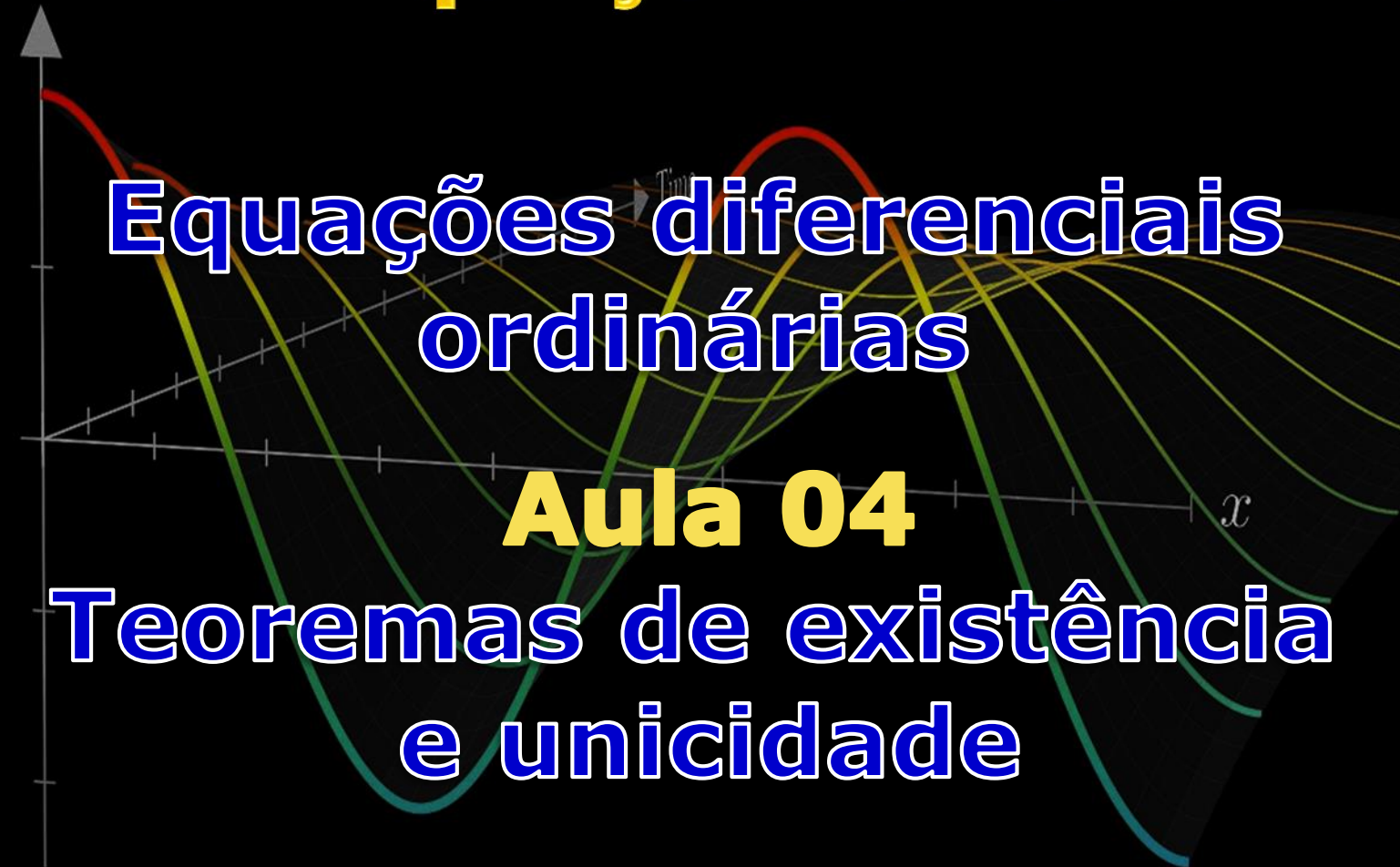


Equações diferenciais



Equações diferenciais ordinárias

Aula 04

Teoremas de existência e unicidade

Henrique Antonio Mendonça Faria

Henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Teoremas de existência e unicidade.
2. Exemplos.
3. Equações exatas.

