

Cálculo diferencial e integral

Sequências e séries infinitas

Aula 06

Séries de potência

Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Séries de potência.
2. Teorema da Convergência.
3. Representação de funções.
4. Diferenciação e integração de séries.



Séries de potência

Séries de potência

- Uma série de potência tem a forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

x é uma variável e c_n são coeficientes.

Séries de potência

- Uma série de potência tem a forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

x é uma variável e c_n são coeficientes.

- Esta série pode **convergir para alguns valores** de x e **divergir para outros**.

Séries de potência

- Uma série de potência tem a forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

x é uma variável e c_n são coeficientes.

- Esta série pode **convergir para alguns valores** de x e **divergir para outros**.
- A soma é uma função f cujo domínio é o conjunto de todo x para o qual a série de potência converge.
- A função f tem infinitos termos:

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

Exemplo 1 A série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge para que valores de x ?

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

Exemplo 1 A série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge para que valores de x ?

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

✓ Para $-1 < x < 1$ torna-se série geométrica convergente.

Exemplo 1 A série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge para que valores de x ?

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

- ✓ Para $-1 < x < 1$ torna-se série geométrica convergente.
- ✓ Para $|x| \geq 1$ a série será divergente.

Exemplo 1 A série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge para que valores de x ?

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

- ✓ Para $-1 < x < 1$ torna-se série geométrica convergente.
- ✓ Para $|x| \geq 1$ a série será divergente.

A convergência ou divergência de séries de potência depende dos valores de x .

O teste da razão é o mais usado para analisar uma série de potência.

Séries de potência

- Uma série de potência centrada em um ponto a , ou em torno de a , assume a forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots$$

Séries de potência

- Uma série de potência centrada em um ponto a , ou em torno de a , assume a forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots$$

- A série inicia em $n = 0$ e é infinita.

Séries de potência

- Uma série de potência centrada em um ponto a , ou em torno de a , assume a forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots$$

- A série **inicia em $n = 0$** e é infinita.
- Quanto $n = 0$ adota-se a convenção de que $(x - a)^0 = 1$. Isto ocorre mesmo quando $x = a$.

Séries de potência

- Uma série de potência centrada em um ponto a , ou em torno de a , assume a forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots$$

- A série inicia em $n = 0$ e é infinita.
- Quanto $n = 0$ adota-se a convenção de que $(x - a)^0 = 1$. Isto ocorre mesmo quando $x = a$.
- Quando $x = a$ os outros termos são nulos. Portanto a série irá convergir em $x = a$.

Exemplo 2 Para que valores de x a série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} \quad \text{Seja } a_n = (x-3)^n/n$$

Exemplo 2 Para que valores de x a série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} \quad \text{Seja } a_n = (x-3)^n/n$$

✓ Pelo teste da razão tem-se a relação:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n} \right|$$

Exemplo 2 Para que valores de x a série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} \quad \text{Seja } a_n = (x-3)^n/n$$

✓ Pelo teste da razão tem-se a relação:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n} \right| \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} |x-3| \rightarrow |x-3| \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Exemplo 2 Para que valores de x a série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} \quad \text{Seja } a_n = (x-3)^n/n$$

✓ Pelo teste da razão tem-se a relação:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n} \right| \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} |x-3| \rightarrow |x-3| \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

✓ A série é **convergente** se:

$$|x-3| < 1$$

Exemplo 2 Para que valores de x a série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} \quad \text{Seja } a_n = (x-3)^n/n$$

✓ Pelo teste da razão tem-se a relação:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n} \right| \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} |x-3| \rightarrow |x-3| \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

✓ A série é **convergente** se:

$$|x-3| < 1 \iff -1 < x-3 < 1$$

Exemplo 2 Para que valores de x a série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} \quad \text{Seja } a_n = (x-3)^n/n$$

✓ Pelo teste da razão tem-se a relação:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n} \right| \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} |x-3| \rightarrow |x-3| \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

✓ A série é **convergente** se:

$$|x-3| < 1 \iff -1 < x-3 < 1 \iff 2 < x < 4$$

Exemplo 2

Para que valores de x a série converge?

