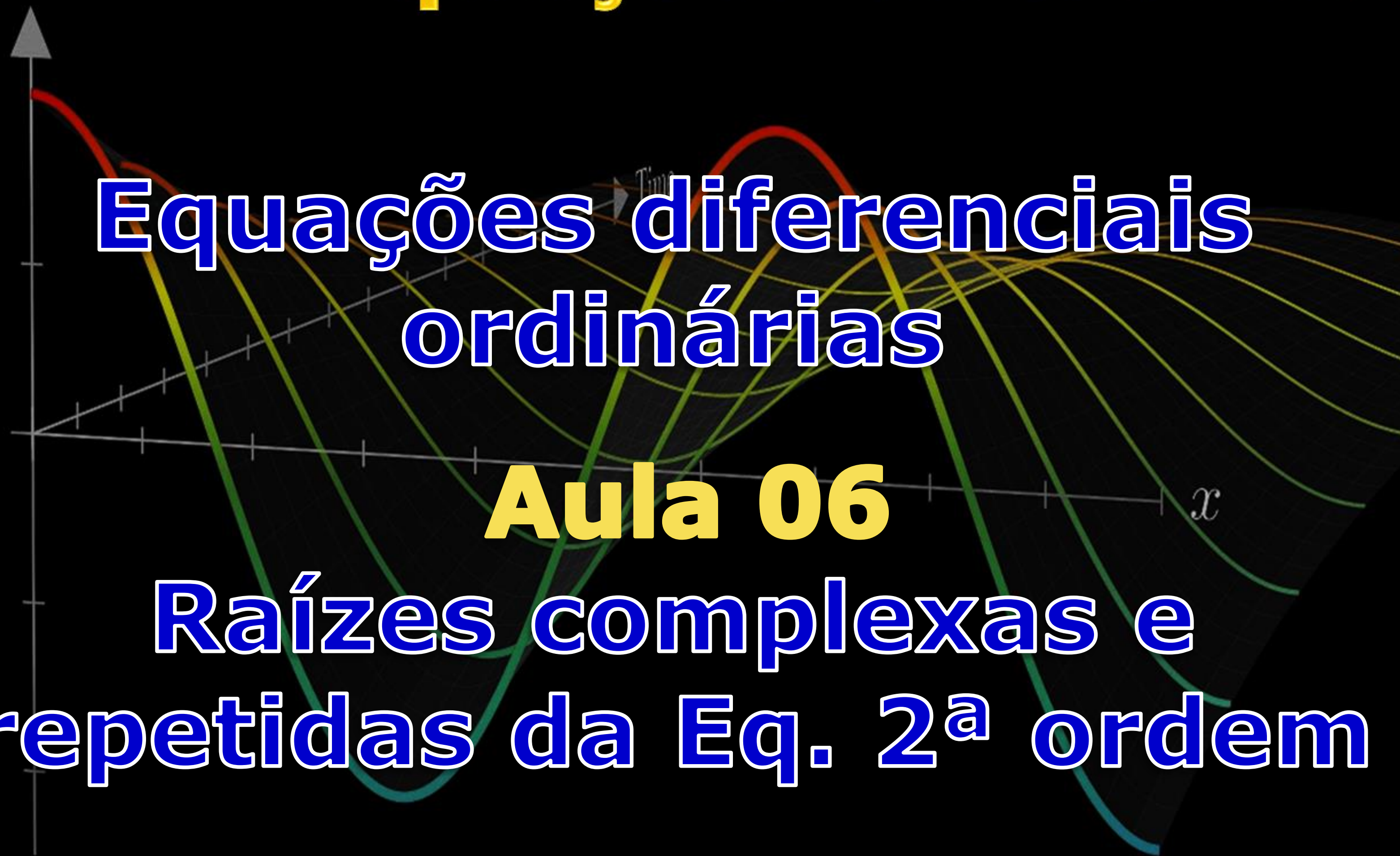
Equações diferenciais



Equações diferenciais ordinárias

Aula 06

Raízes complexas e repetidas da Eq. 2ª ordem

Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Raízes complexas na equação característica.
2. Raízes repetidas.
3. Redução de ordem.

Pré-requisitos

- Equações algébricas do segundo grau.
- Diferenciação e integração.

Raízes complexas na equação característica

Raízes complexas na equação característica

- Seja a equação característica da equação diferencial de segunda ordem.

$$ay'' + by' + cy = 0$$

(Eq. dif. 2ª ordem a coeficientes constantes.)

Raízes complexas na equação característica

- Seja a equação característica da equação diferencial de segunda ordem.

$$ay'' + by' + cy = 0$$

(Eq. dif. 2ª ordem a coeficientes constantes.)

$$ar^2 + br + c = 0$$

(Equação característica)

Raízes complexas na equação característica

- Seja a equação característica da equação diferencial de segunda ordem.

$$ay'' + by' + cy = 0$$ (Eq. dif. 2ª ordem a coeficientes constantes.)

$$ar^2 + br + c = 0$$ (Equação característica)

- Se o discriminante $b^2 - 4ac < 0$, então as raízes são números complexos conjugados da forma:

$r_1 = \lambda + i\mu$ e $r_2 = \lambda - i\mu$,

Raízes complexas na equação característica

- Seja a equação característica da equação diferencial de segunda ordem.

$$ay'' + by' + cy = 0$$ (Eq. dif. 2ª ordem a coeficientes constantes.)

$$\boxed{ar^2 + br + c = 0}$$ (Equação característica)

- Se o discriminante $b^2 - 4ac < 0$, então as raízes são números complexos conjugados da forma:

$$r_1 = \lambda + i\mu \text{ e } r_2 = \lambda - i\mu, \quad \begin{cases} \lambda \; e \; \mu\text{: números reais} \\ i = \sqrt{-1} \end{cases}$$

Raízes complexas na equação característica

- Seja a equação característica da equação diferencial de segunda ordem.

$$ay'' + by' + cy = 0$$ (Eq. dif. 2ª ordem a coeficientes constantes.)

$$\boxed{ar^2 + br + c = 0}$$ (Equação característica)

- Se o discriminante $b^2 - 4ac < 0$, então as raízes são números complexos conjugados da forma:

$r_1 = \lambda + i\mu$ e $r_2 = \lambda - i\mu$, $\begin{cases} \lambda \; e \; \mu: & \text{números reais} \\ i = \sqrt{-1} \end{cases}$

$y_1 = e^{(\lambda + i\mu)t}$ e $y_2 = e^{(\lambda - i\mu)t}$ (soluções da eq. dif.)

Raízes complexas na equação característica

- Um exponencial complexo pode ser expresso por uma combinação de seno e cosseno por meio da relação de Euler:

Raízes complexas na equação característica

- Um exponencial complexo pode ser expresso por uma combinação de seno e cosseno por meio da relação de Euler:

$$e^{i\mu t} = cos\mu t + isen\mu t$$

Raízes complexas na equação característica

- Um exponencial complexo pode ser expresso por uma combinação de seno e cosseno por meio da relação de Euler:

$$e^{i\mu t} = cos\mu t + isen\mu t$$

$$e^{-i\mu t} = cos\mu t - isen\mu t$$

Raízes complexas na equação característica

- Um exponencial complexo pode ser expresso por uma combinação de seno e cosseno por meio da relação de Euler:

$$e^{i\mu t} = cos\mu t + isen\mu t \qquad e^{-i\mu t} = cos\mu t - isen\mu t$$

- As soluções y_1 e y_2 podem ser reescritas por:

$$e^{(\lambda \pm i\mu)t}$$

Raízes complexas na equação característica

- Um exponencial complexo pode ser expresso por uma combinação de seno e cosseno por meio da relação de Euler:

$$e^{i\mu t} = cos\mu t + isen\mu t$$

$$e^{-i\mu t} = cos\mu t - isen\mu t$$

- As soluções y_1 e y_2 podem ser reescritas por:

$$e^{(\lambda \pm i\mu)t} = e^{\lambda t}.e^{\pm i\mu t}$$

Raízes complexas na equação característica

- Um exponencial complexo pode ser expresso por uma combinação de seno e cosseno por meio da relação de Euler:

$$e^{i\mu t} = cos\mu t + isen\mu t \qquad e^{-i\mu t} = cos\mu t - isen\mu t$$

- As soluções y_1 e y_2 podem ser reescritas por:

$$e^{(\lambda \pm i\mu)t} = e^{\lambda t}.e^{\pm i\mu t} = e^{\lambda t}(cos\mu t \pm isen\mu t)$$

Raízes complexas na equação característica

- Um exponencial complexo pode ser expresso por uma combinação de seno e cosseno por meio da relação de Euler:

$$e^{i\mu t} = cos\mu t + isen\mu t \qquad e^{-i\mu t} = cos\mu t - isen\mu t$$

- As soluções y_1 e y_2 podem ser reescritas por:

$$e^{(\lambda \pm i\mu)t} = e^{\lambda t}.e^{\pm i\mu t} = e^{\lambda t}(cos\mu t \pm isen\mu t)$$

- A parte real e imaginária da solução está representada pelas funções reais $e^{\lambda t}cos\mu t$ e $e^{\lambda t}sen\mu t$, respectivamente.