Pré-requisitos

- Diferenciação e Integração de funções.
- Derivadas parciais.
- Resolução de equações algébricas com logaritmo.



Teoremas de existência e unicidade

Teoremas de existência e unicidade

- Foram estudados até o momento os problemas de valor inicial com equações diferenciais de 1ª ordem.
- Foi visto que nem toda equação diferencial tem solução analítica.

Teoremas de existência e unicidade

- Foram estudados até o momento os problemas de valor inicial com equações diferenciais de 1ª ordem.
- Foi visto que nem toda equação diferencial tem solução analítica.
- Então, antes de resolver um PVI analiticamente, não seria interessante saber se existe solução?

Teoremas de existência e unicidade

- Foram estudados até o momento os problemas de valor inicial com equações diferenciais de 1ª ordem.
- Foi visto que nem toda equação diferencial tem solução analítica.
- Então, antes de resolver um PVI analiticamente, não seria interessante saber se existe solução?
- Além disso, verificar se a solução será única?

Teoremas de existência e unicidade

- Foram estudados até o momento os problemas de valor inicial com equações diferenciais de 1ª ordem.
- Foi visto que nem toda equação diferencial tem solução analítica.
- Então, antes de resolver um PVI analiticamente, não seria interessante saber se existe solução?
- Além disso, verificar se a solução será única?
- Os teoremas seguintes respondem estas duas perguntas.

Teorema 2.4.1 (Ref. Boyce 9ª ed.)

Se as funções p e g são contínuas em um intervalo aberto I , contendo o ponto $t = t_o$,

Então, existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação:

$$y' + p(t)y = g(t)$$

E a condição inicial $y(t_o) = y_o$ para cada t em I .

Teorema 2.4.1 (Ref. Boyce 9ª ed.)

Se as funções p e g são contínuas em um intervalo aberto I , contendo o ponto $t = t_o$,

Então, existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação:

$$y' + p(t)y = g(t)$$

E a condição inicial $y(t_o) = y_o$ para cada t em I .

O teorema diz que:

➤ *O PVI tem solução única se $p(t)$ e $g(t)$ são contínuas.*

Teorema 2.4.1 (Ref. Boyce 9ª ed.)

Se as funções p e g são contínuas em um intervalo aberto I , contendo o ponto $t = t_o$,

Então, existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação:

$$y' + p(t)y = g(t)$$

E a condição inicial $y(t_o) = y_o$ para cada t em I .

O teorema diz que:

- *O PVI tem solução única se $p(t)$ e $g(t)$ são contínuas.*
- *A solução existe em qualquer intervalo I , contendo a condição inicial e no qual $p(t)$ e $g(t)$ são contínuas.*

Teorema 2.4.1 (Ref. Boyce 9ª ed.)

Se as funções p e g são contínuas em um intervalo aberto I , contendo o ponto $t = t_o$,

Então, existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação:

$$y' + p(t)y = g(t)$$

E a condição inicial $y(t_o) = y_o$ para cada t em I .

O teorema diz que:

- *O PVI tem solução única se $p(t)$ e $g(t)$ são contínuas.*
- *A solução existe em qualquer intervalo I , contendo a condição inicial e no qual $p(t)$ e $g(t)$ são contínuas.*
- *Poderá haver descontinuidade da solução nos pontos em que $p(t)$ e $g(t)$ forem descontínuas.*

Teorema 2.4.2 (Eq. dif. não lineares)

Supondo que as funções f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sejam contínuas em um retângulo $\alpha < t < \beta$, $\gamma < y < \delta$ contendo o ponto (t_o, y_o) ,

