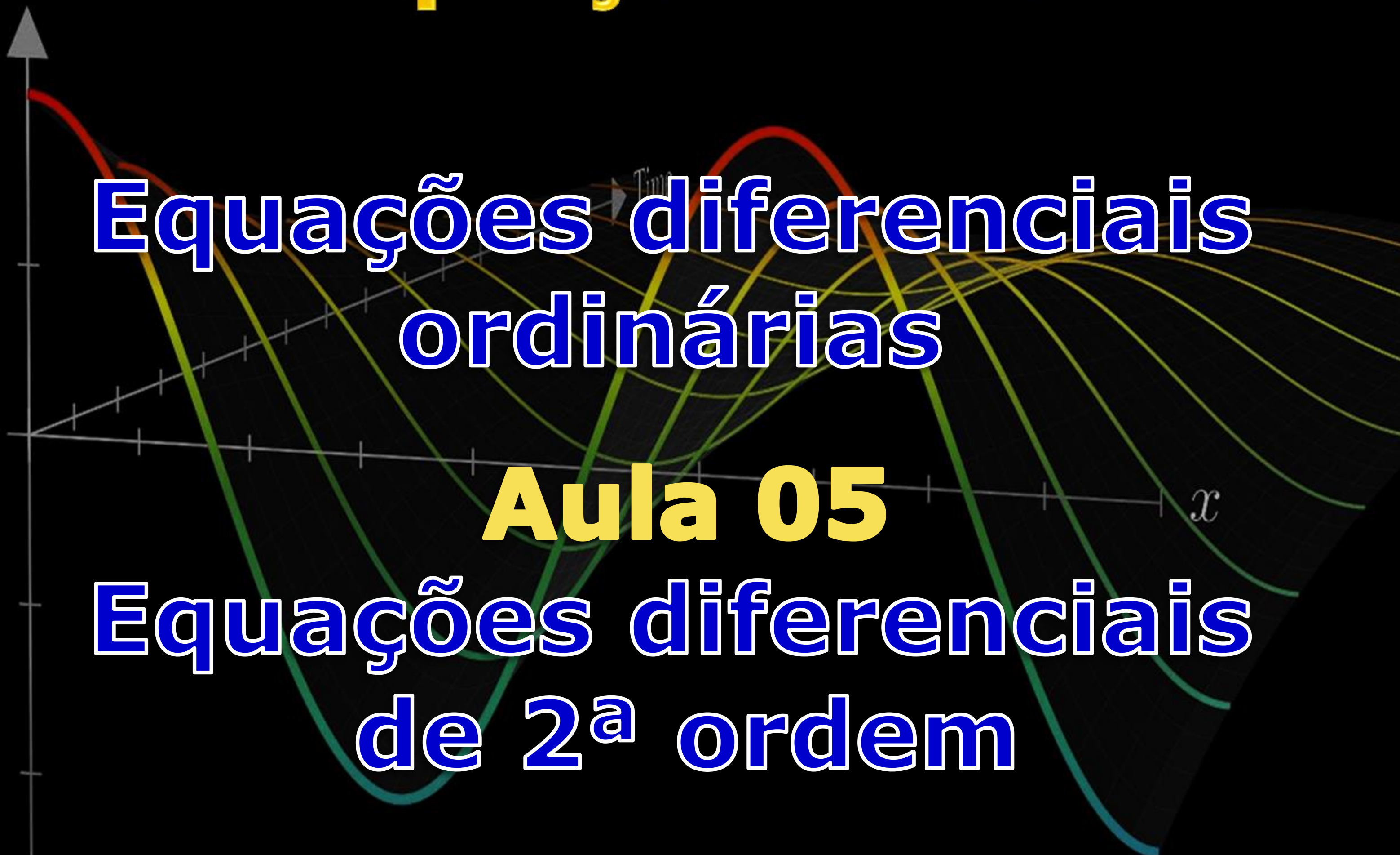
Equações diferenciais



Equações diferenciais ordinárias

Aula 05

Equações diferenciais de 2ª ordem

Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Introdução.
2. Equações homogêneas a coeficientes constantes.
3. Teorema de existência e unicidade.
4. Outros teoremas.

Pré-requisitos

- Equações algébricas do segundo grau.
- Operações com expoentes.