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' + 4y' + 37y = 0 \qquad y(0) = 2 \;\text{ e }\; y'(0) = 8$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' + 4y' + 37y = 0 \qquad y(0) = 2 \ \text{ e } \ y'(0) = 8$$

- ✓ Resolver a equação característica:

$$4r^2 + 4r + 37 = 0$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' + 4y' + 37y = 0 \qquad y(0) = 2 \text{ e } y'(0) = 8$$

- ✓ Resolver a equação característica:

$$4r^2 + 4r + 37 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4, b = 4, c = 37$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' + 4y' + 37y = 0 \qquad y(0) = 2 \;\; \text{e} \;\; y'(0) = 8$$

✓ Resolver a equação característica:

$$4r^2 + 4r + 37 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4, b = 4, c = 37$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' + 4y' + 37y = 0 \qquad y(0) = 2 \ \text{ e } \ y'(0) = 8$$

- ✓ Resolver a equação característica:

$$4r^2 + 4r + 37 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4, b = 4, c = 37$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.4.37}}{2.4}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' + 4y' + 37y = 0 \qquad y(0) = 2 \text{ e } y'(0) = 8$$

✓ Resolver a equação característica:

$$4r^2 + 4r + 37 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4, b = 4, c = 37$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.4.37}}{2.4}$$

$$r = \frac{-4 \pm 4\sqrt{1 - 37}}{8}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' + 4y' + 37y = 0 \qquad y(0) = 2 \ \text{ e } \ y'(0) = 8$$

- ✓ Resolver a equação característica:

$$4r^2 + 4r + 37 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4, b = 4, c = 37$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.4.37}}{2.4}$$

$$r = \frac{-4 \pm 4\sqrt{1 - 37}}{8} = -1/2 \pm 1/2\sqrt{-36}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' + 4y' + 37y = 0 \qquad y(0) = 2 \ \text{ e } \ y'(0) = 8$$

✓ Resolver a equação característica:

$$4r^2 + 4r + 37 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4, b = 4, c = 37$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.4.37}}{2.4}$$

$$r = \frac{-4 \pm 4\sqrt{1 - 37}}{8} = -1/2 \pm 1/2\sqrt{-36}$$

$$r = -1/2 \pm 3i$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' + 4y' + 37y = 0 \qquad y(0) = 2 \;\text{ e }\; y'(0) = 8$$

- ✓ Resolver a equação característica:

$$4r^2 + 4r + 37 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4, b = 4, c = 37$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.4.37}}{2.4}$$

$$r = \frac{-4 \pm 4\sqrt{1 - 37}}{8} = -1/2 \pm 1/2\sqrt{-36}$$

$$r = -1/2 \pm 3i$$

Onde: $\sqrt{-36}$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' + 4y' + 37y = 0 \qquad y(0) = 2 \ \text{ e } \ y'(0) = 8$$

✓ Resolver a equação característica:

$$4r^2 + 4r + 37 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4, b = 4, c = 37$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.4.37}}{2.4}$$

$$r = \frac{-4 \pm 4\sqrt{1 - 37}}{8} = -1/2 \pm 1/2\sqrt{-36}$$

$r = -1/2 \pm 3i$ Onde: $\sqrt{-36} = 6\sqrt{-1} = 6i$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' + 4y' + 37y = 0 \qquad y(0) = 2 \text{ e } y'(0) = 8$$

✓ Resolver a equação característica:

$$4r^2 + 4r + 37 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4, b = 4, c = 37$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.4.37}}{2.4}$$

$$r = \frac{-4 \pm 4\sqrt{1 - 37}}{8} = -1/2 \pm 1/2\sqrt{-36}$$

$$r = -1/2 \pm 3i$$

Onde: $\sqrt{-36} = 6\sqrt{-1} = 6i$

✓ Portanto, as soluções da eq. característica são:

$$r_1 = -\frac{1}{2} + 3i \qquad r_2 = -\frac{1}{2} - 3i$$

Exemplo 1:

$$\boxed{4y'' + 4y' + 37y = 0}$$

- ✓ As soluções da equação diferencial ficam:

Exemplo 1:

$$\boxed{4y'' + 4y' + 37y = 0}$$

- ✓ As soluções da equação diferencial ficam:

$$y_1 = e^{\left(-\frac{1}{2}+3i\right)t}$$

Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- ✓ As soluções da equação diferencial ficam:

$$y_1 = e^{(-\frac{1}{2}+3i)t} = e^{-\frac{t}{2}}(cos3t + isen3t)$$

Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- As soluções da equação diferencial ficam:

$$y_1 = e^{(-\frac{1}{2}+3i)t} = e^{-\frac{t}{2}}(cos3t + isen3t)$$

$$y_2 = e^{(-\frac{1}{2}-3i)t}$$

Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- ✓ As soluções da equação diferencial ficam:

$$y_1 = e^{(-\frac{1}{2}+3i)t} = e^{-\frac{t}{2}}(cos3t + isen3t)$$

$$y_2 = e^{(-\frac{1}{2}-3i)t} = e^{-\frac{t}{2}}(cos3t - isen3t)$$

Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- As soluções da equação diferencial ficam:

$$y_1 = e^{\left(-\frac{1}{2}+3i\right)t} = e^{-\frac{t}{2}}(cos3t + isen3t)$$

$$y_2 = e^{\left(-\frac{1}{2}-3i\right)t} = e^{-\frac{t}{2}}(cos3t - isen3t)$$

- Pelo teorema de Abel, o wronskiano não se anula.

$$W = ce^{-\int p(t)dt}$$

Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- ✓ As soluções da equação diferencial ficam:

$$y_1 = e^{(-\frac{1}{2}+3i)t} = e^{-\frac{t}{2}}(cos3t + isen3t)$$

$$y_2 = e^{(-\frac{1}{2}-3i)t} = e^{-\frac{t}{2}}(cos3t - isen3t)$$

- ✓ Pelo teorema de Abel, o wronskiano não se anula.

$$W = ce^{-\int p(t)dt} = ce^{-\int 4dt}$$

Exemplo 1:

$$\boxed{4y'' + 4y' + 37y = 0}$$

- ✓ As soluções da equação diferencial ficam:

$$y_1 = e^{\left(-\frac{1}{2}+3i\right)t} = e^{-\frac{t}{2}}\left(cos3t + isen3t\right)$$

$$y_2 = e^{\left(-\frac{1}{2}-3i\right)t} = e^{-\frac{t}{2}}\left(cos3t - isen3t\right)$$

- ✓ Pelo teorema de Abel, o wronskiano não se anula.

$$W = ce^{-\int p(t)dt} = ce^{-\int 4dt} = ce^{-4t} \neq 0 \ \forall\, t$$

Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- As soluções da equação diferencial ficam:

$$y_1 = e^{(-\frac{1}{2}+3i)t} = e^{-\frac{t}{2}}(cos3t + isen3t)$$

$$y_2 = e^{(-\frac{1}{2}-3i)t} = e^{-\frac{t}{2}}(cos3t - isen3t)$$

- Pelo teorema de Abel, o wronskiano não se anula.

$$W = ce^{-\int p(t)dt} = ce^{-\int 4dt} = ce^{-4t} \neq 0 \ \forall \ t$$

- Logo o conjunto solução da eq. dif. pode ser escrito como combinação linear das soluções.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- ✓ Conjunto solução da eq. dif.:

$$y = C_1 e^{-\frac{t}{2}}(cos3t + isen3t) + C_2 e^{-\frac{t}{2}}(cos3t - isen3t)$$

Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- ✓ Conjunto solução da eq. dif.:

$$y = C_1 e^{-\frac{t}{2}} (cos3t + isen3t) + C_2 e^{-\frac{t}{2}} (cos3t - isen3t)$$

$$y = (C_1 + C_2)\, cos3t\, e^{-\frac{t}{2}} + (iC_1 - iC_2)\, sen3t\, e^{-\frac{t}{2}}$$

Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- Conjunto solução da eq. dif.:

$$y = C_1 e^{-\frac{t}{2}}(cos3t + isen3t) + C_2 e^{-\frac{t}{2}}(cos3t - isen3t)$$

$$y = (C_1 + C_2)\, cos3t\, e^{-\frac{t}{2}} + (iC_1 - iC_2)\, sen3t\, e^{-\frac{t}{2}}$$

- As constantes C_1 e C_2 e a combinação com a notação complexa $i = \sqrt{-1}$ podem ser substituídas pelas constantes k_1 e k_2.

Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- Conjunto solução da eq. dif.:

$$y = C_1 e^{-\frac{t}{2}} (cos3t + isen3t) + C_2 e^{-\frac{t}{2}} (cos3t - isen3t)$$

$$y = (C_1 + C_2)\, cos3t\, e^{-\frac{t}{2}} + (iC_1 - iC_2)\, sen3t\, e^{-\frac{t}{2}}$$

- As constantes C_1 e C_2 e a combinação com a notação complexa $i = \sqrt{-1}$ podem ser substituídas pelas constantes k_1 e k_2.

Se $(C_1 + C_2) = k_1$

Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- Conjunto solução da eq. dif.:

$$y = C_1 e^{-\frac{t}{2}}(cos3t + isen3t) + C_2 e^{-\frac{t}{2}}(cos3t - isen3t)$$

$$y = (C_1 + C_2)\, cos3t\, e^{-\frac{t}{2}} + (iC_1 - iC_2)\, sen3t\, e^{-\frac{t}{2}}$$

- As constantes C_1 e C_2 e a combinação com a notação complexa $i = \sqrt{-1}$ podem ser substituídas pelas constantes k_1 e k_2.

Se $(C_1 + C_2) = k_1$ e $(iC_1 - iC_2) = k_2,$ então:

Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- ✓ Conjunto solução da eq. dif.:

$$y = C_1 e^{-\frac{t}{2}}(cos3t + isen3t) + C_2 e^{-\frac{t}{2}}(cos3t - isen3t)$$

$$y = (C_1 + C_2)\, cos3t\, e^{-\frac{t}{2}} + (iC_1 - iC_2)\, sen3t\, e^{-\frac{t}{2}}$$

- ✓ As constantes C_1 e C_2 e a combinação com a notação complexa $i = \sqrt{-1}$ podem ser substituídas pelas constantes k_1 e k_2.

Se $(C_1 + C_2) = k_1$ e $(iC_1 - iC_2) = k_2$, então:

$$y = K_1 cos3t\, e^{-\frac{t}{2}} + K_2 sen3t\, e^{-\frac{t}{2}}$$

Conjunto solução da eq. dif.

Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$
$$y(0) = 2\,,\quad y'(0) = 8:$$

- ✓ Inserindo as condições iniciais:

$$y = K_1 cos3t\, e^{-\frac{t}{2}} + K_2 sen3t\, e^{-\frac{t}{2}}$$

Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$
$$y(0) = 2\,,\quad y'(0) = 8:$$

- ✓ Inserindo as condições iniciais:

$$y = K_1 cos3t\, e^{-\frac{t}{2}} + K_2 sen3t\, e^{-\frac{t}{2}}$$

- ✓ $2 = K_1 cos0\, e^0 + K_2 sen0\, e^0$

Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$
$$y(0) = 2\,, \quad y'(0) = 8:$$

- ✓ Inserindo as condições iniciais:

$$y = K_1 cos3t\, e^{-\frac{t}{2}} + K_2 sen3t\, e^{-\frac{t}{2}}$$

- ✓ $2 = K_1 cos0\, e^0 + K_2 sen0\, e^0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 2$

Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$
$$y(0) = 2\,,\quad y'(0) = 8:$$

- ✓ Inserindo as condições iniciais:

$$y = K_1 cos3t\, e^{-\frac{t}{2}} + K_2 sen3t\, e^{-\frac{t}{2}}$$

- ✓ $2 = K_1 cos0\, e^0 + K_2 sen0\, e^0 \qquad \Rightarrow \qquad K_1 = 2$

- ✓ $y' = \dfrac{K_1}{-2} cos3t\, e^{-\frac{t}{2}} - 3K_1 sen3t\, e^{-\frac{t}{2}} + \dfrac{K_2}{-2} sen3t\, e^{-\frac{t}{2}} + 3K_2 cos3t\, e^{-\frac{t}{2}}$

Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$
$$y(0) = 2\,,\quad y'(0) = 8:$$

- ✓ Inserindo as condições iniciais:

$$y = K_1 cos3t\, e^{-\frac{t}{2}} + K_2 sen3t\, e^{-\frac{t}{2}}$$

- ✓ $2 = K_1 cos0\, e^{0} + K_2 sen0\, e^{0} \quad \Rightarrow \quad K_1 = 2$

- ✓ $y' = \dfrac{K_1}{-2} cos3t\, e^{-\frac{t}{2}} - 3K_1 sen3t\, e^{-\frac{t}{2}} + \dfrac{K_2}{-2} sen3t\, e^{-\frac{t}{2}} + 3K_2 cos3t\, e^{-\frac{t}{2}}$

$$8 = \frac{K_1}{-2} cos0\, e^{0} - 3K_1 sen0\, e^{0} + \frac{K_2}{-2} sen0\, e^{0} + 3K_2 cos0\, e^{0}$$

Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$
$$y(0) = 2\,, \quad y'(0) = 8:$$

- ✓ Inserindo as condições iniciais:

$$y = K_1 cos3t\, e^{-\frac{t}{2}} + K_2 sen3t\, e^{-\frac{t}{2}}$$

- ✓ $2 = K_1 cos0\, e^0 + K_2 sen0\, e^0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 2$

- ✓ $y' = \dfrac{K_1}{-2} cos3t\, e^{-\frac{t}{2}} - 3K_1 sen3t\, e^{-\frac{t}{2}} + \dfrac{K_2}{-2} sen3t\, e^{-\frac{t}{2}} + 3K_2 cos3t\, e^{-\frac{t}{2}}$

$$8 = \frac{K_1}{-2} cos0\, e^0 - 3K_1 sen0\, e^0 + \frac{K_2}{-2} sen0\, e^0 + 3K_2 cos0\, e^0$$

$$8 = \frac{K_1}{-2} + 3K_2$$

Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$
$$y(0) = 2\,, \quad y'(0) = 8:$$

- Inserindo as condições iniciais:

$$y = K_1 cos3t\, e^{-\frac{t}{2}} + K_2 sen3t\, e^{-\frac{t}{2}}$$

- $2 = K_1 cos0\, e^0 + K_2 sen0\, e^0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 2$

- $y' = \dfrac{K_1}{-2} cos3t\, e^{-\frac{t}{2}} - 3K_1 sen3t\, e^{-\frac{t}{2}} + \dfrac{K_2}{-2} sen3t\, e^{-\frac{t}{2}} + 3K_2 cos3t\, e^{-\frac{t}{2}}$

$$8 = \frac{K_1}{-2} cos0\, e^0 - 3K_1 sen0\, e^0 + \frac{K_2}{-2} sen0\, e^0 + 3K_2 cos0\, e^0$$

$$8 = \frac{K_1}{-2} + 3K_2 \quad \Rightarrow \quad 8 = -1 + 3K_2$$

Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$
$$y(0) = 2\,,\quad y'(0) = 8:$$

- ✓ Inserindo as condições iniciais:

$$y = K_1 cos3t\, e^{-\frac{t}{2}} + K_2 sen3t\, e^{-\frac{t}{2}}$$

- ✓ $2 = K_1 cos0\, e^0 + K_2 sen0\, e^0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 2$

- ✓ $y' = \dfrac{K_1}{-2} cos3t\, e^{-\frac{t}{2}} - 3K_1 sen3t\, e^{-\frac{t}{2}} + \dfrac{K_2}{-2} sen3t\, e^{-\frac{t}{2}} + 3K_2 cos3t\, e^{-\frac{t}{2}}$

$$8 = \frac{K_1}{-2} cos0\, e^0 - 3K_1 sen0\, e^0 + \frac{K_2}{-2} sen0\, e^0 + 3K_2 cos0\, e^0$$

$$8 = \frac{K_1}{-2} + 3K_2 \quad \Rightarrow \quad 8 = -1 + 3K_2 \quad \Rightarrow \quad K_2 = 3$$

Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$
$$y(0) = 2\,,\quad y'(0) = 8:$$

- ✓ Inserindo as condições iniciais:

$$y = K_1 cos3t\, e^{-\frac{t}{2}} + K_2 sen3t\, e^{-\frac{t}{2}}$$

- ✓ $2 = K_1 cos0\, e^0 + K_2 sen0\, e^0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 2$

- ✓ $y' = \dfrac{K_1}{-2} cos3t\, e^{-\frac{t}{2}} - 3K_1 sen3t\, e^{-\frac{t}{2}} + \dfrac{K_2}{-2} sen3t\, e^{-\frac{t}{2}} + 3K_2 cos3t\, e^{-\frac{t}{2}}$

$$8 = \frac{K_1}{-2} cos0\, e^0 - 3K_1 sen0\, e^0 + \frac{K_2}{-2} sen0\, e^0 + 3K_2 cos0\, e^0$$

$$8 = \frac{K_1}{-2} + 3K_2 \quad \Rightarrow \quad 8 = -1 + 3K_2 \quad \Rightarrow \quad K_2 = 3$$

$$y = e^{-\frac{t}{2}} (2cos3t + 3sen3t)$$

Solução do PVI

Exemplo 1: Valores em pontos extremos da solução:

- ✓ P/ $t = 0$: $y = e^0\,(2cos0 + 3sen0) = 2$

Exemplo 1: Valores em pontos extremos da solução:

- ✓ P/ $t = 0$: $y = e^{0}\,(2cos0 + 3sen0) = 2$
- ✓ $\lim\limits_{t \to \infty} e^{-\frac{t}{2}}\,(2cos3t \; + 3sen3t)$

Exemplo 1: Valores em pontos extremos da solução:

- P/ $t = 0$: $y = e^{0}\,(2cos0 + 3sen0) = 2$
- $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\frac{t}{2}}\,(2cos3t\ + 3sen3t) =$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{t}{2}} \lim_{t\to\infty}(2cos3t + 3sen3t) = 0$$

Exemplo 1: Valores em pontos extremos da solução:

✓ P/ $t = 0$: $y = e^0\,(2cos0 + 3sen0) = 2$

✓ $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\frac{t}{2}}\,(2cos3t \ + 3sen3t) =$

$\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\frac{t}{2}} \lim\limits_{t\to\infty}(2cos3t + 3sen3t) = 0$

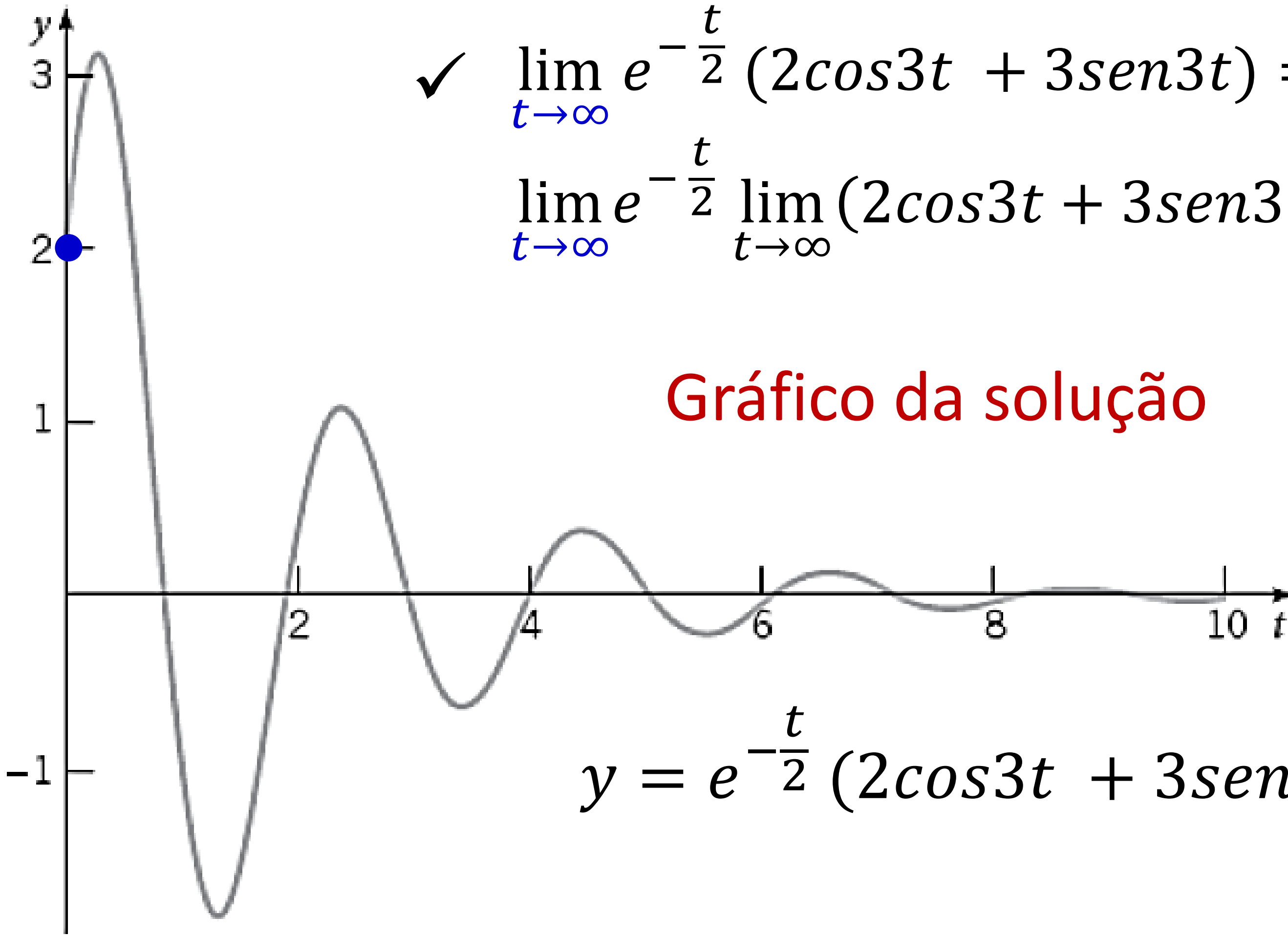


Gráfico da solução

$$y = e^{-\frac{t}{2}}\,(2cos3t \ + 3sen3t)$$

Exemplo 1: Valores em pontos extremos da solução:

✓ P/ $t = 0$: $y = e^{0}\,(2cos0 + 3sen0) = 2$

✓ $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\frac{t}{2}}\,(2cos3t\; + 3sen3t) =$

$\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\frac{t}{2}} \lim\limits_{t\to\infty}(2cos3t + 3sen3t) = 0$

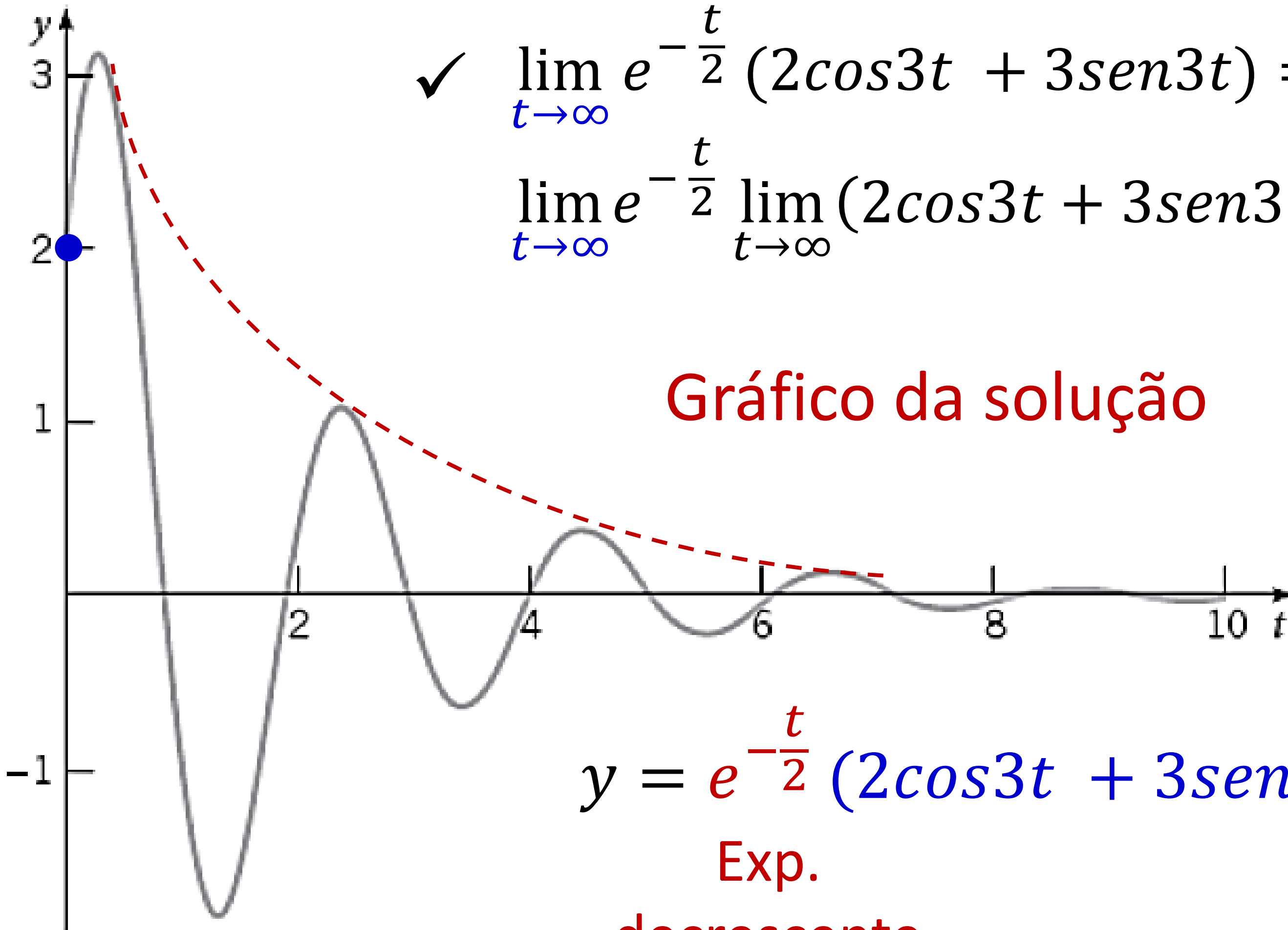


Gráfico da solução

$y = e^{-\frac{t}{2}}\,(2cos3t\; + 3sen3t)$

Exp. decrescente

Exemplo 1: Valores em pontos extremos da solução:

✓ P/ $t = 0$: $y = e^{0}\,(2cos0 + 3sen0) = 2$

✓ $\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{t}{2}}\,(2cos3t\ + 3sen3t) =$

$\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{t}{2}} \lim_{t\to\infty}(2cos3t + 3sen3t) = 0$

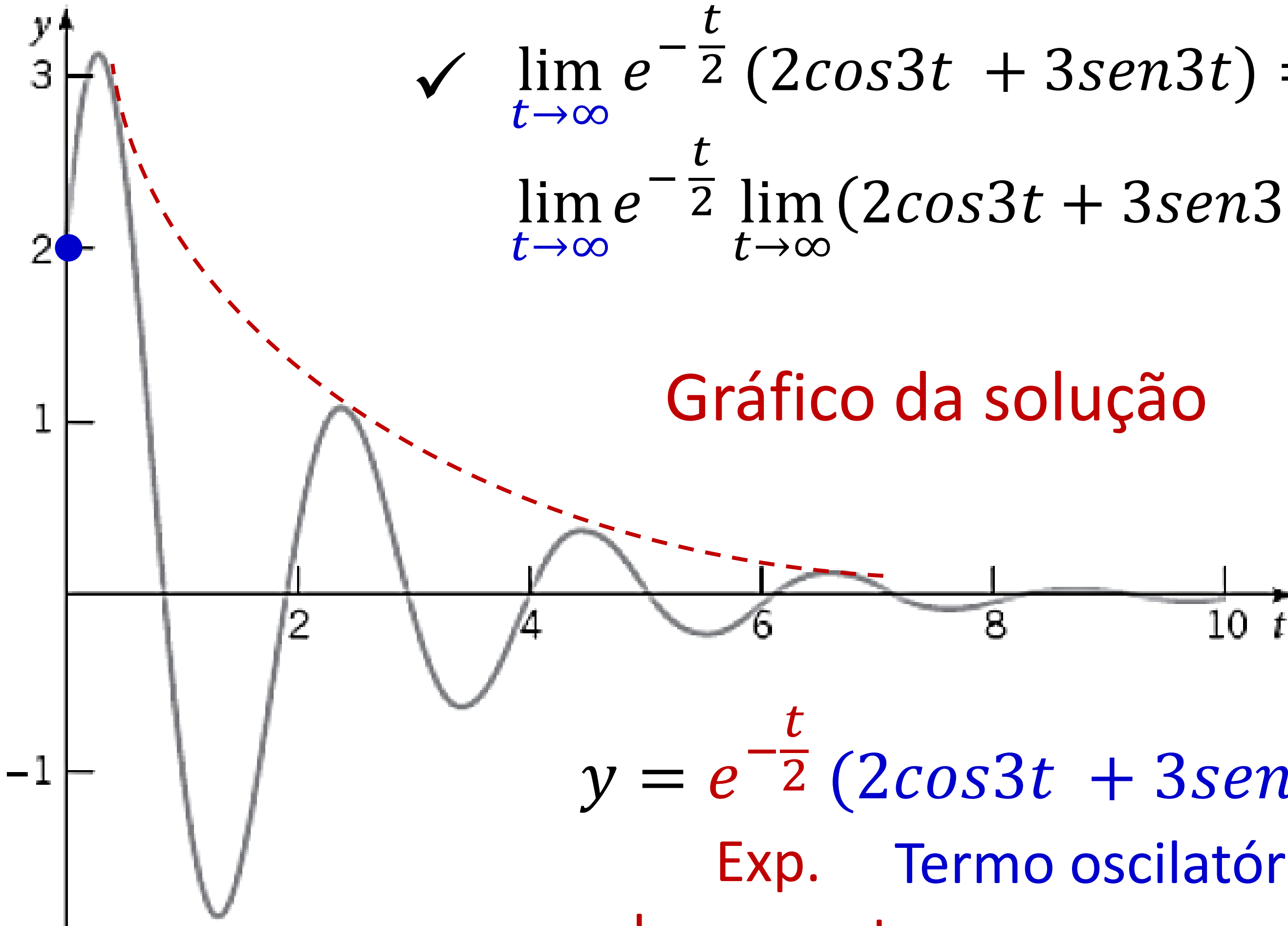
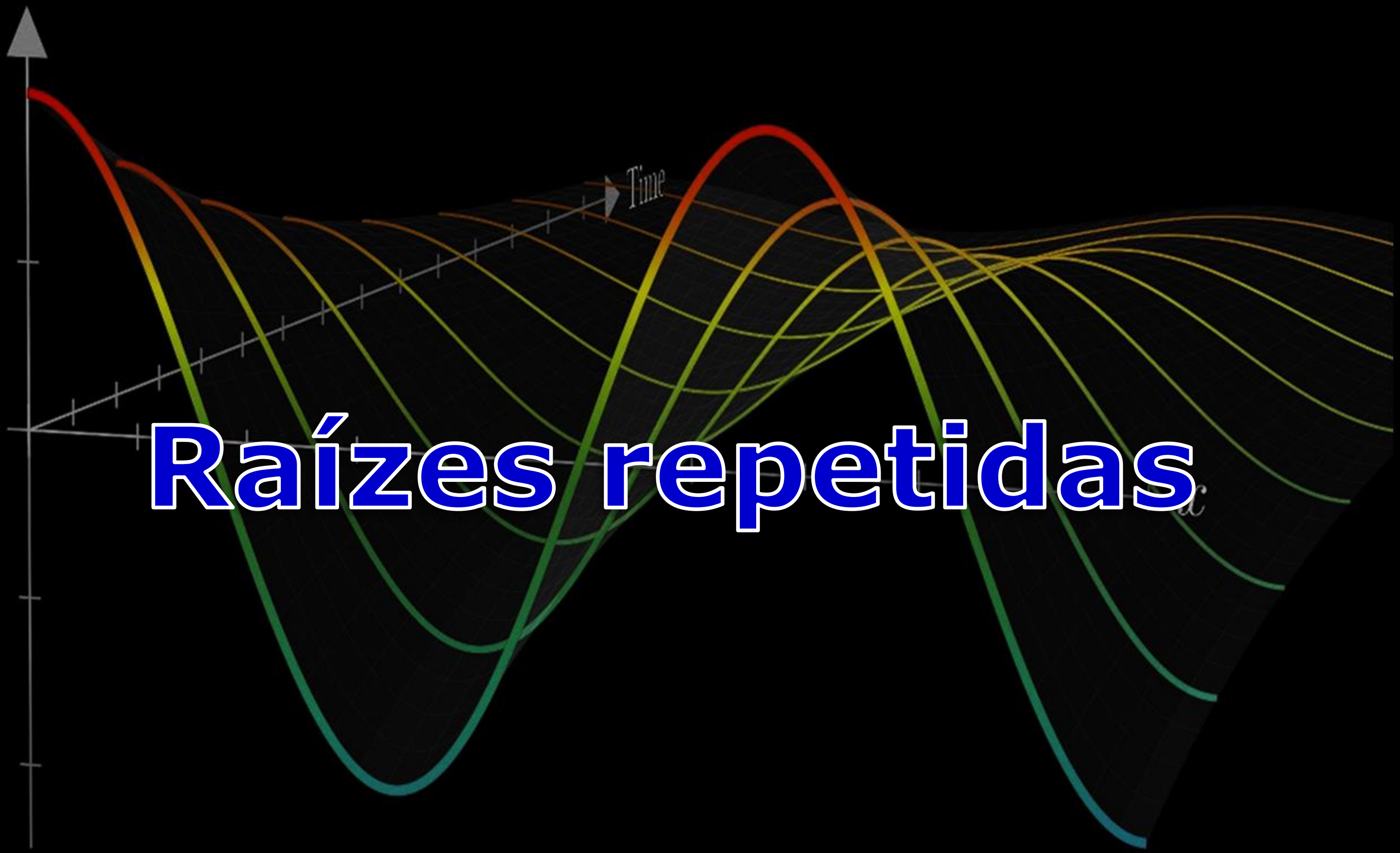