Então, em algum intervalo $t_o - h < t < t_o + h$, contido em $\alpha < t < \beta$, existe solução única do PVI:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_o) = y_o$$

Teorema 2.4.2 (Eq. dif. não lineares)

Supondo que as funções f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sejam contínuas em um retângulo $\alpha < t < \beta$, $\gamma < y < \delta$ contendo o ponto (t_o, y_o) ,

Então, em algum intervalo $t_o - h < t < t_o + h$, contido em $\alpha < t < \beta$, existe solução única do PVI:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_o) = y_o$$

Consequências geométricas dos teoremas

Os gráficos de duas soluções não se cruzam.

Teorema 2.4.2 (Eq. dif. não lineares)

Supondo que as funções f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sejam contínuas em um retângulo $\alpha < t < \beta$, $\gamma < y < \delta$ contendo o ponto (t_o, y_o) ,

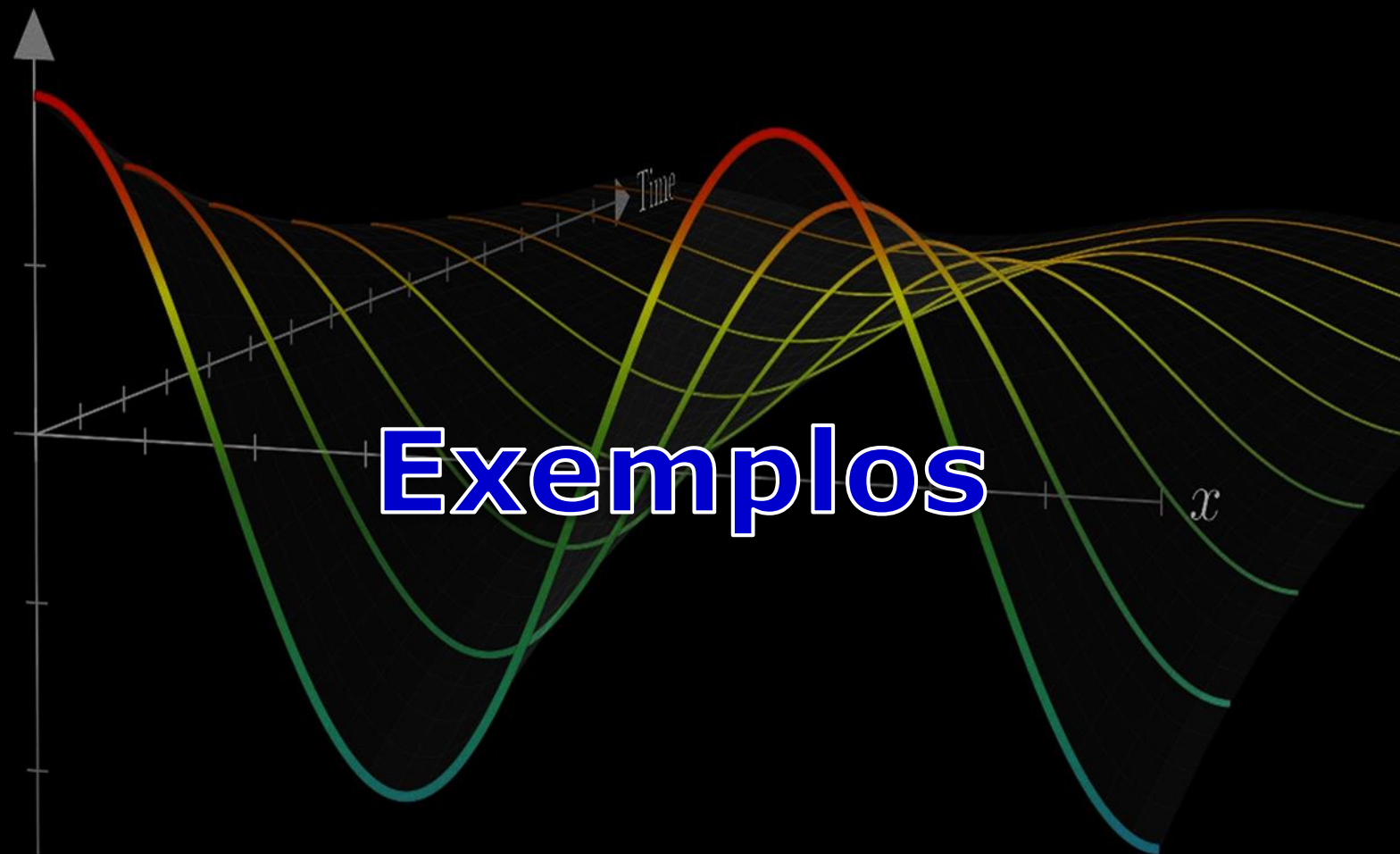
Então, em algum intervalo $t_o - h < t < t_o + h$, contido em $\alpha < t < \beta$, existe solução única do PVI:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_o) = y_o$$

