Cálculo diferencial e integral

Sequências e séries infinitas

Aula 04
Teste da integral e da comparação

Henrique Antonio Mendonça Faria

Henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Teste da integral.
2. Teste da comparação.

Teste da integral

Teste da integral

- Em geral é difícil encontrar a soma exata de uma série.

Teste da integral

- Em geral é difícil encontrar a soma exata de uma série.

- Conseguimos fazer isso para as séries geométricas e a série telescópica $\sum 1/[n(n+1)]$.

Teste da integral

- Em geral é difícil encontrar a soma exata de uma série.
- Conseguimos fazer isso para as séries geométricas e a série telescópica $\sum 1/[n(n+1)]$.
- Nas próximas seções, desenvolveremos vários testes para determinar se uma série é convergente sem encontrar sua soma explicitamente.

Teste da integral

- Em geral é difícil encontrar a soma exata de uma série.
- Conseguimos fazer isso para as séries geométricas e a série telescópica $\sum 1/[n(n+1)]$.
- Nas próximas seções, desenvolveremos vários testes para determinar se uma série é convergente sem encontrar sua soma explicitamente.
- O primeiro teste envolve integrais impróprias.

Teste da integral

- Seja a série dos recíprocos dos quadrados inteiros.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

Teste da integral

- Seja a série dos recíprocos dos quadrados inteiros.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

- Avaliando numericamente as somas parciais, tabela 1, observa-se que essas somas se aproximam de 1,64 quando $n \to \infty$.

Teste da integral

- Seja a série dos recíprocos dos quadrados inteiros.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

- Avaliando numericamente as somas parciais, tabela 1, observa-se que essas somas se aproximam de 1,64 quando $n \to \infty$.

Tabela 1

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$
5	1,4636
10	1,5498
50	1,6251
100	1,6350
500	1,6429
1.000	1,6439
5.000	1,6447

Teste da integral

- Seja a série dos recíprocos dos quadrados inteiros.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

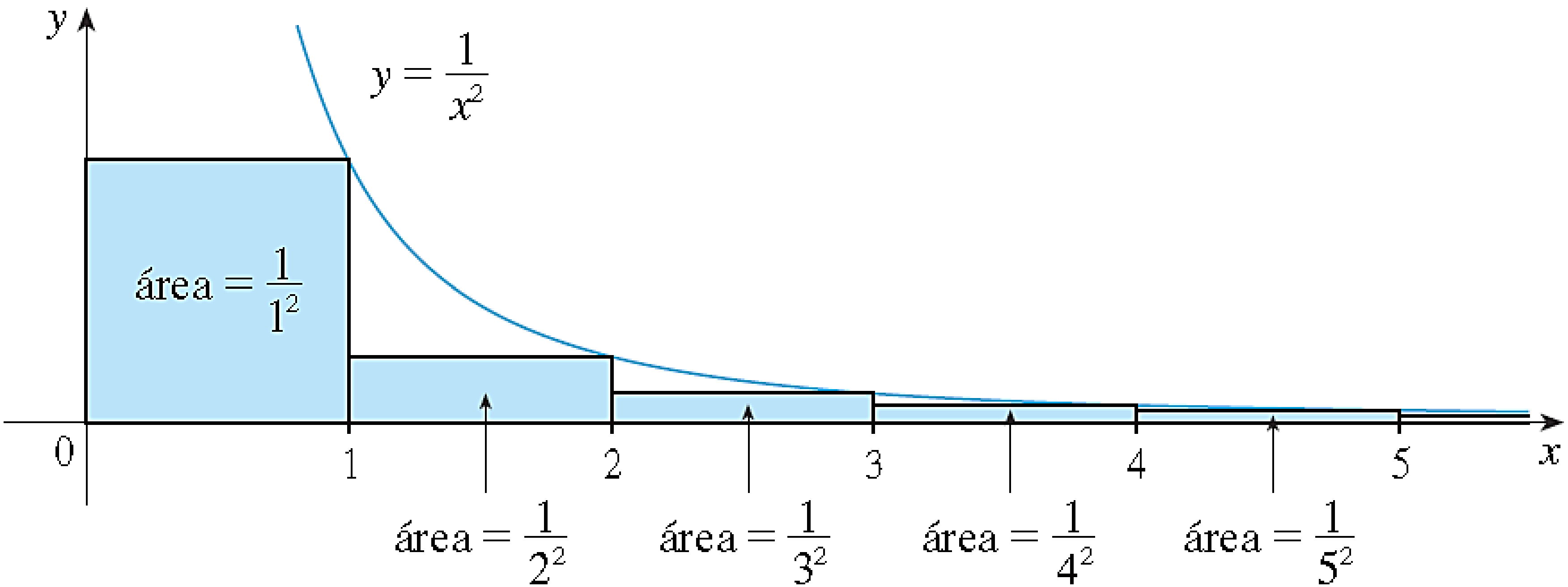
- Avaliando numericamente as somas parciais, tabela 1, observa-se que essas somas se aproximam de 1,64 quando $n \to \infty$.

