante.

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \qquad \text{(a)}$$

✓ Verificar se é uma equação exata:

$$M(x,y) = (3xy + y^2), \qquad N(x,y) = (x^2 + xy)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y$$

Exemplo 4: Resolver a eq. dif. por fator integrante.

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \qquad \text{(a)}$$

- ✓ Verificar se é uma equação exata:

$$M(x, y) = (3xy + y^2), \qquad N(x, y) = (x^2 + xy)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + y$$

Exemplo 4: Resolver a eq. dif. por fator integrante.

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \qquad \text{(a)}$$

✓ Verificar se é uma equação exata:

$$M(x,y) = (3xy + y^2), \qquad N(x,y) = (x^2 + xy)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + y$$

Não é uma equação exata.

Exemplo 4: Resolver a eq. dif. por fator integrante.

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \qquad \text{(a)}$$

- ✓ Verificar se é uma equação exata:

$$M(x,y) = (3xy + y^2), \qquad N(x,y) = (x^2 + xy)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y \;\neq\; \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + y$$

Não é uma equação exata.

- ✓ Deve-se buscar um fator integrante.

Exemplo 4: Resolver a eq. dif. por fator integrante.

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \qquad \text{(a)}$$

- ✓ Verificar se é uma equação exata:

$$M(x,y) = (3xy + y^2), \qquad N(x,y) = (x^2 + xy)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + y$$

Não é uma equação exata.

- ✓ Deve-se buscar um fator integrante.
- ✓ Verificar a expressão da derivada de μ.

$$\frac{\left({}^{\partial M}/_{\partial y} - {}^{\partial N}/_{\partial x}\right)}{N}$$

Exemplo 4: Resolver a eq. dif. por fator integrante.

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \qquad \text{(a)}$$

- ✓ Verificar se é uma equação exata:

$$M(x,y) = (3xy + y^2), \qquad N(x,y) = (x^2 + xy)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + y$$

Não é uma equação exata.

- ✓ Deve-se buscar um fator integrante.
- ✓ Verificar a expressão da derivada de μ.

$$\frac{\left({}^{\partial M}/_{\partial y} - {}^{\partial N}/_{\partial x}\right)}{N} = \frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} =$$

Exemplo 4: Resolver a eq. dif. por fator integrante.

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \qquad \text{(a)}$$

- ✓ Verificar se é uma equação exata:

$$M(x,y) = (3xy + y^2), \qquad N(x,y) = (x^2 + xy)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + y$$

Não é uma equação exata.

- ✓ Deve-se buscar um fator integrante.
- ✓ Verificar a expressão da derivada de μ.

$$\frac{\left({}^{\partial M}/_{\partial y} - {}^{\partial N}/_{\partial x}\right)}{N} = \frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}$$

Só depende de x.

Exemplo 4:

$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$ (a)

- ✓ Então, existe um fator integrante $\mu = \mu(x)$ que satisfaz a equação:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\mu\left({}^{\partial M}/_{\partial y} - {}^{\partial N}/_{\partial x}\right)}{N}$$

Exemplo 4:

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \quad \text{(a)}$$

- ✓ Então, existe um fator integrante $\mu = \mu(x)$ que satisfaz a equação:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\mu\left({}^{\partial M}/_{\partial y} - {}^{\partial N}/_{\partial x}\right)}{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x}$$

Exemplo 4:

$$\boxed{(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \quad \text{(a)}}$$

- ✓ Então, existe um fator integrante $\mu = \mu(x)$ que satisfaz a equação:

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{\mu\left({}^{\partial M}/_{\partial y} - {}^{\partial N}/_{\partial x}\right)}{N} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x}$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{dx}{x}$$

Exemplo 4:

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \quad \text{(a)}$$

- ✓ Então, existe um fator integrante $\mu = \mu(x)$ que satisfaz a equação:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\mu\left({}^{\partial M}/_{\partial y} - {}^{\partial N}/_{\partial x}\right)}{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x}$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad ln\mu = lnx$$

Exemplo 4:

$$\boxed{(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \quad \text{(a)}}$$

- ✓ Então, existe um fator integrante $\mu = \mu(x)$ que satisfaz a equação:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\mu\left({}^{\partial M}/_{\partial y} - {}^{\partial N}/_{\partial x}\right)}{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x}$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad ln\mu = lnx \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = x$$

Exemplo 4:

$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$ (a)

- Então, existe um fator integrante $\mu = \mu(x)$ que satisfaz a equação:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\mu\left({}^{\partial M}/_{\partial y} - {}^{\partial N}/_{\partial x}\right)}{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x}$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad ln\mu = lnx \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = x$$