Consequências geométricas dos teoremas

Os gráficos de duas soluções não se cruzam.

Caso contrário, existiriam duas soluções satisfazendo a mesma condição inicial.



Exemplo 1: Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$ty' + 2y = 4t^2 \quad y(1) = 2$$

Exemplo 1: Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$ty' + 2y = 4t^2 \quad y(1) = 2$$

✓ Colocar a eq. dif. na forma padrão.

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t,$$

Exemplo 1: Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$ty' + 2y = 4t^2 \quad y(1) = 2$$

✓ Colocar a eq. dif. na forma padrão.

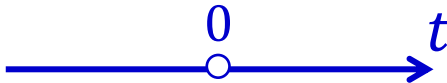
$$y' + \frac{2}{t}y = 4t, \quad p(t) = \frac{2}{t} \quad e \quad g(t) = 4t$$

Exemplo 1: Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$ty' + 2y = 4t^2 \quad y(1) = 2$$

✓ Colocar a eq. dif. na forma padrão.

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t, \quad p(t) = \frac{2}{t} \quad e \quad g(t) = 4t$$

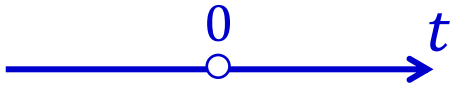
✓ A eq. dif. é linear, g é contínua em $\mathbb{R}$ e p é contínua para todo $t \neq 0$ ($t < 0$ ou $t > 0$). 

Exemplo 1: Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$ty' + 2y = 4t^2 \quad y(1) = 2$$

- ✓ Colocar a eq. dif. na forma padrão.

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t, \quad p(t) = \frac{2}{t} \quad e \quad g(t) = 4t$$

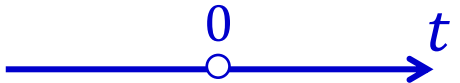
- ✓ A eq. dif. é linear, g é contínua em $\mathbb{R}$ e p é contínua para todo $t \neq 0$ ($t < 0$ ou $t > 0$). 
- ✓ O intervalo $t > 0$ contém a condição $y(1) = 2$

Exemplo 1: Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$ty' + 2y = 4t^2 \quad y(1) = 2$$

- ✓ Colocar a eq. dif. na forma padrão.

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t, \quad p(t) = \frac{2}{t} \quad e \quad g(t) = 4t$$

- ✓ A eq. dif. é linear, g é contínua em $\mathbb{R}$ e p é contínua para todo $t \neq 0$ ($t < 0$ ou $t > 0$). 
- ✓ O intervalo $t > 0$ contém a condição $y(1) = 2$
- ✓ Então, o Teorema 2.4.1 garante que o PVI tem uma única solução no intervalo $(0, +\infty)$ para t .