- O argumento geométrico, a seguir confirma esse fato.

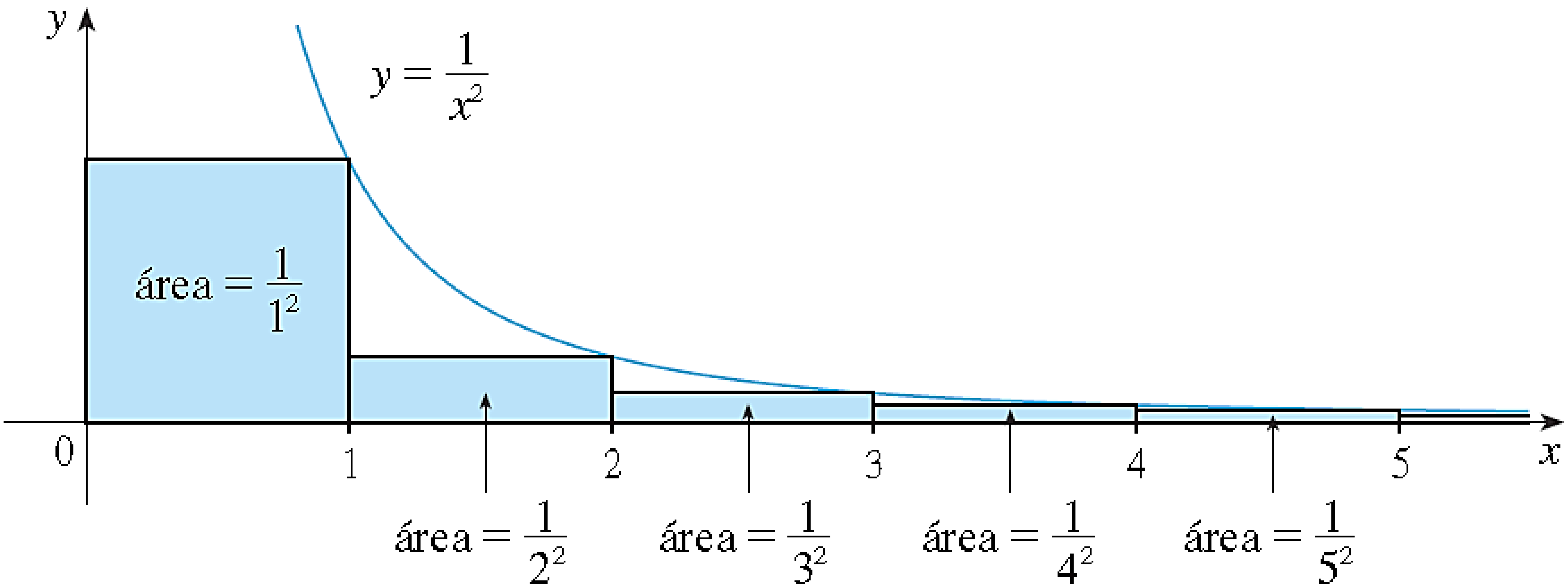
Tabela 1

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$
5	1,4636
10	1,5498
50	1,6251
100	1,6350
500	1,6429
1.000	1,6439
5.000	1,6447