- ✓ O teste da razão não fornece resultado quando $|x - 3| = 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 3)^n}{n}$$

Exemplo 2

Para que valores de x a série converge?

✓ O teste da razão não fornece resultado quando $|x - 3| = 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 3)^n}{n}$$

✓ Então, é necessário testar os extremos $x = 2$ e $x = 4$ diretamente na série.

Exemplo 2

Para que valores de x a série converge?

- ✓ O teste da razão não fornece resultado quando $|x - 3| = 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 3)^n}{n}$$

- ✓ Então, é necessário testar os extremos $x = 2$ e $x = 4$ diretamente na série.
- ✓ Se $x = 4$ na série, ela se tornará $\sum 1/n$, série harmônica divergente.

Exemplo 2

Para que valores de x a série converge?

✓ O teste da razão não fornece resultado quando $|x - 3| = 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 3)^n}{n}$$

✓ Então, é necessário testar os extremos $x = 2$ e $x = 4$ diretamente na série.

✓ Se $x = 4$ na série, ela se tornará $\sum 1/n$, série harmônica divergente.

✓ Se $x = 2$, a série é $\sum (-1)^n/n$, converge pelo Teste da Série Alternada.

Exemplo 2

Para que valores de x a série converge?

- ✓ O teste da razão não fornece resultado quando $|x - 3| = 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 3)^n}{n}$$

- ✓ Então, é necessário testar os extremos $x = 2$ e $x = 4$ diretamente na série.
- ✓ Se $x = 4$ na série, ela se tornará $\sum 1/n$, série harmônica divergente.
- ✓ Se $x = 2$, a série é $\sum (-1)^n/n$, converge pelo Teste da Série Alternada.
- ✓ Portanto, a série converge se $2 \leq x < 4$.

Séries de potência

Principal uso: representação de funções importantes.

Séries de potência

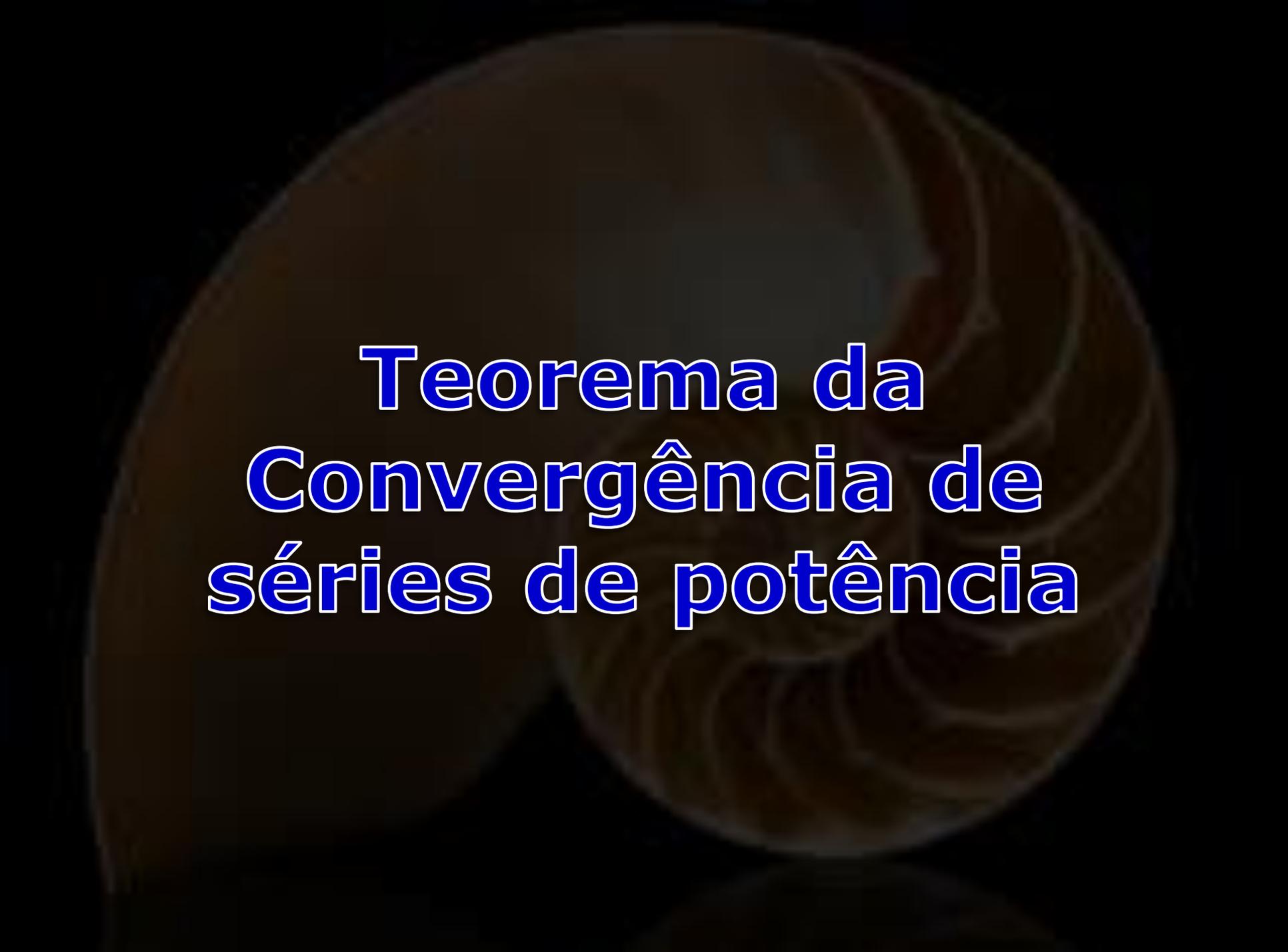
Principal uso: representação de funções importantes.