Introdução

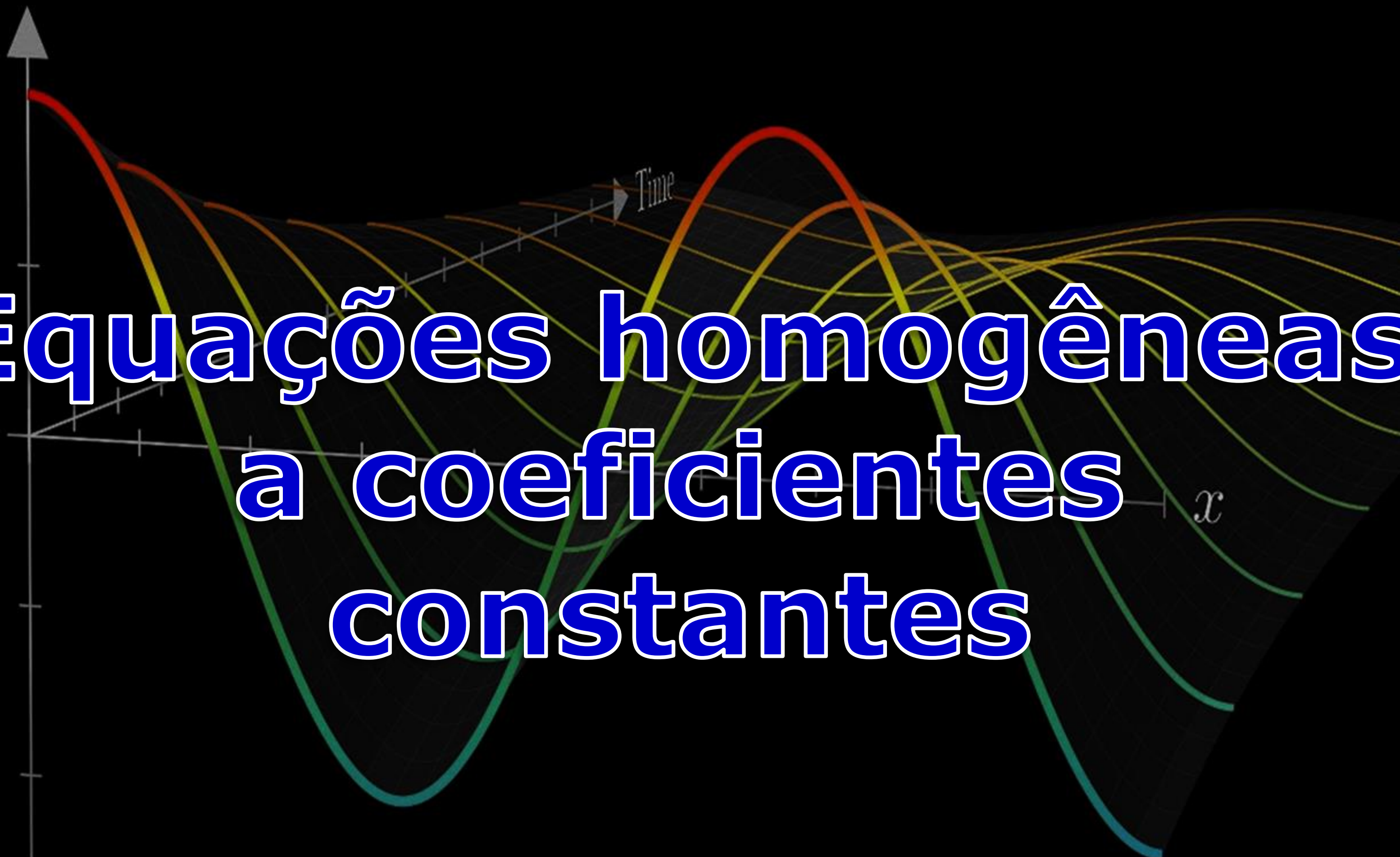
Introdução

- As eq. dif. de 2ª ordem possuem estrutura teórica rica relacionada com diversos aspectos sistemáticos de resolução de equações diferenciais.
- Grande parte desses métodos é compreensível no nível da matemática elementar.

Introdução

- As eq. dif. de 2ª ordem possuem estrutura teórica rica relacionada com diversos aspectos sistemáticos de resolução de equações diferenciais.
- Grande parte desses métodos é compreensível no nível da matemática elementar.
- As eq. dif. de 2ª ordem são essenciais para qualquer investigação preliminar em áreas como mecânica de fluidos, condução de calor, movimento oscilatório e fenômenos eletromagnéticos.

Equações homogêneas a coeficientes constantes



Equações homogêneas

- Uma eq. dif. de 2ª ordem tem a forma geral:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f(t, y, \frac{dy}{dt}) \qquad (1)$$

Equações homogêneas

- Uma eq. dif. de 2ª ordem tem a forma geral:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f(t, y, \frac{dy}{dt}) \qquad (1)$$

- Sendo t a variável independente e y a variável dependente.

Equações homogêneas

- Uma eq. dif. de 2ª ordem tem a forma geral:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f(t, y, \frac{dy}{dt}) \qquad (1)$$

- Sendo t a variável independente e y a variável dependente.
- A função f inclui essas duas variáveis e uma possível derivada de primeira ordem de y.

Equações homogêneas

- Uma eq. dif. de 2ª ordem tem a forma geral:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f(t, y, \frac{dy}{dt}) \qquad (1)$$

- Sendo t a variável independente e y a variável dependente.
- A função f inclui essas duas variáveis e uma possível derivada de primeira ordem de y.
- A equação (1) será linear se apresentar a forma:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \qquad (2)$$

  - *p, q, e g são funções somente da variável t.*

Equações homogêneas

- Um problema de valor inicial (PVI) consiste da equação diferencial e um par de condições iniciais.

  $$y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y'_0$$

- Onde y_0 e y'_0 são números reais constantes.