Teste da integral



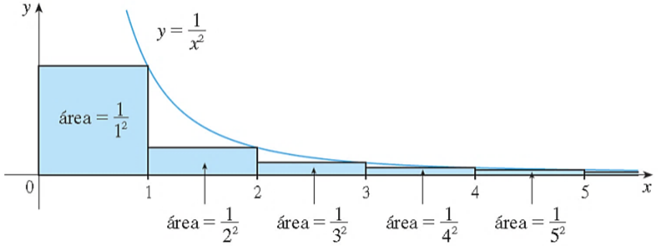
Teste da integral



- A soma das áreas dos retângulos é:

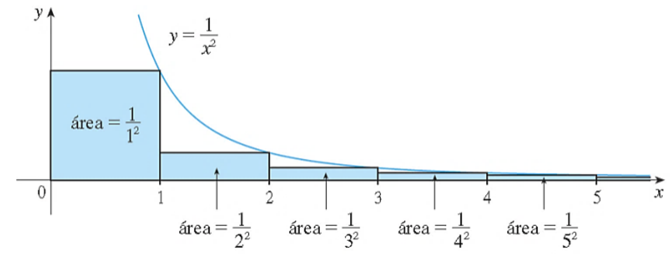
$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Teste da integral



- A partir de $x \geq 1$ a área sob a curva pode ser escrita por uma integral.

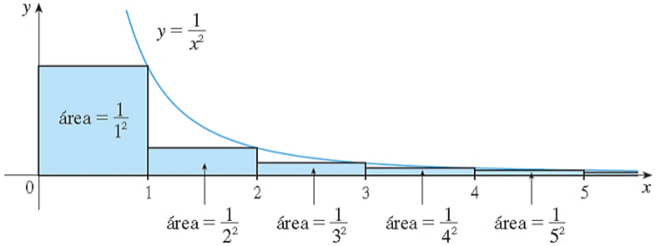
Teste da integral



- A partir de $x \geq 1$ a área sob a curva pode ser escrita por uma integral.
- Portanto, as somas parciais da série será menor do que 2:

$$\frac{1}{1^2} + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 2$$

Teste da integral

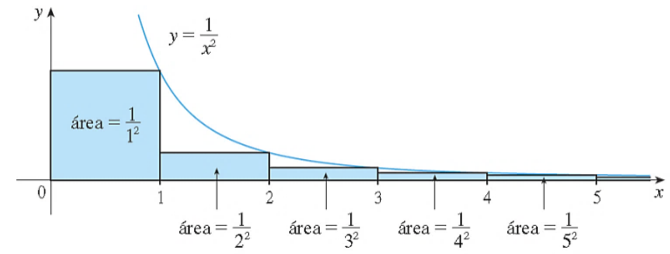


- A partir de $x \geq 1$ a área sob a curva pode ser escrita por uma integral.
- Portanto, as somas parciais da série será menor do que 2:

$$\frac{1}{1^2} + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 2$$

- As somas são crescentes e a sequência é limitada, então, pelo teorema da sequência monótona, a série converge.

Teste da integral



- A partir de $x \geq 1$ a área sob a curva pode ser escrita por uma integral.
- Portanto, as somas parciais da série será menor do que 2:

$$\frac{1}{1^2} + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 2$$

- As somas são crescentes e a sequência é limitada, então, pelo teorema da sequência monótona, a série converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots < 2$$

Soma exata: $\pi^2/6$ (Euler)

Teste da integral

Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$.

Teste da integral

Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$.

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ for convergente.

Teste da integral

Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$.

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ for convergente.

(i) Se $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ for convergente, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Teste da integral

Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$.

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ for convergente.

(i) Se $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ for convergente, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

(ii) Se $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ for divergente, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Teste da integral

Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$.

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ for convergente.

(i) Se $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ for convergente, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

(ii) Se $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ for divergente, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

A função $f(n)$ deve ser decrescente a partir do ponto de início da série.

Exemplo 1 A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ converge?

Exemplo 1 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ converge?

- ✓ A função em x de a_n é contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$. Então, é possível o teste da integral.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

Exemplo 1 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ converge?

- ✓ A função em x de a_n é contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$. Então, é possível o teste da integral.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

Exemplo 1 A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ converge?

- ✓ A função em x de a_n é contínua, positiva e decrescente em $[1,\infty)$. Então, é possível o teste da integral.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \operatorname{tg}^{-1} x \Big]_1^t$$

Exemplo 1 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ converge?