- Representar uma função em séries permite o cálculo de **derivadas e integrais** complicadas.
- As **equações diferenciais** também podem ser resolvidas expandindo em séries de potência.

Séries de potência

Principal uso: representação de funções importantes.

- Representar uma função em séries permite o cálculo de **derivadas e integrais** complicadas.
- As **equações diferenciais** também podem ser resolvidas expandindo em séries de potência.
- O conjunto de **valores de x** para o qual a série converge será um intervalo.
- Há três possibilidades para esse **intervalo de convergência**, definidos pelo teorema seguinte.



Teorema da Convergência de séries de potência

Teorema da convergência de séries

Para dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$,

existem apenas três possibilidades:

Teorema da convergência de séries

Para dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$,

existem apenas três possibilidades:

- (i) A série converge apenas quando $x = a$.

Teorema da convergência de séries

Para dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$,

existem apenas três possibilidades:

- (i) A série converge apenas quando $x = a$.
- (ii) A série converge para todo x .

Teorema da convergência de séries

Para dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$,

existem apenas três possibilidades:

- (i) A série converge apenas quando $x = a$.
- (ii) A série converge para todo x .
- (iii) Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x - a| < R$ e diverge se $|x - a| > R$.

Teorema da convergência de séries

Para dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$,

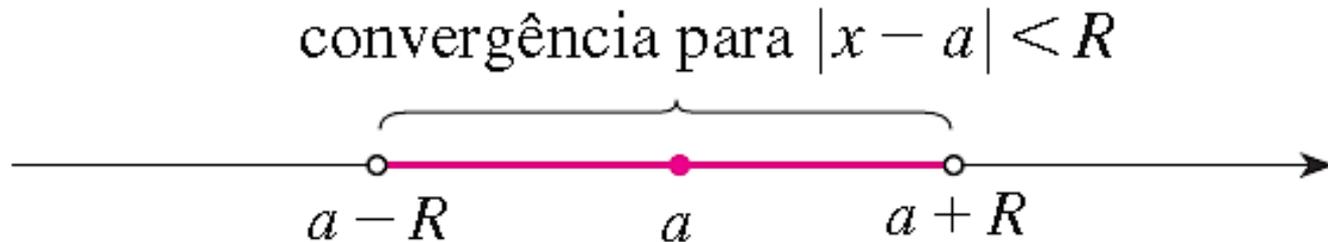
existem apenas três possibilidades:

- (i) A série converge apenas quando $x = a$.
- (ii) A série converge para todo x .
- (iii) Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x - a| < R$ e diverge se $|x - a| > R$.