Exemplo 2: O PVI não linear tem solução única?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)} \quad y(0) = -1$$

Exemplo 2: O PVI não linear tem solução única?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)} \quad y(0) = -1$$

✓ A eq. dif. é não linear, então é válido o Teorema 2.4.2.

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}$$

Exemplo 2: O PVI não linear tem solução única?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)} \quad y(0) = -1$$

✓ A eq. dif. é não linear, então é válido o Teorema 2.4.2.

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)^2}$$

Exemplo 2: O PVI não linear tem solução única?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)} \quad y(0) = -1$$

✓ A eq. dif. é não linear, então é válido o Teorema 2.4.2.

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)^2}$$

✓ Para f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ a descontinuidade ocorre em $y = 1$.

Exemplo 2: O PVI não linear tem solução única?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)} \quad y(0) = -1$$

✓ A eq. dif. é não linear, então é válido o Teorema 2.4.2.

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)^2}$$

✓ Para f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ a descontinuidade ocorre em $y = 1$.

✓ O Teorema 2.4.2 garante que o PVI tem uma única solução em um intervalo em torno de $x_0 = 0$.

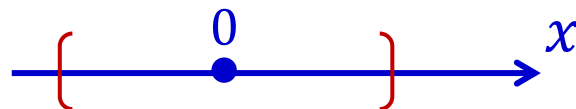
Exemplo 2: O PVI não linear tem solução única?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)} \quad y(0) = -1$$

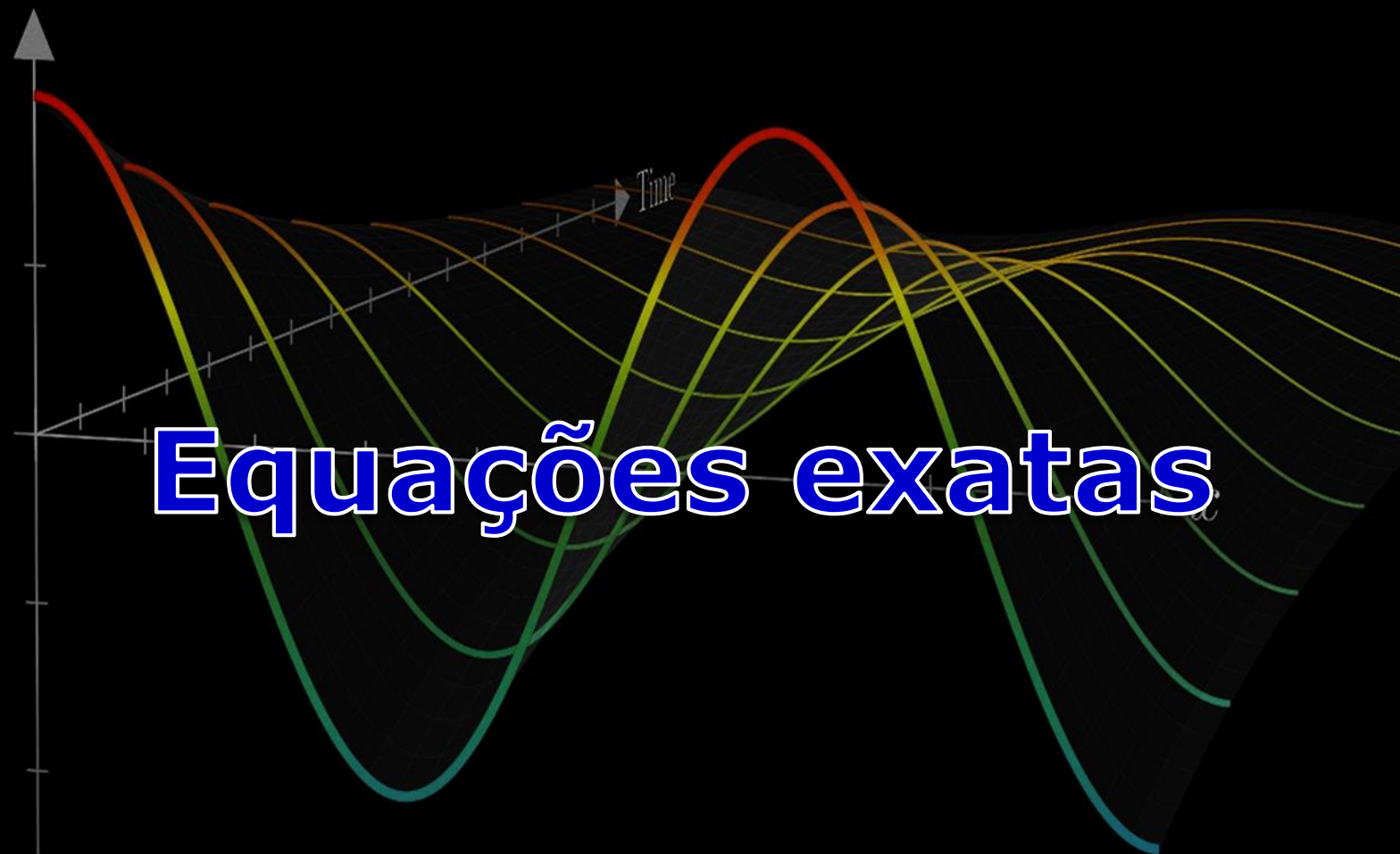
- ✓ A eq. dif. é não linear, então é válido o Teorema 2.4.2.