Equações homogêneas

- Um problema de valor inicial (PVI) consiste da equação diferencial e um par de condições iniciais.

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y'_0$$

- Onde y_0 e y'_0 são números reais constantes.
- Essas duas condições iniciais indicam um ponto particular (t_0, y_0) e a derivada neste ponto.

Equações homogêneas

- Um problema de valor inicial (PVI) consiste da equação diferencial e um par de condições iniciais.

  $$y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y'_0$$

- Onde y_0 e y'_0 são números reais constantes.
- Essas duas condições iniciais indicam um ponto particular (t_0, y_0) e a derivada neste ponto.
- A eq. dif. de 2ª ordem é homogênea quando $g = 0$:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad (3)$$

Equações homogêneas

- Inicialmente, consideremos as funções de t substituídas por coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (4)$$

Equações homogêneas

- Inicialmente, consideremos as funções de t substituídas por coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (4)$$

- A eq. dif. de 2ª ordem a coeficientes constantes (4) pode ser resolvida por cálculos elementares.

Equações homogêneas

- Inicialmente, consideremos as funções de t substituídas por coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (4)$$

- A eq. dif. de 2ª ordem a coeficientes constantes (4) pode ser resolvida por cálculos elementares.

- Supondo uma solução do tipo exponencial $y = e^{rt}$ em que r é um parâmetro a ser determinado.

Equações homogêneas

- Inicialmente, consideremos as funções de t substituídas por coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (4)$$

- A eq. dif. de 2ª ordem a coeficientes constantes (4) pode ser resolvida por cálculos elementares.

- Supondo uma solução do tipo exponencial $y = e^{rt}$ em que r é um parâmetro a ser determinado.

Se $y = e^{rt}$

Equações homogêneas

- Inicialmente, consideremos as funções de t substituídas por coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (4)$$

- A eq. dif. de 2ª ordem a coeficientes constantes (4) pode ser resolvida por cálculos elementares.

- Supondo uma solução do tipo exponencial $y = e^{rt}$ em que r é um parâmetro a ser determinado.

Se $y = e^{rt} \quad \rightarrow \quad y' = re^{rt}$

Equações homogêneas

- Inicialmente, consideremos as funções de t substituídas por coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (4)$$

- A eq. dif. de 2ª ordem a coeficientes constantes (4) pode ser resolvida por cálculos elementares.

- Supondo uma solução do tipo exponencial $y = e^{rt}$ em que r é um parâmetro a ser determinado.

Se $y = e^{rt} \quad \rightarrow \quad y' = re^{rt} \quad \rightarrow \quad y'' = r^2 e^{rt}$

Equações homogêneas

- Inicialmente, consideremos as funções de t substituídas por coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (4)$$

- A eq. dif. de 2ª ordem a coeficientes constantes (4) pode ser resolvida por cálculos elementares.

- Supondo uma solução do tipo exponencial $y = e^{rt}$ em que r é um parâmetro a ser determinado.

Se $y = e^{rt} \quad \rightarrow \quad y' = re^{rt} \quad \rightarrow \quad y'' = r^2 e^{rt}$

- Substituindo-se y e suas derivadas em (4) tem-se:

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

Equações homogêneas

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

Equações homogêneas

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0$$

Equações homogêneas

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0$$ como: $e^{rt} \neq 0 \;\; \forall \;\; t$

Equações homogêneas

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0$$ como: $e^{rt} \neq 0 \;\; \forall \;\; t$

$$\boxed{ar^2 + br + c = 0}$$

(Equação característica da eq. dif. de 2ª ordem)

Equações homogêneas

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0$$ como: $e^{rt} \neq 0 \;\; \forall \;\; t$

$$\boxed{ar^2 + br + c = 0}$$

(Equação característica da eq. dif. de 2ª ordem)

- A equação característica é uma equação algébrica do segundo grau em r.

Equações homogêneas

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0$$

como: $e^{rt} \neq 0 \;\; \forall \;\; t$

$$\boxed{ar^2 + br + c = 0}$$

(Equação característica da eq. dif. de 2ª ordem)

- A equação característica é uma equação algébrica do segundo grau em r.

- Pode apresentar duas raízes reais distintas, raízes repetidas ou raízes complexas conjugadas.

Equações homogêneas

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0$$ como: $e^{rt} \neq 0 \ \ \forall \ t$

$$\boxed{ar^2 + br + c = 0}$$

(Equação característica da eq. dif. de 2ª ordem)

- A equação característica é uma equação algébrica do segundo grau em r.
- Pode apresentar duas raízes reais distintas, raízes repetidas ou raízes complexas conjugadas.
- Para o caso de raízes reais distintas, tem-se duas soluções para a equação diferencial.

Equações homogêneas

- **Raízes reais distintas** $\boldsymbol{r_1}$ e $\boldsymbol{r_1}$ da eq. característica.

$ay" + by' + cy = 0$ (Eq. dif. 2ª ordem a coeficientes constantes.)