Gráfico da solução

$y = e^{-\frac{t}{2}}\,(2cos3t\ + 3sen3t)$

Exp. decrescente   Termo oscilatório

Raízes repetidas



Raízes repetidas

- Seja a equação característica da eq. dif. a coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Raízes repetidas

- Seja a equação característica da eq. dif. a coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{ar^2 + br + c = 0}$$

Raízes repetidas

- Seja a equação característica da eq. dif. a coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \Rightarrow \quad ar^2 + br + c = 0$$

- Se $b^2 - 4ac = 0$, então as raízes serão repetidas e geram a mesma solução.

$$r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}$$

Raízes repetidas

- Seja a equação característica da eq. dif. a coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{ar^2 + br + c = 0}$$

- Se $b^2 - 4ac = 0$, então as raízes serão repetidas e geram a mesma solução.

$$r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_1 = e^{\frac{-b}{2a}t}}$$

Raízes repetidas

- Seja a equação característica da eq. dif. a coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \Rightarrow \quad ar^2 + br + c = 0$$

- Se $b^2 - 4ac = 0$, então as raízes serão repetidas e geram a mesma solução.

$$r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a} \quad \Rightarrow \quad y_1 = e^{\frac{-b}{2a}t}$$

- O conjunto solução pode ser encontrado pelo produto de uma função v de pela primeira solução.

$$y = v(t)y_1(t) = v(t)e^{\frac{-b}{2a}t}$$

Raízes repetidas

- A função $v(t)$ mais simples, linearmente independente da exponencial, é um polinômio.

$$v(t) = C_1 + C_2 t$$

Raízes repetidas

- A função $v(t)$ mais simples, linearmente independente da exponencial, é um polinômio.

  $$v(t) = C_1 + C_2 t$$

- Portanto, um conjunto solução será:

$$y = C_1 e^{\frac{-b}{2a}t} + C_2 t e^{\frac{-b}{2a}t}$$

C_1 e C_2: constantes

Raízes repetidas

- A função $v(t)$ mais simples, linearmente independente da exponencial, é um polinômio.

  $v(t) = C_1 + C_2 t$

- Portanto, um conjunto solução será:

$$y = C_1 e^{\frac{-b}{2a}t} + C_2 t e^{\frac{-b}{2a}t}$$

C_1 e C_2: constantes

- O wronskiano dessas soluções nunca se anula:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

Raízes repetidas

- A função $v(t)$ mais simples, linearmente independente da exponencial, é um polinômio.

$$v(t) = C_1 + C_2 t$$

- Portanto, um conjunto solução será:

$$\boxed{y = C_1 e^{\frac{-b}{2a}t} + C_2 t e^{\frac{-b}{2a}t}}$$

C_1 e C_2: constantes

- O wronskiano dessas soluções nunca se anula:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$$

Raízes repetidas

- A função $v(t)$ mais simples, linearmente independente da exponencial, é um polinômio.

$$v(t) = C_1 + C_2 t$$

- Portanto, um conjunto solução será:

$$y = C_1 e^{\frac{-b}{2a}t} + C_2 t e^{\frac{-b}{2a}t}$$

C_1 e C_2: constantes

- O wronskiano dessas soluções nunca se anula:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$$

$$W = e^{\frac{-b}{2a}t}\left[\frac{-b}{2a} t e^{\frac{-b}{2a}t} + e^{\frac{-b}{2a}t}\right] - \frac{-b}{2a} e^{\frac{-b}{2a}t}\left[t e^{\frac{-b}{2a}t}\right]$$

Raízes repetidas

- A função $v(t)$ mais simples, linearmente independente da exponencial, é um polinômio.

$$v(t) = C_1 + C_2 t$$

- Portanto, um conjunto solução será:

$$y = C_1 e^{\frac{-b}{2a}t} + C_2 t e^{\frac{-b}{2a}t}$$

C_1 e C_2: constantes

- O wronskiano dessas soluções nunca se anula:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$$

$$\boldsymbol{W} = e^{\frac{-b}{2a}t}\left[\frac{-b}{2a} t e^{\frac{-b}{2a}t} + e^{\frac{-b}{2a}t}\right] - \frac{-b}{2a} e^{\frac{-b}{2a}t}\left[t e^{\frac{-b}{2a}t}\right] = \boldsymbol{e^{\frac{-b}{a}t}}$$

Exemplo 2: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' - 4y' + y = 0 \qquad y(0) = 2 \text{ e } y'(0) = 1/3$$

Exemplo 2: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' - 4y' + y = 0 \qquad y(0) = 2 \ \text{ e } \ y'(0) = 1/3$$

✓ Resolução da equação característica:

$$4r^2 - 4r + 1 = 0$$

Exemplo 2: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' - 4y' + y = 0 \qquad y(0) = 2 \text{ e } y'(0) = 1/3$$

- ✓ Resolução da equação característica:

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \sqrt{4^2 - 4.4.1} = 0$$

Exemplo 2: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' - 4y' + y = 0 \qquad y(0) = 2 \ \text{ e } \ y'(0) = 1/3$$

- Resolução da equação característica:

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \sqrt{4^2 - 4.4.1} = 0$$

- Portanto, as soluções da eq. característica são:

$$r_1 = r_2 = \frac{-(-4)}{2.4} = \frac{1}{2}$$

Exemplo 2: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' - 4y' + y = 0 \qquad y(0) = 2 \ \text{ e } \ y'(0) = 1/3$$

- ✓ Resolução da equação característica:

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \sqrt{4^2 - 4.4.1} = 0$$

- ✓ Portanto, as soluções da eq. característica são:

$$r_1 = r_2 = \frac{-(-4)}{2.4} = \frac{1}{2}$$

- ✓ A solução geral proposta é:

$$y = C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 t e^{\frac{t}{2}}$$

Exemplo 2: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' - 4y' + y = 0 \qquad y(0) = 2 \;\text{ e }\; y'(0) = 1/3$$

✓ Resolução da equação característica:

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \sqrt{4^2 - 4.4.1} = 0$$

✓ Portanto, as soluções da eq. característica são:

$$r_1 = r_2 = \frac{-(-4)}{2.4} = \frac{1}{2}$$

✓ A solução geral proposta é:

$$y = C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 t e^{\frac{t}{2}}$$

✓ Inserindo a primeira condição inicial tem-se:

$$y(0) = 2 = C_1 e^{\frac{0}{2}} + C_2 0 e^{\frac{0}{2}}$$

Exemplo 2: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' - 4y' + y = 0 \qquad y(0) = 2 \ \text{ e } \ y'(0) = 1/3$$

- ✓ Resolução da equação característica:

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \sqrt{4^2 - 4.4.1} = 0$$

- ✓ Portanto, as soluções da eq. característica são:

$$r_1 = r_2 = \frac{-(-4)}{2.4} = \frac{1}{2}$$

- ✓ A solução geral proposta é:

$$y = C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 t e^{\frac{t}{2}}$$

- ✓ Inserindo a primeira condição inicial tem-se:

$$y(0) = 2 = C_1 e^{\frac{0}{2}} + C_2 0 e^{\frac{0}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_1 = 2}$$

Exemplo 2:

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2,\ y'(0) = 1/3$$

- ✓ Inserindo a segunda condição inicial tem-se:

$$C_1 = 2$$

$$y = C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 t e^{\frac{t}{2}}$$

Exemplo 2:

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2,\ y'(0) = 1/3$$

- ✓ Inserindo a segunda condição inicial tem-se:

$$C_1 = 2$$

$$y = C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 t e^{\frac{t}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 \left(\frac{1}{2} t e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{2}} \right)$$

Exemplo 2:

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2,\ y'(0) = 1/3$$

- ✓ Inserindo a segunda condição inicial tem-se:

$$C_1 = 2$$

$$y = C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 t e^{\frac{t}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 \left(\frac{1}{2} t e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{2}} \right)$$

$$y'(0) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{0}{2}} + C_2 \left(\frac{1}{2} 0 e^{\frac{0}{2}} + e^{\frac{0}{2}} \right)$$

Exemplo 2:

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2,\ y'(0) = 1/3$$

- ✓ Inserindo a segunda condição inicial tem-se:

$$C_1 = 2$$

$$y = C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 t e^{\frac{t}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 \left(\frac{1}{2} t e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{2}} \right)$$

$$y'(0) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{0}{2}} + C_2 \left(\frac{1}{2} 0 e^{\frac{0}{2}} + e^{\frac{0}{2}} \right)$$

$$1/3 = \frac{1}{2} 2 + C_2$$

Exemplo 2:

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2,\ y'(0) = 1/3$$

- ✓ Inserindo a segunda condição inicial tem-se:

$$C_1 = 2$$

$$y = C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 t e^{\frac{t}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 \left(\frac{1}{2} t e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{2}} \right)$$

$$y'(0) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{0}{2}} + C_2 \left(\frac{1}{2} 0 e^{\frac{0}{2}} + e^{\frac{0}{2}} \right)$$

$$1/3 = \frac{1}{2} 2 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -2/3$$

Exemplo 2:

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2,\ y'(0) = 1/3$$

- ✓ Inserindo a segunda condição inicial tem-se:

$$C_1 = 2$$

$$y = C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 t e^{\frac{t}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 \left(\frac{1}{2} t e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{2}} \right)$$

$$y'(0) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{0}{2}} + C_2 \left(\frac{1}{2} 0 e^{\frac{0}{2}} + e^{\frac{0}{2}} \right)$$

$$1/3 = \frac{1}{2} 2 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -2/3$$

- ✓ Assim, a solução do PVI é:

$$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3} t e^{\frac{t}{2}}$$

Exemplo 2:

Valores em pontos extremos:

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2,\ y'(0) = 1/3$$

$$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$$

Exemplo 2:

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2,\ y'(0) = 1/3$$

$$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$$

Valores em pontos extremos:

✓ P/ $t = 0$: $y = 2e^{0} - \frac{2}{3}.0.e^{0} = 2$

Exemplo 2:

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2,\ y'(0) = 1/3$$

$$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$$

Valores em pontos extremos:

- ✓ P/ $t = 0$: $y = 2e^{0} - \frac{2}{3}.0.e^{0} = 2$
- ✓ $\lim_{t\to\infty} 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$

Exemplo 2:

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2,\ y'(0) = 1/3$$

Valores em pontos extremos:

$$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$$

- ✓ P/ $t = 0$: $y = 2e^{0} - \frac{2}{3}.0.e^{0} = 2$
- ✓ $\lim_{t\to\infty} 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}} = (\lim_{t\to\infty} e^{\frac{t}{2}})(\lim_{t\to\infty} 2) - \frac{2}{3}(\lim_{t\to\infty} t)$

Exemplo 2:

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2,\ y'(0) = 1/3$$

$$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$$

Valores em pontos extremos:

- ✓ P/ $t = 0$: $y = 2e^{0} - \frac{2}{3}.0.e^{0} = 2$
- ✓ $\lim_{t\to\infty} 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}} = (\lim_{t\to\infty} e^{\frac{t}{2}})(\lim_{t\to\infty} 2) - \frac{2}{3}(\lim_{t\to\infty} t)$
- ✓ Pto max: $y' = 0 = 2.\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}$

Exemplo 2:

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2,\ y'(0) = 1/3$$

Valores em pontos extremos:

$$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$$

- ✓ P/ $t = 0$: $y = 2e^0 - \frac{2}{3}.0.e^0 = 2$
- ✓ $\lim_{t\to\infty} 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}} = (\lim_{t\to\infty} e^{\frac{t}{2}})(\lim_{t\to\infty} 2) - \frac{2}{3}(\lim_{t\to\infty} t)$
- ✓ Pto max: $y' = 0 = 2.\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} - \left(\frac{2}{3}\frac{1}{2}te^{\frac{t}{2}} + \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\right)$

Exemplo 2:

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2,\ y'(0) = 1/3$$

Valores em pontos extremos:

$$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$$

- ✓ P/ $t = 0$: $\quad y = 2e^{0} - \frac{2}{3}.0.e^{0} = 2$
- ✓ $\lim_{t\to\infty} 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}} = (\lim_{t\to\infty} e^{\frac{t}{2}})(\lim_{t\to\infty} 2) - \frac{2}{3}(\lim_{t\to\infty} t)$
- ✓ Pto max: $y' = 0 = 2.\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} - \left(\frac{2}{3}\frac{1}{2}te^{\frac{t}{2}} + \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\right)$

$$\frac{t}{3} = 1 - \frac{2}{3}$$

Exemplo 2:

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2,\ y'(0) = 1/3$$

$$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$$

Valores em pontos extremos:

- ✓ P/ $t = 0$: $y = 2e^{0} - \frac{2}{3}.0.e^{0} = 2$
- ✓ $\lim\limits_{t\to\infty} 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}} = (\lim\limits_{t\to\infty} e^{\frac{t}{2}})(\lim\limits_{t\to\infty} 2) - \frac{2}{3}(\lim\limits_{t\to\infty} t)$
- ✓ Pto max: $y' = 0 = 2.\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} - \left(\frac{2}{3}\frac{1}{2}te^{\frac{t}{2}} + \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\right)$

$$\frac{t}{3} = 1 - \frac{2}{3}$$

$$t = 1,\ y \cong 2{,}2$$

Exemplo 2:

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2,\ y'(0) = 1/3$$

Valores em pontos extremos:

$$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$$

- ✓ P/ $t = 0$: $\quad y = 2e^{0} - \frac{2}{3}.0.e^{0} = 2$
- ✓ $\lim\limits_{t\to\infty} 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}} = (\lim\limits_{t\to\infty} e^{\frac{t}{2}})(\lim\limits_{t\to\infty} 2) - \frac{2}{3}(\lim\limits_{t\to\infty} t)$
- ✓ Pto max: $y' = 0 = 2.\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} - \left(\frac{2}{3}\frac{1}{2}te^{\frac{t}{2}} + \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\right)$

$$\frac{t}{3} = 1 - \frac{2}{3}$$

$$t = 1,\ y \cong 2{,}2$$

- ✓ Pto intersecção em t $(y = 0)$:

$$2e^{\frac{t}{2}} = 2/3te^{\frac{t}{2}} \quad \Rightarrow \quad t = 3$$

Exemplo 2:

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2,\ y'(0) = 1/3$$

Valores em pontos extremos:

$$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$$

- ✓ P/ $t = 0$: $y = 2e^0 - \frac{2}{3}.0.e^0 = 2$
- ✓ $\lim\limits_{t\to\infty} 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}} = (\lim\limits_{t\to\infty} e^{\frac{t}{2}})(\lim\limits_{t\to\infty} 2) - \frac{2}{3}(\lim\limits_{t\to\infty} t)$
- ✓ Pto max: $y' = 0 = 2.\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} - \left(\frac{2}{3}\frac{1}{2}te^{\frac{t}{2}} + \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\right)$