R : raio de convergência da série.

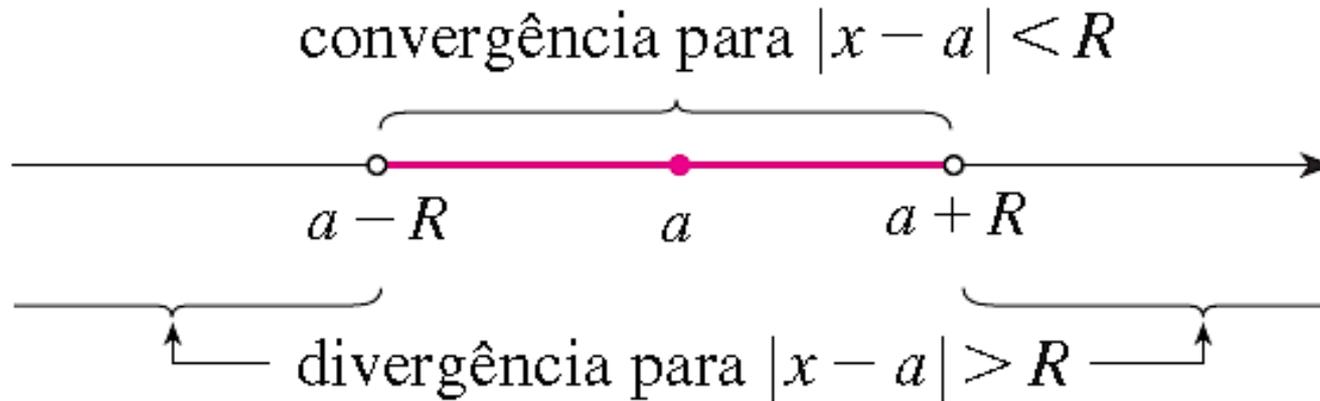
Teorema da convergência de séries

- Representação do raio de convergência da série:



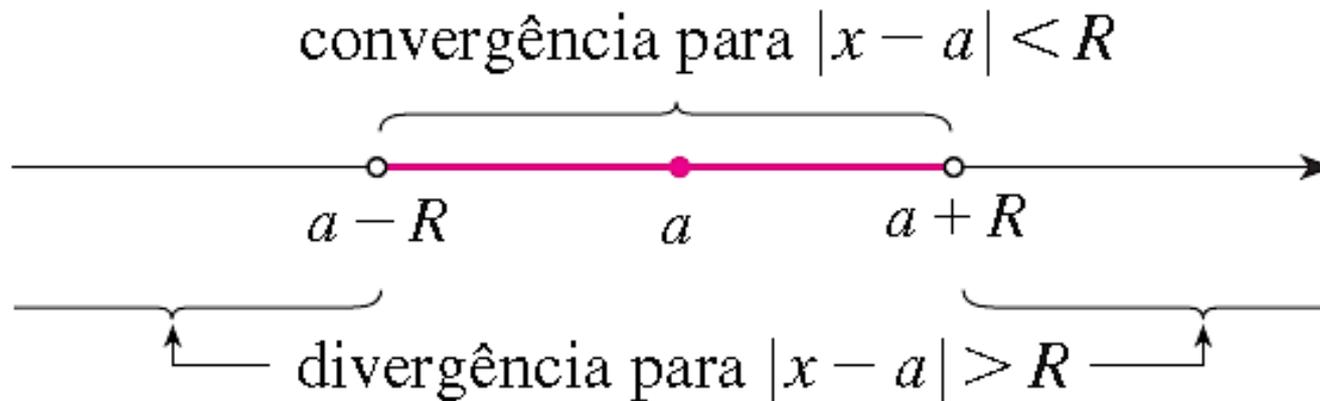
Teorema da convergência de séries

- Representação do raio de convergência da série:



Teorema da convergência de séries

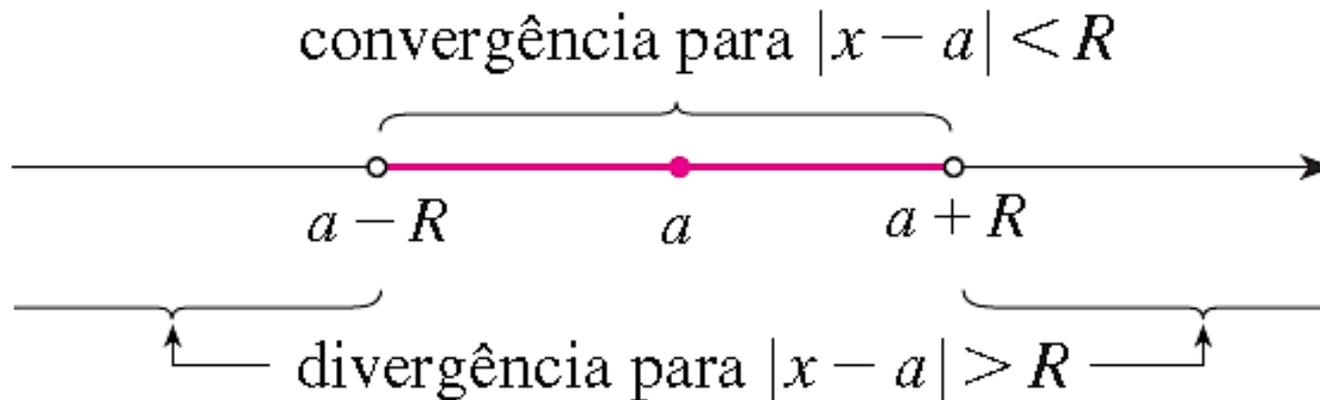
- Representação do raio de convergência da série:



- Na maioria das séries de potência, utiliza-se o teste da razão ou da raiz para verificar a convergência.

Teorema da convergência de séries

- Representação do raio de convergência da série:



- Na maioria das séries de potência, utiliza-se o teste da razão ou da raiz para verificar a convergência.
- As extremidades do intervalo devem ser testadas por outro teste, adequado para cada caso.

Teorema da convergência de séries

➤ Raio de convergência dos exemplos.

	Série	Raio de convergência	Intervalo de convergência
Exemplo 1	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R = 1$	$(-1, 1)$
Exemplo 2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 3)^n}{n}$	$R = 1$	$[2, 4)$

Exemplo 3 Encontrar o raio de convergência da série.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}} \quad a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$$

Exemplo 3 Encontrar o raio de convergência da série.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}} \quad a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$$

✓ Pelo teste da razão tem-se a relação:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n} \right|$$

Exemplo 3 Encontrar o raio de convergência da série.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}} \quad a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$$

✓ Pelo teste da razão tem-se a relação:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n} \right| \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} \right) \frac{|x+2|}{3} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{|x+2|}{3} \end{aligned}$$

Exemplo 3 Encontrar o raio de convergência da série.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}} \quad a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$$

✓ Pelo teste da razão tem-se a relação:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n} \right| \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} \right) \frac{|x+2|}{3} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{|x+2|}{3} \end{aligned}$$

✓ A série é **convergente** se: $\frac{|x+2|}{3} < 1$

$$-3 < x + 2 < 3$$

Exemplo 3 Encontrar o raio de convergência da série.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}} \quad a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$$

✓ Pelo teste da razão tem-se a relação:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n} \right| \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} \right) \frac{|x+2|}{3} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{|x+2|}{3} \end{aligned}$$

✓ A série é **convergente** se: $\frac{|x+2|}{3} < 1$

$$-3 < x + 2 < 3 \quad \Rightarrow \quad -5 < x < 1$$

Exemplo 3 Encontrar o raio de convergência da série.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}} \quad a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$$

✓ Pelo teste da razão tem-se a relação:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n} \right| \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} \right) \frac{|x+2|}{3} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{|x+2|}{3} \end{aligned}$$

✓ A série é **convergente** se: $\frac{|x+2|}{3} < 1$

$$-3 < x+2 < 3 \quad \Rightarrow \quad -5 < x < 1 \quad \Rightarrow$$

Raio de convergência

$$R = 3$$

Exemplo 3 Encontrar o raio de convergência da série.