Equações homogêneas

- **Raízes reais distintas** $\boldsymbol{r_1}$ e $\boldsymbol{r_1}$ da eq. característica.

$$ay" + by' + cy = 0$$ (Eq. dif. 2ª ordem a coeficientes constantes.)

$$y = e^{rt}$$ (solução proposta)

Equações homogêneas

- **Raízes reais distintas r_1 e r_1** da eq. característica.

$$ay'' + by' + cy = 0$$ (Eq. dif. 2ª ordem a coeficientes constantes.)

$$y = e^{rt}$$ (solução proposta)

$$ar^2 + br + c = 0$$ (Equação característica)

Equações homogêneas

- **Raízes reais distintas** $\boldsymbol{r_1}$ e $\boldsymbol{r_1}$ da eq. característica.

$ay" + by' + cy = 0$ (Eq. dif. 2ª ordem a coeficientes constantes.)

$y = e^{rt}$ (solução proposta)

$ar^2 + br + c = 0$ (Equação característica)

$y_1 = e^{r_1 t}$ e $y_2 = e^{r_2 t}$ (soluções para eq. dif.)

Equações homogêneas

- **Raízes reais distintas $\boldsymbol{r_1}$** e $\boldsymbol{r_1}$ da eq. característica.

$$ay" + by' + cy = 0$$ (Eq. dif. 2ª ordem a coeficientes constantes.)

$$y = e^{rt}$$ (solução proposta)

$$ar^2 + br + c = 0$$ (Equação característica)

$$y_1 = e^{r_1 t} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{r_2 t}$$ (soluções para eq. dif.)

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

Solução geral da eq. dif. de 2ª ordem.

Equações homogêneas

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$ Solução geral

Equações homogêneas

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$ Solução geral

- Uma solução particular pode ser encontrada substituindo-se as condições iniciais:

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y'_0$$

Equações homogêneas

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$ Solução geral

- Uma solução particular pode ser encontrada substituindo-se as condições iniciais:

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y'_0$$

- Independentemente dos valores das condições iniciais é sempre possível determinar as constantes C_1 e C_2.

Equações homogêneas

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$ Solução geral

- Uma solução particular pode ser encontrada substituindo-se as condições iniciais:

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y'_0$$

- Independentemente dos valores das condições iniciais é sempre possível determinar as constantes C_1 e C_2.

- Além disso, existe apenas uma escolha possível para cada par de condições iniciais.

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \qquad y(0) = 2 \ \text{ e } \ y'(0) = 3$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \qquad y(0) = 2 \ \text{ e } \ y'(0) = 3$$

- ✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \qquad y(0) = 2 \ \text{ e } \ y'(0) = 3$$

- ✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \ \Rightarrow \quad y' = re^{rt}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \qquad y(0) = 2 \ \text{ e } \ y'(0) = 3$$

✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \ \Rightarrow \quad y' = re^{rt} \quad \Rightarrow \quad y'' = r^2e^{rt}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \qquad y(0) = 2 \ \text{ e } \ y'(0) = 3$$

- ✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \ \Rightarrow \quad y' = re^{rt} \quad \Rightarrow \quad y'' = r^2 e^{rt}$$

- ✓ Substituir a proposta na eq. dif. de 2ª ordem.

$$r^2 e^{rt} + 5re^{rt} + 6e^{rt} = 0$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \qquad y(0) = 2 \ \text{ e } \ y'(0) = 3$$

✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \ \Rightarrow \quad y' = re^{rt} \quad \Rightarrow \quad y'' = r^2 e^{rt}$$

✓ Substituir a proposta na eq. dif. de 2ª ordem.

$$r^2 e^{rt} + 5re^{rt} + 6e^{rt} = 0 \qquad \text{mas, } e^{rt} \neq 0 \ \ \forall \ t$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \qquad y(0) = 2 \text{ e } y'(0) = 3$$

- ✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \Rightarrow \quad y' = re^{rt} \quad \Rightarrow \quad y'' = r^2e^{rt}$$

- ✓ Substituir a proposta na eq. dif. de 2ª ordem.

$$r^2e^{rt} + 5re^{rt} + 6e^{rt} = 0 \qquad \text{mas, } e^{rt} \neq 0 \;\; \forall \; t$$

$$r^2 + 5r + 6 = 0$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \qquad y(0) = 2 \text{ e } y'(0) = 3$$

- ✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \Rightarrow \quad y' = re^{rt} \quad \Rightarrow \quad y'' = r^2 e^{rt}$$

- ✓ Substituir a proposta na eq. dif. de 2ª ordem.

$$r^2 e^{rt} + 5re^{rt} + 6e^{rt} = 0 \qquad \text{mas, } e^{rt} \neq 0 \ \ \forall \ t$$

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r+2)(r+3) = 0$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \qquad y(0) = 2 \ \text{ e } \ y'(0) = 3$$

- ✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \ \Rightarrow \quad y' = re^{rt} \quad \Rightarrow \quad y'' = r^2 e^{rt}$$

- ✓ Substituir a proposta na eq. dif. de 2ª ordem.

$$r^2 e^{rt} + 5re^{rt} + 6e^{rt} = 0 \qquad \text{mas, } e^{rt} \neq 0 \ \ \forall \ t$$