✓ A função em x de a_n é contínua, positiva e decrescente em $[1,\infty)$. Então, é possível o teste da integral.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \operatorname{tg}^{-1}x\Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\operatorname{tg}^{-1}t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Exemplo 1 A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ converge?

✓ A função em x de a_n é contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$. Então, é possível o teste da integral.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \operatorname{tg}^{-1}x\Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\operatorname{tg}^{-1}t - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Como a integral é convergente, pelo teste da integral a série também é convergente!

Série p

A série p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leqslant 1$.

Série p

A série p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leqslant 1$.

Demonstração $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$

Se $p < 0$, então $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = \infty$ e a série diverge

Série p

A série p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leqslant 1$.

Demonstração

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$$

Se $p < 0$, então $\lim_{n \to \infty} (1/n^p) = \infty$ e a série diverge

Se $p = 0$, então $\lim_{n \to \infty} (1/n^p) = 1$ e a série diverge

Série p

A série p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leqslant 1$.

Demonstração $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$

Se $p < 0$, então $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = \infty$ e a série diverge

Se $p = 0$, então $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = 1$ e a série diverge

Se $p > 0$, então a função $f(x) = 1/x^p$ é contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$.

Série p

A série p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leqslant 1$.

Demonstração $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$

Se $p < 0$, então $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = \infty$ e a série diverge

Se $p = 0$, então $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = 1$ e a série diverge

Se $p > 0$, então a função $f(x) = 1/x^p$ é contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$.

Portanto, a série p converge para $p > 1$.

Teste da comparação

Teste da comparação

- A ideia deste teste de convergência é comparar a série dada com alguma série conhecida.

Teste da comparação

- A ideia deste teste de convergência é comparar a série dada com alguma série conhecida.
  - Seja a série: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$

Teste da comparação

- A ideia deste teste de convergência é comparar a série dada com alguma série conhecida.
  - Seja a série: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$
  - Comparando com a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ geométrica cuja soma dos termos é 1:

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$$

Teste da comparação

- A ideia deste teste de convergência é comparar a série dada com alguma série conhecida.
  - Seja a série: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$
  - Comparando com a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ geométrica cuja soma dos termos é 1:

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} < 1}$$

Teste da comparação

- A ideia deste teste de convergência é comparar a série dada com alguma série conhecida.
  - Seja a série: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$
  - Comparando com a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ geométrica cuja soma dos termos é 1:

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} < 1}$$

  - Portanto, pelo teste da comparação a série dada é convergente.

Teste da comparação

Suponha que $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ sejam séries com termos positivos.

Teste da comparação

Suponha que $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ sejam séries com termos positivos.

(i) Se $\Sigma\, b_n$ for convergente e $a_n \leqslant b_n$ para todo n, então $\Sigma\, a_n$ também será convergente.

Teste da comparação

Suponha que $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ sejam séries com termos positivos.

(i) Se $\Sigma\, b_n$ for convergente e $a_n \leqslant b_n$ para todo n, então $\Sigma\, a_n$ também será convergente.

(ii) Se $\Sigma\, b_n$ for divergente e $a_n \geqslant b_n$ para todo n, então $\Sigma\, a_n$ também será divergente.

Exemplo 2 A série converge?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)}$$

Exemplo 2 A série converge?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)}$$ sejam: $$a_n = \frac{1}{(n-1)}, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

Exemplo 2 A série converge?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)} \qquad \text{sejam:} \quad a_n = \frac{1}{(n-1)}, \qquad b_n = \frac{1}{n}$$

- A série b_n é a série harmônica divergente.

Exemplo 2 A série converge?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)} \qquad \text{sejam:} \quad a_n = \frac{1}{(n-1)}, \qquad b_n = \frac{1}{n}$$

- A série b_n é a série harmônica divergente.

$$\frac{1}{(n-1)} \geq \frac{1}{n} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{a_n \geq b_n}$$

Exemplo 2 A série converge?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)} \qquad \text{sejam:} \quad a_n = \frac{1}{(n-1)}, \qquad b_n = \frac{1}{n}$$

- A série b_n é a série harmônica divergente.

$$\frac{1}{(n-1)} \geq \frac{1}{n} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{a_n \geq b_n}$$

- Como a série b_n é divergente e menor do que a_n, pelo critério (ii) a série a_n dada também diverge.