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)^2}$$

- ✓ Para f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ a descontinuidade ocorre em $y = 1$.
- ✓ O Teorema 2.4.2 garante que o PVI tem uma única solução em um intervalo em torno de $x_0 = 0$.



Solução do PVI



Equações exatas

Equações exatas

- As equações exatas são uma subclasse das eq. dif. de 1ª ordem.
- Existe um método bem definido para sua resolução.

Equações exatas

- As equações exatas são uma subclasse das eq. dif. de 1ª ordem.
- Existe um método bem definido para sua resolução.
- Inicialmente, é necessário determinar se a equação é exata.

Equações exatas

- As equações exatas são uma subclasse das eq. dif. de 1ª ordem.
- Existe um método bem definido para sua resolução.
- Inicialmente, é necessário determinar se a equação é exata.
- O teorema seguinte fornece as condições para a classificação de eq. dif. de 1ª ordem em exata.

Teorema 2.6.1 (Eq. dif. exatas)

Sejam as funções M , N , $\frac{\partial M}{\partial y}$ e $\frac{\partial N}{\partial x}$ contínuas em uma região retangular $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$.

Teorema 2.6.1 (Eq. dif. exatas)

Sejam as funções M , N , $\frac{\partial M}{\partial y}$ e $\frac{\partial N}{\partial x}$ contínuas em uma região retangular $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$.

A equação $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ (1)

É uma equação exata se, e somente se:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Teorema 2.6.1 (Eq. dif. exatas)

Sejam as funções M , N , $\frac{\partial M}{\partial y}$ e $\frac{\partial N}{\partial x}$ contínuas em uma região retangular $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$.

A equação $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ (1)

É uma equação exata se, e somente se:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Isto é, existe uma função ψ tal que:

$$\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

Se, e somente se, M e N satisfazem a eq. dif. (1).