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r+2)(r+3) = 0$$

$$r_1 = -2 \ \text{ e } \ r_2 = -3$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \qquad y(0) = 2 \;\text{ e }\; y'(0) = 3$$

✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \;\Rightarrow\; y' = re^{rt} \;\Rightarrow\; y'' = r^2e^{rt}$$

✓ Substituir a proposta na eq. dif. de 2ª ordem.

$$r^2e^{rt} + 5re^{rt} + 6e^{rt} = 0 \qquad \text{mas, } e^{rt} \neq 0 \;\; \forall \; t$$

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \;\Rightarrow\; (r+2)(r+3) = 0$$

$$r_1 = -2 \;\text{ e }\; r_2 = -3 \;\Rightarrow\; y_1 = e^{-2t} \;\text{ e }\; y_2 = e^{-3t}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \qquad y(0) = 2 \text{ e } y'(0) = 3$$

✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \Rightarrow \quad y' = re^{rt} \quad \Rightarrow \quad y'' = r^2 e^{rt}$$

✓ Substituir a proposta na eq. dif. de 2ª ordem.

$$r^2 e^{rt} + 5re^{rt} + 6e^{rt} = 0 \qquad \text{mas, } e^{rt} \neq 0 \;\; \forall \; t$$

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r+2)(r+3) = 0$$

$$r_1 = -2 \text{ e } r_2 = -3 \quad \Rightarrow \quad y_1 = e^{-2t} \text{ e } \; y_2 = e^{-3t}$$

$$\boxed{y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}}$$

Solução geral da eq. dif.

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

✓ Derivar a solução geral e compor um sistema:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \\ y' = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t} \end{cases}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

✓ Derivar a solução geral e compor um sistema:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \\ y' = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t} \end{cases} \Rightarrow$$

Inserindo:

$$y(0) = 2 \text{ e } y'(0) = 3$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

- ✓ Derivar a solução geral e compor um sistema:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \\ y' = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t} \end{cases} \Rightarrow$$

Inserindo:

$y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ 3 = -2C_1 - 3C_2 \end{cases}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

✓ Derivar a solução geral e compor um sistema:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \\ y' = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t} \end{cases} \Rightarrow$$

Inserindo:

$y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ 3 = -2C_1 - 3C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 2 - C_2 \\ 3 = -2(2 - C_2) - 3C_2 \end{cases}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

- ✓ Derivar a solução geral e compor um sistema:

$$\begin{cases} y = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t} \\ y' = -2C_1e^{-2t} - 3C_2e^{-3t} \end{cases} \Rightarrow$$

Inserindo:

$y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ 3 = -2C_1 - 3C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 2 - C_2 \\ 3 = -2(2 - C_2) - 3C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 9 \\ C_2 = -7 \end{cases}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

✓ Derivar a solução geral e compor um sistema:

$$\begin{cases} y = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t} \\ y' = -2C_1e^{-2t} - 3C_2e^{-3t} \end{cases} \Rightarrow$$

Inserindo:

$y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ 3 = -2C_1 - 3C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 2 - C_2 \\ 3 = -2(2 - C_2) - 3C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 9 \\ C_2 = -7 \end{cases}$$

$$y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$$

Solução do PVI

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

✓ Derivar a solução geral e compor um sistema:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \\ y' = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t} \end{cases} \Rightarrow$$

Inserindo:

$y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ 3 = -2C_1 - 3C_2 \end{cases}$$

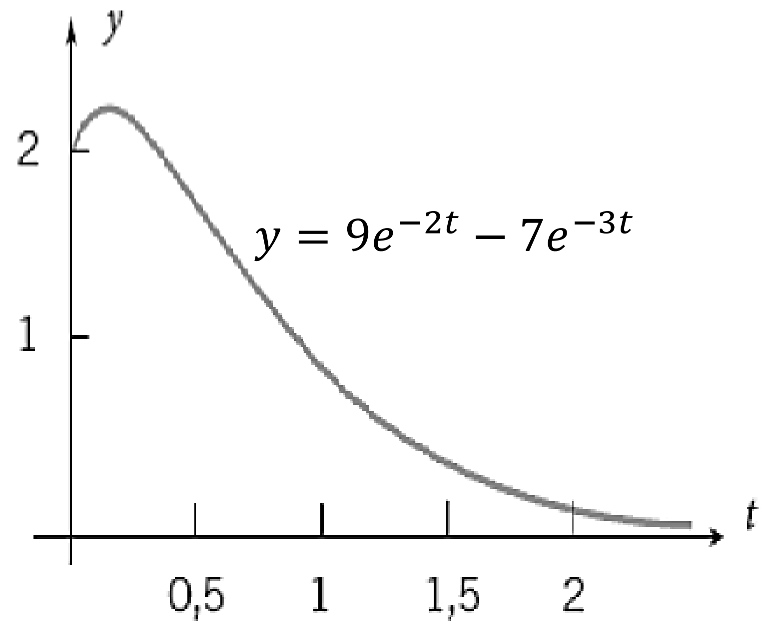
$$\begin{cases} C_1 = 2 - C_2 \\ 3 = -2(2 - C_2) - 3C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 9 \\ C_2 = -7 \end{cases}$$

$$y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$$

Solução do PVI

Gráfico da solução do PVI



Teorema de existência e unicidade

Teorema 3.2.1 (Existência e unicidade)

Seja o PVI:

$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \mid y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y'_0$

Onde p, q e g são contínuas em um intervalo aberto I que contém o ponto $t = t_o$.