- Multiplicar a eq. dif. (a) pelo fator integrante:

$$x(3xy + y^2) + x(x^2 + xy)y' = 0$$

Exemplo 4:

$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$ (a)

- Então, existe um fator integrante $\mu = \mu(x)$ que satisfaz a equação:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\mu\left({}^{\partial M}/_{\partial y} - {}^{\partial N}/_{\partial x}\right)}{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x}$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad ln\mu = lnx \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = x$$

- Multiplicar a eq. dif. (a) pelo fator integrante:

$$x(3xy + y^2) + x(x^2 + xy)y' = 0$$

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0 \qquad \text{(b)}$$

Exemplo 4:

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0 \qquad \text{(b)}$$

- Encontrar a solução para equação (b):

$$M(x, y) = (3x^2y + xy^2) \qquad N(x, y) = (x^3 + x^2y)$$

Exemplo 4:

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0 \qquad \text{(b)}$$

- ✓ Encontrar a solução para equação (b):

$$M(x,y) = (3x^2y + xy^2) \qquad N(x,y) = (x^3 + x^2y)$$

- ✓ Verificar se é uma equação exata:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 2xy$$

Exemplo 4:

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0 \qquad \text{(b)}$$

- Encontrar a solução para equação (b):

$$M(x,y) = (3x^2y + xy^2) \qquad N(x,y) = (x^3 + x^2y)$$

- Verificar se é uma equação exata:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 2xy \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 2xy$$

Exemplo 4:

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0 \quad \text{(b)}$$

- Encontrar a solução para equação (b):

$$M(x,y) = (3x^2y + xy^2) \qquad N(x,y) = (x^3 + x^2y)$$

- Verificar se é uma equação exata:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 2xy = \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 2xy$$

É equação exata.

Exemplo 4:

$$\boxed{(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0 \quad \text{(b)}}$$

- ✓ Encontrar a solução para equação (b):

$$M(x,y) = (3x^2y + xy^2) \qquad N(x,y) = (x^3 + x^2y)$$

- ✓ Verificar se é uma equação exata:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 2xy = \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 2xy$$

É equação exata.

- ✓ Como as derivadas parciais são iguais, haverá uma função ψ tal que :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y) = 3x^2y + xy^2 \quad \text{(c)}$$

Exemplo 4:

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0 \qquad \text{(b)}$$

- Encontrar a solução para equação (b):

$$M(x,y) = (3x^2y + xy^2) \qquad N(x,y) = (x^3 + x^2y)$$

- Verificar se é uma equação exata:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 2xy = \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 2xy$$

É equação exata.

- Como as derivadas parciais são iguais, haverá uma função ψ tal que :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y) = 3x^2y + xy^2 \qquad \text{(c)}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x,y) = x^3 + x^2y \qquad \text{(d)}$$

Exemplo 4:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = M(x,y) = 3x^2y + xy^2 \quad \text{(c)}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y} = N(x,y) = x^3 + x^2y \quad \text{(d)}$$

- ✓ Integrar a eq. (c) em x:

Exemplo 4:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y) = 3x^2y + xy^2 \quad \text{(c)}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x,y) = x^3 + x^2y \quad \text{(d)}$$

- ✓ Integrar a eq. (c) em x:

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \int (3x^2y + xy^2)\, dx$$

Exemplo 4:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = M(x,y) = 3x^2y + xy^2 \quad \text{(c)}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = N(x,y) = x^3 + x^2y \quad \text{(d)}$$

- ✓ Integrar a eq. (c) em x:

$$\int \frac{\partial\psi}{\partial x} dx = \int (3x^2y + xy^2)\, dx$$

$$\psi = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + g(y) \quad \text{(e)}$$

Exemplo 4:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y) = 3x^2y + xy^2 \quad \text{(c)}$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x,y) = x^3 + x^2y \quad \text{(d)}$$

- ✓ Integrar a eq. (c) em x:

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \int (3x^2y + xy^2)\, dx$$

$$\psi = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + g(y) \qquad \text{(e)}$$

- ✓ Derivar (e) em relação a y:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = x^3 + x^2y + g'(y) \qquad \text{(f)}$$

Exemplo 4:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y) = 3x^2y + xy^2 \quad \text{(c)}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x,y) = x^3 + x^2y \quad \text{(d)}$$

- ✓ Integrar a eq. (c) em x:

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \int (3x^2y + xy^2)\, dx$$

$$\psi = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + g(y) \quad \text{(e)}$$

- ✓ Derivar (e) em relação a y:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = x^3 + x^2y + g'(y) \quad \text{(f)}$$

- ✓ Igualar (f) com (d):

$$x^3 + x^2y + g'(y) = x^3 + x^2y$$

Exemplo 4:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = M(x,y) = 3x^2y + xy^2 \quad \text{(c)}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = N(x,y) = x^3 + x^2y \quad \text{(d)}$$