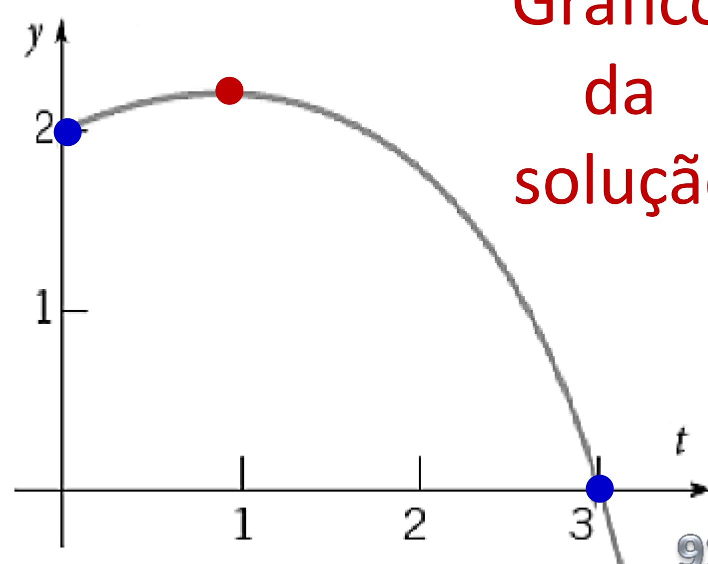
$$\frac{t}{3} = 1 - \frac{2}{3}$$

$$t = 1,\ y \cong 2{,}2$$

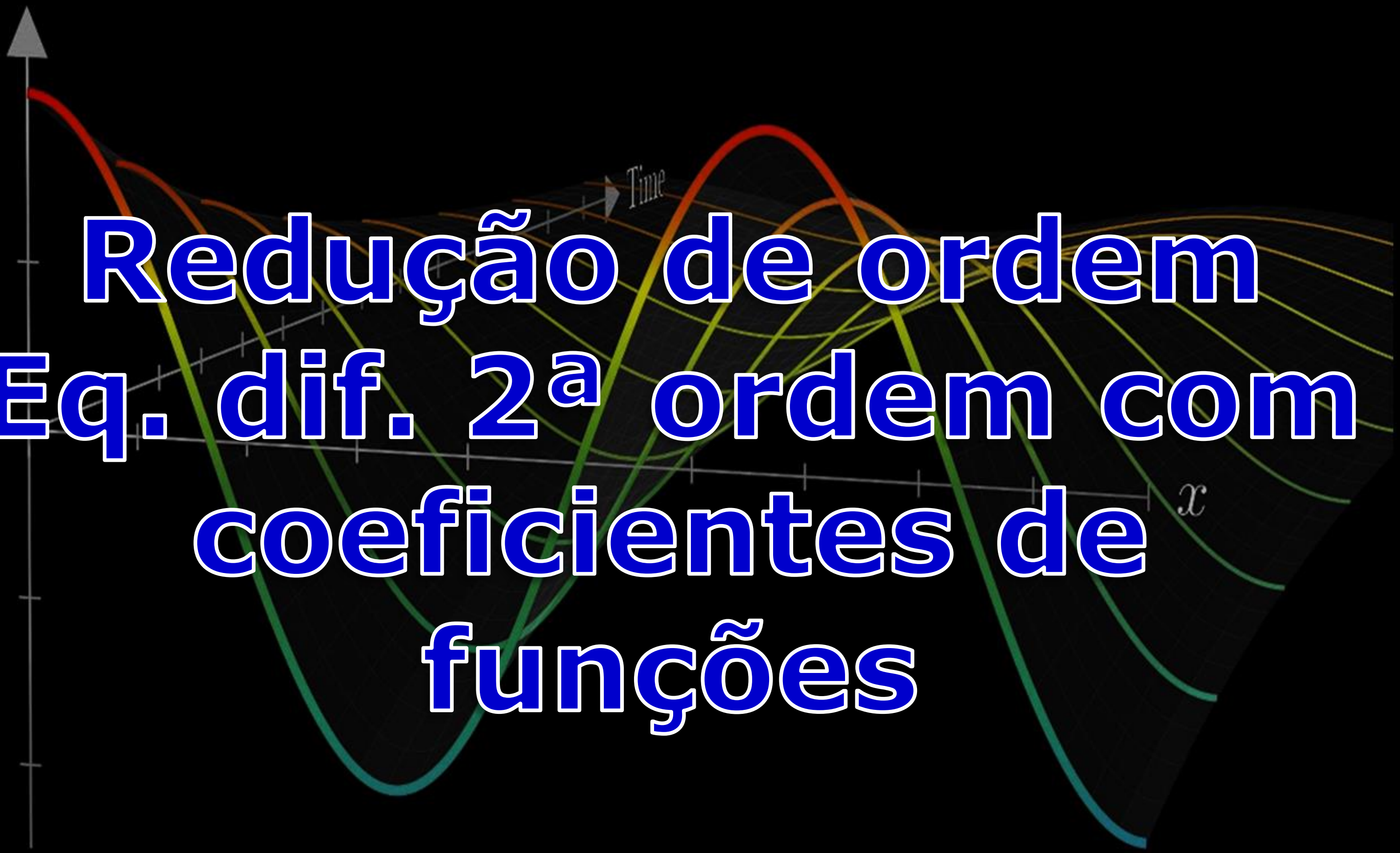
- ✓ Pto intersecção em t $(y = 0)$:

$$2e^{\frac{t}{2}} = 2/3te^{\frac{t}{2}} \quad \Rightarrow \quad t = 3$$

Gráfico da solução



Redução de ordem
Eq. dif. 2ª ordem com coeficientes de funções



Redução de ordem

- O procedimento usado para encontrar uma segunda solução pode ser generalizado.

Redução de ordem

- O procedimento usado para encontrar uma segunda solução pode ser generalizado.
- Seja uma eq. dif. de 2ª ordem homogênea, coeficientes de funções, cuja 1ª solução é conhecida.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (1) \qquad y_1(t)\text{: conhecida}$$

Redução de ordem

- O procedimento usado para encontrar uma segunda solução pode ser generalizado.
- Seja uma eq. dif. de 2ª ordem homogênea, coeficientes de funções, cuja 1ª solução é conhecida.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (1) \qquad y_1(t)\text{: conhecida}$$

- A proposta para obter a segunda solução será:

$$y = v(t)y_1(t)$$

Redução de ordem

- O procedimento usado para encontrar uma segunda solução pode ser generalizado.
- Seja uma eq. dif. de 2ª ordem homogênea, coeficientes de funções, cuja 1ª solução é conhecida.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (1) \qquad y_1(t)\text{: conhecida}$$

- A proposta para obter a segunda solução será:

$$y = v(t)y_1(t) \quad \Rightarrow \quad y' = v'y_1 + vy'_1$$

Redução de ordem

- O procedimento usado para encontrar uma segunda solução pode ser generalizado.
- Seja uma eq. dif. de 2ª ordem homogênea, coeficientes de funções, cuja 1ª solução é conhecida.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (1) \qquad y_1(t)\text{: conhecida}$$

- A proposta para obter a segunda solução será:

$$y = v(t)y_1(t) \quad \Rightarrow \quad y' = v'y_1 + vy'_1$$

$$y'' = v''y_1 + 2v'y'_1 + vy''_1$$

Redução de ordem

- O procedimento usado para encontrar uma segunda solução pode ser generalizado.
- Seja uma eq. dif. de 2ª ordem homogênea, coeficientes de funções, cuja 1ª solução é conhecida.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (1) \qquad y_1(t)\text{: conhecida}$$

- A proposta para obter a segunda solução será:

$$y = v(t)y_1(t) \quad \Rightarrow \quad y' = v'y_1 + vy'_1$$

$$y'' = v''y_1 + 2v'y'_1 + vy''_1$$

- Substituindo a proposta e derivadas em (1) tem-se:

$$y_1 v'' + (2y'_1 + py_1)v' = 0 \qquad (2)$$

Redução de ordem

$$y_1 v'' + (2y'_1 + py_1)v' = 0 \qquad (2)$$

Redução de ordem

$$y_1 v'' + (2y'_1 + py_1)v' = 0 \qquad (2)$$

- A equação (2) pode ser reduzida de ordem, fazendo uma substituição de variável.

$$x(t) = v'(t)$$

Redução de ordem

$$y_1 v'' + (2y'_1 + py_1)v' = 0 \qquad (2)$$

- A equação (2) pode ser reduzida de ordem, fazendo uma substituição de variável.

$$x(t) = v'(t) \quad \Rightarrow \quad v(t) = \int x dx + c$$

Redução de ordem

$$y_1 v'' + (2y'_1 + p y_1) v' = 0 \qquad (2)$$

- A equação (2) pode ser reduzida de ordem, fazendo uma substituição de variável.

$$x(t) = v'(t) \quad \Rightarrow \quad v(t) = \int x dx + c$$

- Então, a equação (2) fica com a nova variável x:

$$y_1 x' = -\left(2y'_1 + p y_1\right) x$$

Redução de ordem

$$y_1 v'' + (2y'_1 + py_1)v' = 0 \qquad (2)$$

- A equação (2) pode ser reduzida de ordem, fazendo uma substituição de variável.

$$x(t) = v'(t) \quad \Rightarrow \quad v(t) = \int x dx + c$$

- Então, a equação (2) fica com a nova variável x:

$$y_1 x' = -(2y'_1 + py_1)x \quad \Rightarrow \quad \frac{dx/dt}{x} = -\frac{(2y'_1 + py_1)}{y_1}$$

Redução de ordem

$$y_1 v'' + (2y'_1 + p y_1)v' = 0 \qquad (2)$$

- A equação (2) pode ser reduzida de ordem, fazendo uma substituição de variável.

$$x(t) = v'(t) \quad \Rightarrow \quad v(t) = \int x\,dx + c$$

- Então, a equação (2) fica com a nova variável x:

$$y_1 x' = -\left(2y'_1 + p y_1\right)x \quad \Rightarrow \quad \frac{dx/dt}{x} = -\frac{\left(2y'_1 + p y_1\right)}{y_1}$$

Resumo para encontrar a segunda solução:

✓ Encontrar a eq. dif. que contenha v; reduzir a ordem da eq. em v; resolver a equação de 1ª ordem em x e encontrar v.

Redução de ordem

$$y_1 v'' + (2y'_1 + p y_1) v' = 0 \qquad (2)$$

- A equação (2) pode ser reduzida de ordem, fazendo uma substituição de variável.

$$x(t) = v'(t) \quad \Rightarrow \quad v(t) = \int x dx + c$$

- Então, a equação (2) fica com a nova variável x:

$$y_1 x' = -(2y'_1 + p y_1) x \quad \Rightarrow \quad \frac{dx/dt}{x} = -\frac{(2y'_1 + p y_1)}{y_1}$$

Resumo para encontrar a segunda solução:

- ✓ Encontrar a eq. dif. que contenha v; reduzir a ordem da eq. em v; resolver a equação de 1ª ordem em x e encontrar v.
- ✓ O produto de v com y_1 fornece o conjunto de soluções:

$$y = v(t) y_1(t)$$

Exemplo 3: Encontrar o conjunto fundamental de soluções da eq. dif. homogênea.

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \quad y_1 = t^{-1} \quad \forall\, t > 0$$

Exemplo 3: Encontrar o conjunto fundamental de soluções da eq. dif. homogênea.

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \qquad y_1 = t^{-1} \qquad \forall\, t > 0$$

- ✓ Solução proposta:

$$y = v(t)y_1(t) = vt^{-1}$$

Exemplo 3: Encontrar o conjunto fundamental de soluções da eq. dif. homogênea.

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \qquad y_1 = t^{-1} \qquad \forall\, t > 0$$

✓ Solução proposta:

$$y = v(t)y_1(t) = vt^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad y' = v't^{-1} - vt^{-2}$$

Exemplo 3: Encontrar o conjunto fundamental de soluções da eq. dif. homogênea.