Então, existe exatamente, uma solução $y = \phi(t)$ deste problema em todo intervalo I.

Teorema 3.2.1 (Existência e unicidade)

Seja o PVI:

$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \mid y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y'_0$

Onde p, q e g são contínuas em um intervalo aberto I que contém o ponto $t = t_o$.

Então, existe exatamente, uma solução $y = \phi(t)$ deste problema em todo intervalo I.

O teorema diz que:

- *O PVI tem solução.*
- *A solução é única.*

Teorema 3.2.1 (Existência e unicidade)

Seja o PVI:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \mid y(t_0) = y_0 \text{ e } y'(t_0) = y'_0$$

Onde p, q e g são contínuas em um intervalo aberto I que contém o ponto $t = t_o$.

Então, existe exatamente, uma solução $y = \phi(t)$ deste problema em todo intervalo I.

O teorema diz que:

- *O PVI tem solução.*
- *A solução é única.*
- *A solução* está definida em todo intervalo onde os coeficientes são contínuos.*

Teorema 3.2.1 (Existência e unicidade)

Seja o PVI:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \mid y(t_0) = y_0 \text{ e } y'(t_0) = y'_0$$

Onde p, q e g são contínuas em um intervalo aberto I que contém o ponto $t = t_o$.

Então, existe exatamente, uma solução $y = \phi(t)$ deste problema em todo intervalo I.

O teorema diz que:

- *O PVI tem solução.*
- *A solução é única.*
- *A solução* está definida em todo intervalo onde os coeficientes são contínuos.*
- $y = \phi(t)$ *é pelo menos duas vezes diferenciável.*

Teorema 3.2.1 (Existência e unicidade)

Seja o PVI:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \mid y(t_0) = y_0 \text{ e } y'(t_0) = y'_0$$

Onde p, q e g são contínuas em um intervalo aberto I que contém o ponto $t = t_o$.

Então, existe exatamente, uma solução $y = \phi(t)$ deste problema em todo intervalo I.

O teorema diz que:

- *O PVI tem solução.*
- *A solução é única.*
- *A solução* está definida em todo intervalo onde os coeficientes são contínuos.*
- $y = \phi(t)$ *é pelo menos duas vezes diferenciável.*

* Para a maioria dos problemas não é possível escrever solução útil.

Outros teoremas

Teorema 3.2.2 (Princípio da superposição)

Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

Então, a combinação linear $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ também será solução, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

Teorema 3.2.2 (Princípio da superposição)

Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

Então, a combinação linear $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ também será solução, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

Consequências do princípio da superposição

- *Iniciando com duas soluções é possível construir uma família de soluções.*

Teorema 3.2.2 (Princípio da superposição)

Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

Então, a combinação linear $y = C_1y_1 + C_2y_2$ também será solução, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

Consequências do princípio da superposição

- *Iniciando com duas soluções é possível construir uma família de soluções.*
- *Se as constantes satisfazem as condições iniciais, necessariamente devem satisfazer o **sistema das soluções e das condições iniciais** a seguir...*

Teorema 3.2.2 (Princípio da superposição)

- Sistema das soluções e condições iniciais:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(t_0) + C_2 y_2(t_0) \\ y'_0 = C_1 y'_1(t_0) + C_2 y'_2(t_0) \end{cases}$$

Teorema 3.2.2 (Princípio da superposição)

- Sistema das soluções e condições iniciais:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(t_0) + C_2 y_2(t_0) \\ y'_0 = C_1 y'_1(t_0) + C_2 y'_2(t_0) \end{cases}$$

- As incógnitas são as constantes C_1 e C_2; Os coeficientes são $y_1(t_0)$ e $y_2(t_0)$ e suas derivadas.

Teorema 3.2.2 (Princípio da superposição)

- Sistema das soluções e condições iniciais:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(t_0) + C_2 y_2(t_0) \\ y'_0 = C_1 y'_1(t_0) + C_2 y'_2(t_0) \end{cases}$$

- As incógnitas são as constantes C_1 e C_2; Os coeficientes são $y_1(t_0)$ e $y_2(t_0)$ e suas derivadas.

- O determinante desses coeficientes deverá ser $\neq 0$ para que as constantes C_1 e C_2 tenham valor único.

Teorema 3.2.2 (Princípio da superposição)

- Sistema das soluções e condições iniciais:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(t_0) + C_2 y_2(t_0) \\ y'_0 = C_1 y'_1(t_0) + C_2 y'_2(t_0) \end{cases}$$

- As incógnitas são as constantes C_1 e C_2; Os coeficientes são $y_1(t_0)$ e $y_2(t_0)$ e suas derivadas.