Exemplo 3 A série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

Exemplo 3 A série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \qquad \text{sejam:} \quad a_n = \frac{1}{2^n - 1}, \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

Exemplo 3 A série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \qquad \text{sejam:} \quad a_n = \frac{1}{2^n - 1}, \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

- A série b_n é a série geométrica convergente.

Exemplo 3 A série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \qquad \text{sejam:} \quad a_n = \frac{1}{2^n - 1}, \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

- A série b_n é a série geométrica convergente.

$$\frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$$

Exemplo 3 A série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \qquad \text{sejam:} \quad a_n = \frac{1}{2^n - 1}, \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

- A série b_n é a série geométrica convergente.

$$\frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$$

- O teste da comparação não é útil neste caso, pois $a_n > b_n$ e b_n é convergente. Não atende nenhum dos dois critérios da comparação.

Exemplo 3 A série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \qquad \text{sejam:} \quad a_n = \frac{1}{2^n - 1}, \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

- A série b_n é a série geométrica convergente.

$$\frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$$

- O teste da comparação não é útil neste caso, pois $a_n > b_n$ e b_n é convergente. Não atende nenhum dos dois critérios da comparação.

- É necessário utilizar outro teste de convergência.

Teste da comparação no limite

Suponha que $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ sejam séries com termos positivos.

Teste da comparação no limite

Suponha que $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ sejam séries com termos positivos.

Se $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c$ $\quad c$ é um número finito e $c > 0$

Teste da comparação no limite

Suponha que $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ sejam séries com termos positivos.

Se $\lim_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c$ $\quad$ c é um número finito e $c > 0$

então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

Exemplo 4 A série converge? Aplicar teste do limite.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

Exemplo 4 A série converge? Aplicar teste do limite.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \qquad \text{sejam:} \quad a_n = \frac{1}{2^n - 1}, \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Exemplo 4 A série converge? Aplicar teste do limite.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \qquad \text{sejam:} \quad a_n = \frac{1}{2^n - 1}, \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1}$$

Exemplo 4 A série converge? Aplicar teste do limite.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \qquad \text{sejam:} \quad a_n = \frac{1}{2^n - 1}, \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - 1/2^n}$$

Exemplo 4 A série converge? Aplicar teste do limite.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \qquad \text{sejam:} \quad a_n = \frac{1}{2^n - 1}, \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - 1/2^n} = 1 > 0$$

Exemplo 4 A série converge? Aplicar teste do limite.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \qquad \text{sejam:} \quad a_n = \frac{1}{2^n - 1}, \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - 1/2^n} = 1 > 0$$

- Como b_n é uma série geométrica convergente, em consequência, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ também é convergente.

Exercício

Exercício Utilize o teste da comparação no limite com a série harmônica $\sum \frac{1}{n}$ para verificar a convergência da série seguinte.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-7}{n^2+1}$$

Exercício Utilize o teste da comparação no limite com a série harmônica $\sum \frac{1}{n}$ para verificar a convergência da série seguinte.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-7}{n^2+1}$$

Resp.: $Diverge$

Para depois desta aula:

- Estudar seções 11.3 e 11.4 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar: exercícios Seção 11.3 e 11.4 do Stewart.

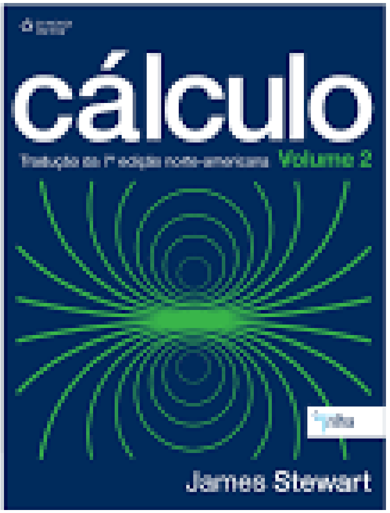
Próxima aula:

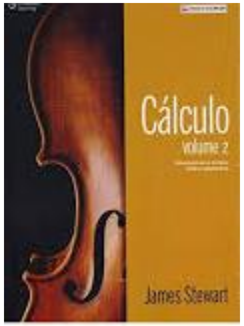
- Séries alternadas.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed. ▶





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.