Teste nos extremos: $x = -5$ e $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

Exemplo 3 Encontrar o raio de convergência da série.

Teste nos extremos: $x = -5$ e $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

✓ Quando $x = -5$ a série é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$$

Exemplo 3

 Encontrar o raio de convergência da série.

Teste nos extremos: $x = -5$ e $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

✓ Quando $x = -5$ a série é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \quad \text{Divergente}$$

Limite do termo geral
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \neq 0$

Exemplo 3

 Encontrar o raio de convergência da série.

Teste nos extremos: $x = -5$ e $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

✓ Quando $x = -5$ a série é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \quad \text{Divergente}$$

Limite do termo geral
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \neq 0$

✓ Quando $x = 1$ a série é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} n$$

Exemplo 3

 Encontrar o raio de convergência da série.

Teste nos extremos: $x = -5$ e $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

✓ Quando $x = -5$ a série é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \quad \text{Divergente}$$

Limite do termo geral
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \neq 0$

✓ Quando $x = 1$ a série é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} n \quad \text{Divergente}$$

Teste da divergência
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \neq 0$

Exemplo 3

 Encontrar o raio de convergência da série.

Teste nos extremos: $x = -5$ e $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

✓ Quando $x = -5$ a série é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \quad \text{Divergente}$$

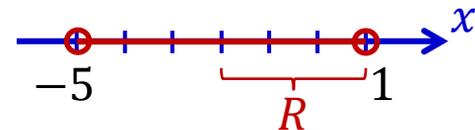
Limite do termo geral
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \neq 0$

✓ Quando $x = 1$ a série é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} n \quad \text{Divergente}$$

Teste da divergência
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \neq 0$

✓ Assim, a série é **convergente** no intervalo $(-5, 1)$ e raio de convergência $R = 3$.





Representação de funções por séries de potência

Representação de funções

- A representação de “funções” por soma infinita de termos era comum no início do cálculo.

Representação de funções

- A representação de “funções” por soma infinita de termos era comum no início do cálculo.
- Atualmente, essa técnica é útil para integrar funções que não têm antiderivadas elementares.

Representação de funções

- A representação de “funções” por soma infinita de termos era comum no início do cálculo.
- Atualmente, essa técnica é útil para integrar **funções que não têm antiderivadas** elementares.
- O método também é utilizado para resolver **equações diferenciais** (eq. que contém derivadas).

Representação de funções

- A representação de “funções” por soma infinita de termos era comum no início do cálculo.
- Atualmente, essa técnica é útil para integrar **funções que não têm antiderivadas** elementares.
- O método também é utilizado para resolver **equações diferenciais** (eq. que contém derivadas).
- Mesmo as funções conhecidas podem ser representadas como uma **soma de polinômios**.
- Derivar e integrar polinômios é mais simples.

Representação de funções

- Seja uma série geométrica convergente com primeiro termo $a = 1$, razão $r = x$ e $|x| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

Representação de funções

- Seja uma série geométrica convergente com primeiro termo $a = 1$, razão $r = x$ e $|x| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

- Olhando de um outro ponto de vista, podemos nos referir a esta série como a expressão da função:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

Representação de funções

- Seja uma série geométrica convergente com primeiro termo $a = 1$, razão $r = x$ e $|x| < 1$:

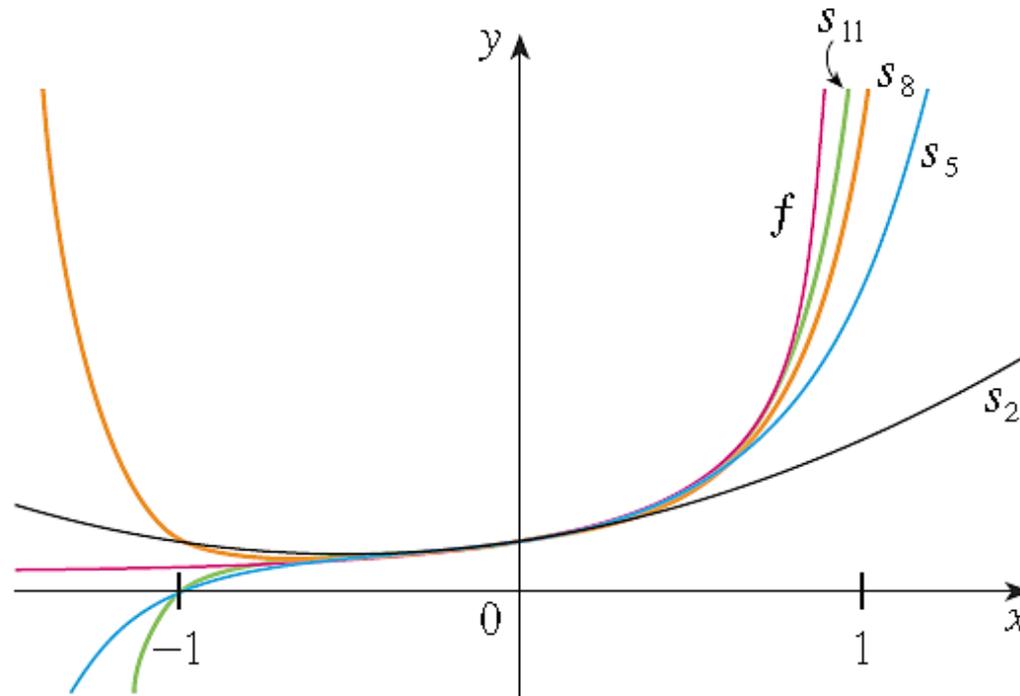
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

- Olhando de um outro ponto de vista, podemos nos referir a esta série como a expressão da função:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

- A medida em que n aumenta, $S_n(x)$ se aproxima melhor de f no intervalo $(-1, 1)$.

Representação de funções



$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

✓ Se n aumenta, $S_n(x)$ se aproxima de f em $(-1, 1)$.

Exemplo 4 Expressar a função $f = \frac{1}{1+x^2}$ como uma série e encontrar o intervalo de convergência.

Exemplo 4 Expressar a função $f = \frac{1}{1+x^2}$ como uma série e encontrar o intervalo de convergência.

✓ Trocando x por x^2 na função anterior:

$$f = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$$

Exemplo 4 Expressar a função $f = \frac{1}{1+x^2}$ como uma série e encontrar o intervalo de convergência.

✓ Trocando x por x^2 na função anterior:

$$f = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

Exemplo 4 Expressar a função $f = \frac{1}{1+x^2}$ como uma série e encontrar o intervalo de convergência.

✓ Trocando x por x^2 na função anterior:

$$f = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

Exemplo 4 Expressar a função $f = \frac{1}{1+x^2}$ como uma série e encontrar o intervalo de convergência.

✓ Trocando x por x^2 na função anterior:

$$f = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

✓ A série a valores absolutos é uma série geométrica de razão x^2 . Ela converge se:

$$x^2 < 1$$

Exemplo 4 Expressar a função $f = \frac{1}{1+x^2}$ como uma série e encontrar o intervalo de convergência.

✓ Trocando x por x^2 na função anterior:

$$f = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

✓ A série a valores absolutos é uma série geométrica de razão x^2 . Ela converge se:

$$x^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < x < 1$$

Exemplo 4 Expressar a função $f = \frac{1}{1+x^2}$ como uma série e encontrar o intervalo de convergência.

✓ Trocando x por x^2 na função anterior:

$$f = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

✓ A série a valores absolutos é uma série geométrica de razão x^2 . Ela converge se:

$$x^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < x < 1$$

✓ Portanto, o intervalo de convergência é $(-1,1)$.



Diferenciação e integração de séries

Diferenciação e integração de séries

- Vimos que a soma de uma série de potência infinita é uma função $f = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - a)^n$.
- O domínio de f será o intervalo de convergência R da série.

Diferenciação e integração de séries

- Vimos que a soma de uma série de potência infinita é uma função $f = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - a)^n$.
- O domínio de f será o intervalo de convergência R da série.
- Caso seja necessário, será possível derivar e integrar essa função?
- O teorema seguinte afirma que isso é possível sob condições para o raio de convergência.