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \quad y_1 = t^{-1} \quad \forall\, t > 0$$

- ✓ Solução proposta:

$$y = v(t)y_1(t) = vt^{-1} \quad \Rightarrow \quad y' = v't^{-1} - vt^{-2}$$

$$y'' = v''t^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-3}$$

Exemplo 3: Encontrar o conjunto fundamental de soluções da eq. dif. homogênea.

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \qquad y_1 = t^{-1} \qquad \forall\, t > 0$$

- ✓ Solução proposta:

$$y = v(t)y_1(t) = vt^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad y' = v't^{-1} - vt^{-2}$$

$$y'' = v''t^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-3}$$

- ✓ Substituindo y, y' e y'' na eq. dif.:

$$2t^2(v''t^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-3}) + 3t(v't^{-1} - vt^{-2}) - (vt^{-1}) = 0$$

Exemplo 3: Encontrar o conjunto fundamental de soluções da eq. dif. homogênea.

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \qquad y_1 = t^{-1} \qquad \forall\, t > 0$$

- ✓ Solução proposta:

$$y = v(t)y_1(t) = vt^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad y' = v't^{-1} - vt^{-2}$$

$$y'' = v''t^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-3}$$

- ✓ Substituindo y, y' e y'' na eq. dif.:

$$2t^2(v''t^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-3}) + 3t(v't^{-1} - vt^{-2}) - (vt^{-1}) = 0$$

$$2v''t - 4v' + 4vt^{-1} + 3v' - 3vt^{-1} - vt^{-1} = 0$$

Exemplo 3: Encontrar o conjunto fundamental de soluções da eq. dif. homogênea.

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \qquad y_1 = t^{-1} \qquad \forall\, t > 0$$

✓ Solução proposta:

$$y = v(t)y_1(t) = vt^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad y' = v't^{-1} - vt^{-2}$$

$$y'' = v''t^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-3}$$

✓ Substituindo y, y' e y'' na eq. dif.:

$$2t^2(v''t^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-3}) + 3t(v't^{-1} - vt^{-2}) - (vt^{-1}) = 0$$

$$2v''t - 4v' + 4vt^{-1} + 3v' - 3vt^{-1} - vt^{-1} = 0$$

$$2v''t - v' = 0$$

Exemplo 3: Encontrar o conjunto fundamental de soluções da eq. dif. homogênea.

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \qquad y_1 = t^{-1} \qquad \forall\, t > 0$$

✓ Solução proposta:

$$y = v(t)y_1(t) = vt^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad y' = v't^{-1} - vt^{-2}$$

$$y'' = v''t^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-3}$$

✓ Substituindo y, y' e y'' na eq. dif.:

$$2t^2(v''t^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-3}) + 3t(v't^{-1} - vt^{-2}) - (vt^{-1}) = 0$$

$$2v''t - 4v' + 4vt^{-1} + 3v' - 3vt^{-1} - vt^{-1} = 0$$

$$2v''t - v' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2v''t = v' \qquad \text{(a)}$$

Exemplo 3: $2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \quad y_1 = t^{-1}$

- ✓ Reduzir a ordem da eq. (a):

$2v''t = v'$ (a)

$x(t) = v'(t)$

Exemplo 3: $2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \quad y_1 = t^{-1}$

$2v''t = v' \qquad$ (a)

- ✓ Reduzir a ordem da eq. (a):

$$x(t) = v'(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = v''(t)$$

Exemplo 3: $2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \quad y_1 = t^{-1}$

✓ Reduzir a ordem da eq. (a):

$2v''t = v'$ (a)

$$x(t) = v'(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = v''(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = dx/dt$$

Exemplo 3: $2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \quad y_1 = t^{-1}$

✓ Reduzir a ordem da eq. (a): $2v''t = v'$ (a)

$$x(t) = v'(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = v''(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = dx/dt$$

$$2x'\,t = x$$

Exemplo 3: $2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \quad y_1 = t^{-1}$

- ✓ Reduzir a ordem da eq. (a):

$$2v''t = v' \qquad \text{(a)}$$

$$x(t) = v'(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = v''(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = dx/dt$$

$$2x'\,t = x \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{x}{2t}$$

Exemplo 3: $2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \quad y_1 = t^{-1}$

- ✓ Reduzir a ordem da eq. (a):

$$2v''t = v' \qquad \text{(a)}$$

$$x(t) = v'(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = v''(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = dx/dt$$

$$2x'\,t = x \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{x}{2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{x}{2t}$$

Exemplo 3: $2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \quad y_1 = t^{-1}$

- ✓ Reduzir a ordem da eq. (a):

$$2v''t = v' \qquad \text{(a)}$$

$$x(t) = v'(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = v''(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = dx/dt$$

$$2x'\,t = x \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{x}{2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{x}{2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t}$$

Exemplo 3: $2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \quad y_1 = t^{-1}$

✓ Reduzir a ordem da eq. (a):

$$2v''t = v' \qquad \text{(a)}$$

$$x(t) = v'(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = v''(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = dx/dt$$

$$2x'\,t = x \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{x}{2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{x}{2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t}$$

$$lnx = \frac{1}{2}lnt + C$$

Exemplo 3: $2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \quad y_1 = t^{-1}$

- ✓ Reduzir a ordem da eq. (a): $2v''t = v'$ (a)

$$x(t) = v'(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = v''(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = dx/dt$$

$$2x'\,t = x \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{x}{2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{x}{2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t}$$

$$lnx = \frac{1}{2}lnt + C \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = C_1 t^{1/2}}$$

Exemplo 3: $2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \quad y_1 = t^{-1}$

- ✓ Reduzir a ordem da eq. (a): $2v''t = v'$ (a)

$$x(t) = v'(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = v''(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = dx/dt$$

$$2x'\,t = x \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{x}{2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{x}{2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t}$$

$$\ln x = \frac{1}{2}\ln t + C \quad \Rightarrow \quad x = C_1 t^{1/2}$$

- ✓ Determinar a função v e o conjunto de soluções:

$$v(t) = \int x(t)dt$$

Exemplo 3: $2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \quad y_1 = t^{-1}$

- ✓ Reduzir a ordem da eq. (a):

$$2v''t = v' \qquad \text{(a)}$$

$$x(t) = v'(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = v''(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = dx/dt$$

$$2x'\,t = x \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{x}{2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{x}{2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t}$$

$$lnx = \frac{1}{2}\,lnt + C \quad \Rightarrow \quad x = C_1 t^{1/2}$$

- ✓ Determinar a função v e o conjunto de soluções:

$$v(t) = \int x(t)dt = \int C_1 t^{1/2}\,dt$$

Exemplo 3: $2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \quad y_1 = t^{-1}$

- ✓ Reduzir a ordem da eq. (a): $\quad 2v''t = v' \quad$ (a)

$$x(t) = v'(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = v''(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = dx/dt$$

$$2x'\,t = x \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{x}{2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{x}{2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t}$$

$$lnx = \frac{1}{2}lnt + C \quad \Rightarrow \quad x = C_1 t^{1/2}$$

- ✓ Determinar a função v e o conjunto de soluções:

$$v(t) = \int x(t)dt = \int C_1 t^{1/2}\,dt = \frac{2}{3}C_1 t^{3/2} + C_2$$

Exemplo 3: $2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \quad y_1 = t^{-1}$

- ✓ Reduzir a ordem da eq. (a):

$$2v''t = v' \qquad \text{(a)}$$

$$x(t) = v'(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = v''(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = dx/dt$$

$$2x'\,t = x \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{x}{2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{x}{2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t}$$

$$lnx = \frac{1}{2}lnt + C \quad \Rightarrow \quad x = C_1 t^{1/2}$$

- ✓ Determinar a função v e o conjunto de soluções:

$$v(t) = \int x(t)dt = \int C_1 t^{1/2}\,dt = \frac{2}{3}C_1 t^{3/2} + C_2$$

$$y = vt^{-1} = \left[\frac{2}{3}C_1 t^{\frac{3}{2}} + C_2\right]t^{-1}$$

Exemplo 3: $2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \quad y_1 = t^{-1}$

- ✓ Reduzir a ordem da eq. (a): $2v''t = v' \quad$ (a)

$$x(t) = v'(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = v''(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = dx/dt$$

$$2x'\,t = x \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{x}{2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{x}{2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t}$$

$$lnx = \frac{1}{2}lnt + C \quad \Rightarrow \quad x = C_1 t^{1/2}$$

- ✓ Determinar a função v e o conjunto de soluções:

$$v(t) = \int x(t)dt = \int C_1 t^{1/2}\,dt = \frac{2}{3}C_1 t^{3/2} + C_2$$

$$y = vt^{-1} = \left[\frac{2}{3}C_1 t^{\frac{3}{2}} + C_2\right]t^{-1} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}C_1 t^{\frac{1}{2}} + C_2 t^{-1}$$

Para depois desta aula:

- Estudar seções 3.3 e 3.4 do livro texto (Boyce).
- Resolver o exercício proposto.
- Praticar: exercícios da seções 3.3 e 3.4 do Boyce.

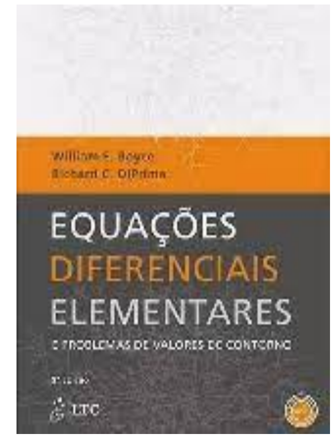
Próxima aula:

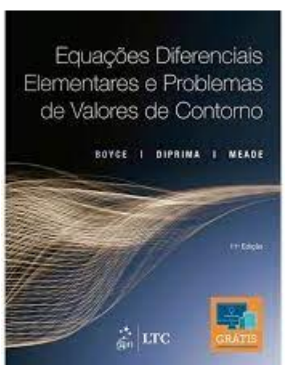
- Método dos coeficientes indeterminados.

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Numeração dos exercícios com base na 9ª ed.





BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2020.