Exemplo 3: Resolver a eq. dif. exata.

$$(y\cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y - 1)y' = 0$$

Exemplo 3: Resolver a eq. dif. exata.

$$(y\cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y - 1)y' = 0$$

✓ Identificar as funções de duas variáveis M e N :

$$M(x, y) = (y\cos x + 2xe^y),$$

Exemplo 3: Resolver a eq. dif. exata.

$$(y\cos x + 2xe^y) + (\sen x + x^2e^y - 1)y' = 0$$

✓ Identificar as funções de duas variáveis M e N :

$$M(x, y) = (y\cos x + 2xe^y), \quad N(x, y) = (\sen x + x^2e^y - 1)$$

Exemplo 3: Resolver a eq. dif. exata.

$$(y\cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y - 1)y' = 0$$

✓ Identificar as funções de duas variáveis M e N :

$$M(x, y) = (y\cos x + 2xe^y), \quad N(x, y) = (\sin x + x^2e^y - 1)$$

✓ Calcular as derivadas:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x + 2xe^y$$

Exemplo 3: Resolver a eq. dif. exata.

$$(y\cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y - 1)y' = 0$$

✓ Identificar as funções de duas variáveis M e N :

$$M(x, y) = (y\cos x + 2xe^y), \quad N(x, y) = (\sin x + x^2e^y - 1)$$

✓ Calcular as derivadas:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x + 2xe^y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \cos x + 2xe^y$$

Exemplo 3: Resolver a eq. dif. exata.

$$(y\cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y - 1)y' = 0$$

✓ Identificar as funções de duas variáveis M e N :

$$M(x, y) = (y\cos x + 2xe^y), \quad N(x, y) = (\sin x + x^2e^y - 1)$$

✓ Calcular as derivadas:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x + 2xe^y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \cos x + 2xe^y$$

✓ Como as derivadas parciais são iguais, haverá uma função ψ tal que :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x, y) = y\cos x + 2xe^y \quad (1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x, y) = \sin x + x^2e^y - 1 \quad (2)$$

Exemplo 3

✓ Integrar a eq. (1) em x :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = M(x, y) = y \cos x + 2xe^y \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = N(x, y) = \sin x + x^2 e^y - 1 \quad (2)$$

Exemplo 3

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x, y) = y \cos x + 2xe^y \quad (1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x, y) = \sin x + x^2 e^y - 1 \quad (2)$$

✓ Integrar a eq. (1) em x :

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \int (y \cos x + 2xe^y) dx$$

Exemplo 3

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x, y) = y \cos x + 2xe^y \quad (1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x, y) = \sin x + x^2 e^y - 1 \quad (2)$$

✓ Integrar a eq. (1) em x :

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \int (y \cos x + 2xe^y) dx$$

$$\psi = y \sin x + x^2 e^y + g(y) \quad (3)$$

Exemplo 3

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x, y) = y \cos x + 2xe^y \quad (1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x, y) = \operatorname{sen} x + x^2 e^y - 1 \quad (2)$$

✓ Integrar a eq. (1) em x :

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \int (y \cos x + 2xe^y) dx$$

$$\psi = y \operatorname{sen} x + x^2 e^y + g(y) \quad (3)$$

✓ Derivar a eq. (3) em relação a y :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \operatorname{sen} x + x^2 e^y + g'(y) \quad (4)$$

Exemplo 3

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x, y) = y \cos x + 2xe^y \quad (1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x, y) = \operatorname{sen} x + x^2 e^y - 1 \quad (2)$$

- ✓ Integrar a eq. (1) em x :

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \int (y \cos x + 2xe^y) dx$$

$$\psi = y \operatorname{sen} x + x^2 e^y + g(y) \quad (3)$$

- ✓ Derivar a eq. (3) em relação a y :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \operatorname{sen} x + x^2 e^y + g'(y) \quad (4)$$

- ✓ Igualar eq. (4) com eq. (2):

$$\operatorname{sen} x + x^2 e^y + g'(y) = \operatorname{sen} x + x^2 e^y - 1$$

Exemplo 3

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x, y) = y \cos x + 2xe^y \quad (1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x, y) = \operatorname{sen} x + x^2 e^y - 1 \quad (2)$$

- ✓ Integrar a eq. (1) em x :

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \int (y \cos x + 2xe^y) dx$$

$$\psi = y \operatorname{sen} x + x^2 e^y + g(y) \quad (3)$$

- ✓ Derivar a eq. (3) em relação a y :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \operatorname{sen} x + x^2 e^y + g'(y) \quad (4)$$