- ✓ Integrar a eq. (c) em x:

$$\int \frac{\partial\psi}{\partial x} dx = \int (3x^2y + xy^2)\, dx$$

$$\psi = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + g(y) \qquad \text{(e)}$$

- ✓ Derivar (e) em relação a y:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = x^3 + x^2y + g'(y) \qquad \text{(f)}$$

- ✓ Igualar (f) com (d):

$$x^3 + x^2y + g'(y) = x^3 + x^2y$$

$$g'(y) = 0$$

Exemplo 4:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x, y) = 3x^2y + xy^2 \quad \text{(c)}$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x, y) = x^3 + x^2y \quad \text{(d)}$$

- ✓ Integrar a eq. (c) em x:

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \int (3x^2y + xy^2)\, dx$$

$$\psi = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + g(y) \quad \text{(e)}$$

- ✓ Derivar (e) em relação a y:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = x^3 + x^2y + g'(y) \quad \text{(f)}$$

- ✓ Igualar (f) com (d):

$$x^3 + x^2y + g'(y) = x^3 + x^2y$$

$$g'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(y) = C$$

Exemplo 4:

$$\psi = x^3 y + \frac{x^2 y^2}{2} + g(y) \quad \text{(e)}$$

- ✓ Substituir $g(y) = C$ na equação (e)

$$\psi = x^3 y + \frac{x^2 y^2}{2} + C$$

Exemplo 4:

$$\psi = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + g(y) \quad \text{(e)}$$

- ✓ Substituir $g(y) = C$ na equação (e)

$$\psi = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + C$$

- ✓ Conferência das derivadas parciais:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 3x^2y + xy^2 = M(x, y)$$

Exemplo 4:

$$\boxed{\psi = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + g(y) \qquad \text{(e)}}$$

- ✓ Substituir $g(y) = C$ na equação (e)

$$\psi = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + C$$

- ✓ Conferência das derivadas parciais:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 3x^2y + xy^2 = M(x,y) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = x^3 + x^2y = N(x,y)$$

Exemplo 4:

$$\psi = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + g(y) \quad \text{(e)}$$

- ✓ Substituir $g(y) = C$ na equação (e)

$$\psi = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + C$$

- ✓ Conferência das derivadas parciais:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 3x^2y + xy^2 = M(x,y) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = x^3 + x^2y = N(x,y)$$

- ✓ Portanto, a solução implícita da eq. dif. original é:

$$x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = C \qquad C\!: \ constante$$

Exemplo 4:

$$\boxed{\psi = x^3 y + \frac{x^2y^2}{2} + g(y) \quad \text{(e)}}$$

- Substituir $g(y) = C$ na equação (e)

$$\psi = x^3 y + \frac{x^2y^2}{2} + C$$

- Conferência das derivadas parciais:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 3x^2 y + xy^2 = M(x,y) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = x^3 + x^2 y = N(x,y)$$

- Portanto, a solução implícita da eq. dif. original é:

$$x^3 y + \frac{x^2y^2}{2} = C \qquad C: \textit{constante}$$

- Também pode ser resolvida explicitamente:

$$\left(\frac{x^2}{2}\right) y^2 + (x^3) y - C = 0$$

Exemplo 4:

$$\psi = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + g(y) \quad \text{(e)}$$

- ✓ Substituir $g(y) = C$ na equação (e)

$$\psi = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + C$$

- ✓ Conferência das derivadas parciais:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 3x^2y + xy^2 = M(x,y) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = x^3 + x^2y = N(x,y)$$

- ✓ Portanto, a solução implícita da eq. dif. original é:

$$x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = C \qquad C: constante$$

- ✓ Também pode ser resolvida explicitamente:

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)y^2 + (x^3)y - C = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -x \pm \sqrt{x^4 + 2x^{-2}C}$$

Para depois desta aula:

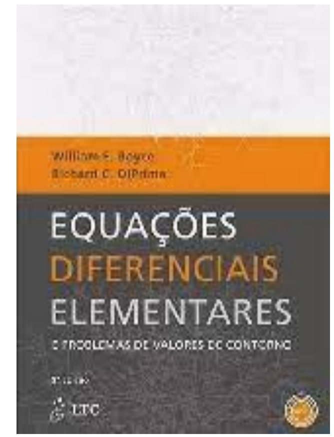
- Estudar seções 2.4 e 2.6 do livro texto (Boyce).
- Resolver o exercício proposto.
- Praticar: exercícios da seções 2.4 e 2.6 do Boyce.

Próxima aula:

- Equações diferenciais de 2ª ordem.

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.



Numeração dos exercícios com base na 9ª ed.

BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2020.