- O determinante desses coeficientes deverá ser $\neq 0$ para que as constantes C_1 e C_2 tenham valor único.

$$W = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{vmatrix}$$

Teorema 3.2.2 (Princípio da superposição)

- Sistema das soluções e condições iniciais:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(t_0) + C_2 y_2(t_0) \\ y'_0 = C_1 y'_1(t_0) + C_2 y'_2(t_0) \end{cases}$$

- As incógnitas são as constantes C_1 e C_2; Os coeficientes são $y_1(t_0)$ e $y_2(t_0)$ e suas derivadas.

- O determinante desses coeficientes deverá ser $\neq 0$ para que as constantes C_1 e C_2 tenham valor único.

$$W = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{vmatrix}$$

Wronskiano

$$W = y_1(t_0)\, y'_2(t_0) - y'_1(t_0) y_2(t_0)$$

Teorema 3.2.3 (do Wronskiano)

Sejam y_1 e y_2 duas soluções da equação:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad (1)$$

Com as condições iniciais: $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y'_0$

Sempre é possível escolher as constantes C_1 e C_2, tais que $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ satisfaça a eq. dif. (1) e as condições iniciais, se e somente se, o wronskiano $W = y_1\, y'_2 - y'_1 y_2$ não se anula em t_0.

Exemplo 2: No exemplo 1 determinou-se as soluções da eq. dif. $y'' + 5y' + 6y = 0$ que são $y_1 = e^{-2t}$ e $y_2 = e^{-3t}$.

Mostrar que o wronskiano é diferente de zero.

Exemplo 2: No exemplo 1 determinou-se as soluções da eq. dif. $y'' + 5y' + 6y = 0$ que são $y_1 = e^{-2t}$ e $y_2 = e^{-3t}$.

Mostrar que o wronskiano é diferente de zero.

✓ Cálculo do wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$$

Exemplo 2: No exemplo 1 determinou-se as soluções da eq. dif. $y'' + 5y' + 6y = 0$ que são $y_1 = e^{-2t}$ e $y_2 = e^{-3t}$.

Mostrar que o wronskiano é diferente de zero.

✓ Cálculo do wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$$

$$W = e^{-2t}[-3e^{-3t}] - [-2e^{-2t}]e^{-3t}$$

Exemplo 2: No exemplo 1 determinou-se as soluções da eq. dif. $y'' + 5y' + 6y = 0$ que são $y_1 = e^{-2t}$ e $y_2 = e^{-3t}$.

Mostrar que o wronskiano é diferente de zero.

- ✓ Cálculo do wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$$

$$W = e^{-2t}[-3e^{-3t}] - [-2e^{-2t}]e^{-3t}$$

$$W = -3e^{-5t} + 2e^{-5t}$$

Exemplo 2: No exemplo 1 determinou-se as soluções da eq. dif. $y'' + 5y' + 6y = 0$ que são $y_1 = e^{-2t}$ e $y_2 = e^{-3t}$.

Mostrar que o wronskiano é diferente de zero.

✓ Cálculo do wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$$

$$W = e^{-2t}[-3e^{-3t}] - [-2e^{-2t}]e^{-3t}$$

$$W = -3e^{-5t} + 2e^{-5t}$$

$W = -e^{-5t} \neq 0 \ \forall \ t$ Portanto, satisfaz o Teorema 3.2.3

Teorema 3.2.4 (família de soluções)

Supondo y_1 e y_2 duas soluções da equação:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad (1)$$

Então, a família de soluções $y = C_1y_1 + C_2y_2$ inclui todas as soluções, se e somente se, existe um ponto em que o wronskiano não é nulo.

Teorema 3.2.4 (família de soluções)

Supondo y_1 e y_2 duas soluções da equação:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad (1)$$

Então, a família de soluções $y = C_1y_1 + C_2y_2$ inclui todas as soluções, se e somente se, existe um ponto em que o wronskiano não é nulo.

O teorema diz que:

- *A combinação linear das soluções contém todas as soluções da eq. (1) se, o wronskiano (W) não é nulo em algum ponto.*

Teorema 3.2.4 (família de soluções)

Supondo y_1 e y_2 duas soluções da equação:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad (1)$$

Então, a família de soluções $y = C_1y_1 + C_2y_2$ inclui todas as soluções, se e somente se, existe um ponto em que o wronskiano não é nulo.

O teorema diz que:

- *A combinação linear das soluções contém todas as soluções da eq. (1) se, o wronskiano (W) não é nulo em algum ponto.*
- *Diz-se que as soluções y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções se $W \neq 0$.*

Exemplo 3: Mostre que as soluções $y_1 = e^{r_1 t}$ e $y_2 = e^{r_2 t}$ formam um conjunto fundamental de soluções se $r_1 \neq r_2$.

Exemplo 3: Mostre que as soluções $y_1 = e^{r_1 t}$ e $y_2 = e^{r_2 t}$ formam um conjunto fundamental de soluções se $r_1 \neq r_2$.