- ✓ Igualar eq. (4) com eq. (2):

$$\operatorname{sen} x + x^2 e^y + g'(y) = \operatorname{sen} x + x^2 e^y - 1$$

$$g'(y) = -1$$

Exemplo 3

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x, y) = y \cos x + 2xe^y \quad (1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x, y) = \operatorname{sen} x + x^2 e^y - 1 \quad (2)$$

- ✓ Integrar a eq. (1) em x :

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \int (y \cos x + 2xe^y) dx$$

$$\psi = y \operatorname{sen} x + x^2 e^y + g(y) \quad (3)$$

- ✓ Derivar a eq. (3) em relação a y :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \operatorname{sen} x + x^2 e^y + g'(y) \quad (4)$$

- ✓ Igualar eq. (4) com eq. (2):

$$\operatorname{sen} x + x^2 e^y + g'(y) = \operatorname{sen} x + x^2 e^y - 1$$

$$g'(y) = -1 \quad \Rightarrow \quad g(y) = -y + C$$

Exemplo 3

$$\psi = y \sin x + x^2 e^y + g(y) \quad (3)$$

✓ Substituir $g(y) = -y + C$ na eq. (3)

Exemplo 3

$$\psi = y \operatorname{sen} x + x^2 e^y + g(y) \quad (3)$$

✓ Substituir $g(y) = -y + C$ na eq. (3)

$$\psi = y \operatorname{sen} x + x^2 e^y - y + C$$

Exemplo 3

$$\psi = y \operatorname{sen} x + x^2 e^y + g(y) \quad (3)$$

- ✓ Substituir $g(y) = -y + C$ na eq. (3)

$$\psi = y \operatorname{sen} x + x^2 e^y - y + C$$

- ✓ Conferência das derivadas parciais de ψ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = y \cos x + 2x e^y = M(x, y)$$

Exemplo 3

$$\psi = y \operatorname{sen} x + x^2 e^y + g(y) \quad (3)$$

- ✓ Substituir $g(y) = -y + C$ na eq. (3)

$$\psi = y \operatorname{sen} x + x^2 e^y - y + C$$

- ✓ Conferência das derivadas parciais de ψ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = y \cos x + 2x e^y = M(x, y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \operatorname{sen} x + x^2 e^y - 1 = N(x, y)$$

Exemplo 3

$$\psi = y \operatorname{sen} x + x^2 e^y + g(y) \quad (3)$$

- ✓ Substituir $g(y) = -y + C$ na eq. (3)

$$\psi = y \operatorname{sen} x + x^2 e^y - y + C$$

- ✓ Conferência das derivadas parciais de ψ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = y \cos x + 2x e^y = M(x, y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \operatorname{sen} x + x^2 e^y - 1 = N(x, y)$$

- ✓ Portanto, a solução geral para eq. dif. original é:

$$y \operatorname{sen} x + x^2 e^y - y = C$$

C : constante

Para depois desta aula:

- Estudar seções 2.4 e 2.6 do livro texto (Boyce).
- Resolver o exercício proposto.
- Praticar: exercícios da seções 2.4 e 2.6 do Boyce.

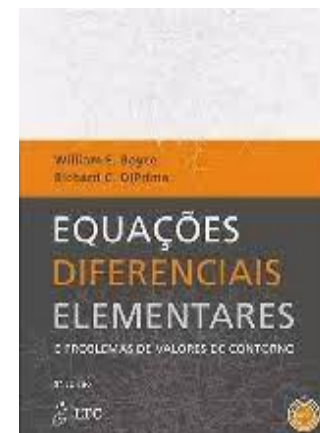
Próxima aula:

- Equações diferenciais de 2ª ordem.

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Numeração dos exercícios
com base na 9ª ed. ►



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2020.