- ✓ Cálculo do wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$$

Exemplo 3: Mostre que as soluções $y_1 = e^{r_1 t}$ e $y_2 = e^{r_2 t}$ formam um conjunto fundamental de soluções se $r_1 \neq r_2$.

- ✓ Cálculo do wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$$

$$W = e^{r_1 t}[r_2 e^{r_2 t}] - e^{r_2 t}[r_1 e^{r_1 t}]$$

Exemplo 3: Mostre que as soluções $y_1 = e^{r_1 t}$ e $y_2 = e^{r_2 t}$ formam um conjunto fundamental de soluções se $r_1 \neq r_2$.

- ✓ Cálculo do wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$$

$$W = e^{r_1 t}[r_2 e^{r_2 t}] - e^{r_2 t}[r_1 e^{r_1 t}]$$

$$W = (r_2 - r_1)e^{(r_1 + r_2)t}$$

Exemplo 3: Mostre que as soluções $y_1 = e^{r_1 t}$ e $y_2 = e^{r_2 t}$ formam um conjunto fundamental de soluções se $r_1 \neq r_2$.

✓ Cálculo do wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$$

$$W = e^{r_1 t}[r_2 e^{r_2 t}] - e^{r_2 t}[r_1 e^{r_1 t}]$$

$$W = (r_2 - r_1)e^{(r_1 + r_2)t}$$

✓ Como o termo exponencial nunca se anula, então:

$$W \neq 0 \quad \text{se, e somente se,} \quad r_1 \neq r_2.$$

Teorema 3.2.6 (Teorema de Abel)

Se y_1 e y_2 são duas soluções da equação:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad (1)$$

onde p e q são contínuas em um intervalo aberto I, então o wronskiano é calculado pela expressão:

$$W(y_1, y_2)(t) = ce^{-\int p(t)dt}$$

W nunca se anula se a constante $c \neq 0$.

Exemplo 4: Conferir o valor do wronskiano calculado no exemplo 2:

$y'' + 5y' + 6y = 0,\ \ y_1 = e^{-2t}$ e $y_2 = e^{-3t} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{W = -e^{-5t}}$

Exemplo 4: Conferir o valor do wronskiano calculado no exemplo 2:

$y'' + 5y' + 6y = 0,\ \ y_1 = e^{-2t}$ e $y_2 = e^{-3t} \ \ \Rightarrow \ \ \boldsymbol{W = -e^{-5t}}$

✓ Cálculo do wronskiano pelo teorema de Abel:

$$W(y_1, y_2)(t) = ce^{-\int 5dt} = ce^{-5t}$$

Exemplo 4: Conferir o valor do wronskiano calculado no exemplo 2:

$y'' + 5y' + 6y = 0, \ \ y_1 = e^{-2t}$ e $y_2 = e^{-3t} \ \ \Rightarrow \ \ \boldsymbol{W = -e^{-5t}}$

- ✓ Cálculo do wronskiano pelo teorema de Abel:

$$W(y_1, y_2)(t) = ce^{-\int 5dt} = ce^{-5t}$$

- ✓ Para solução particular do exemplo 2 $c = -1$, assim:

$$\boldsymbol{W = -e^{-5t}}$$

Exemplo 4: Conferir o valor do wronskiano calculado no exemplo 2:

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \;\; y_1 = e^{-2t} \text{ e } y_2 = e^{-3t} \;\; \Rightarrow \;\; \boldsymbol{W = -e^{-5t}}$$

- ✓ Cálculo do wronskiano pelo teorema de Abel:

$$W(y_1, y_2)(t) = ce^{-\int 5dt} = ce^{-5t}$$

- ✓ Para solução particular do exemplo 2 $c = -1$, assim:

$$\boldsymbol{W = -e^{-5t}}$$

- ✓ O Teorema de Abel permite calcular o wronskiano conhecendo-se somente a função p coeficiente de y'.

Para depois desta aula:

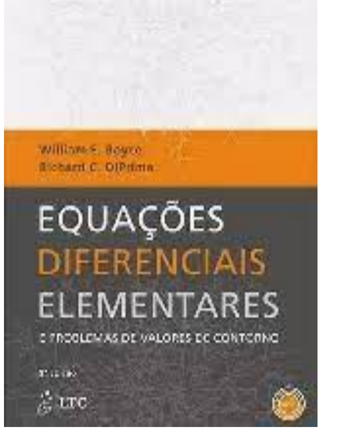
- Estudar seções 3.1 e 3.2 do livro texto (Boyce).
- Resolver o exercício proposto.
- Praticar: exercícios da seções 3.1 e 3.2 do Boyce.

Próxima aula:

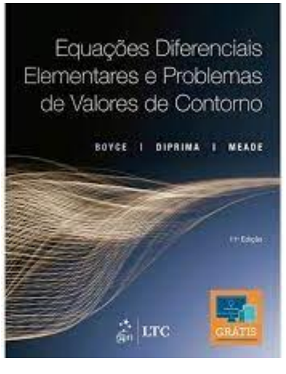
- Eq. dif. de 2ª ordem, raízes repetidas e complexas.

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.



Numeração dos exercícios com base na 9ª ed.



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2020.