Teorema da diferenciação e integração

Se a série de potências $\sum c_n(x - a)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$$

Teorema da diferenciação e integração

Se a série de potências $\sum c_n(x - a)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$$

é diferenciável no intervalo $(a - R, a + R)$ e

$$(i) \quad f'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x - a)^{n-1}$$

Teorema da diferenciação e integração

Se a série de potências $\sum c_n(x - a)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$$

é diferenciável no intervalo $(a - R, a + R)$ e

$$(i) \quad f'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x - a)^{n-1}$$

$$(ii) \quad \int f(x) dx = C + c_0(x - a) + c_1 \frac{(x - a)^2}{2} + \cdots = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1}$$

Os raios de convergência das séries (i) e (ii) são ambos R .

Diferenciação e integração de séries

➤ As equações (i) e (ii) podem ser reescritas por:

$$(iii) \quad \frac{d}{dx} \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} [c_n (x - a)^n]$$

$$(iv) \quad \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n (x - a)^n dx$$

Diferenciação e integração de séries

- As equações (i) e (ii) podem ser reescritas por:

$$(iii) \quad \frac{d}{dx} \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} [c_n (x - a)^n]$$

$$(iv) \quad \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n (x - a)^n dx$$

- As propriedades da derivada da soma e da integral da soma são válidas para séries de potência.
- O intervalo de convergência pode mudar após a diferenciação ou a integração.

Exemplo 5 Expressar pela diferenciação a função $f = \frac{1}{(1-x)^2}$ como uma série de potência.

Exemplo 5 Expressar pela diferenciação a função

$$f = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ como uma série de potência.}$$

✓ A série de potência da função seguinte é conhecida:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Exemplo 5 Expressar pela diferenciação a função

$$f = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ como uma série de potência.}$$

✓ A série de potência da função seguinte é conhecida:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

✓ Diferenciar termo a termo dessa série:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Exemplo 5 Expressar pela diferenciação a função

$$f = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ como uma série de potência.}$$

✓ A série de potência da função seguinte é conhecida:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

✓ Diferenciar termo a termo dessa série:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

✓ Trocar n por $n + 1$ para que a série inicie em $n = 0$.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

Exemplo 5 Expressar pela diferenciação a função

$$f = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ como uma série de potência.}$$

✓ A série de potência da função seguinte é conhecida:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

✓ Diferenciar termo a termo dessa série:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

✓ Trocar n por $n + 1$ para que a série inicie em $n = 0$.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

✓ Portanto, o intervalo de convergência é $(-1,1)$.

Exemplo 6 Encontrar uma representação em série de potência para a função $f = \ln(1 + x)$.

Exemplo 6 Encontrar uma representação em série de potência para a função $f = \ln(1 + x)$.

✓ Diferenciando a função dada:

$$\frac{d}{dx} \ln(1 + x) = \frac{1}{1 + x} = \frac{1}{1 - (-x)}$$

Exemplo 6 Encontrar uma representação em série de potência para a função $f = \ln(1 + x)$.

✓ Diferenciando a função dada:

$$\frac{d}{dx} \ln(1 + x) = \frac{1}{1 + x} = \frac{1}{1 - (-x)}$$

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad |x| < 1$$

Exemplo 6 Encontrar uma representação em série de potência para a função $f = \ln(1 + x)$.

✓ Diferenciando a função dada:

$$\frac{d}{dx} \ln(1 + x) = \frac{1}{1 + x} = \frac{1}{1 - (-x)}$$

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad |x| < 1$$

✓ Integrando em ambos os lados da última função

$$\int \frac{1}{1 + x} dx = \int (1 - x + x^2 + \dots) dx$$

Exemplo 6 Encontrar uma representação em série de potência para a função $f = \ln(1 + x)$.

✓ Diferenciando a função dada:

$$\frac{d}{dx} \ln(1 + x) = \frac{1}{1 + x} = \frac{1}{1 - (-x)}$$

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad |x| < 1$$

✓ Integrando em ambos os lados da última função

$$\int \frac{1}{1 + x} dx = \int (1 - x + x^2 + \dots) dx$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + C$$

Exemplo 6 Encontrar uma representação em série de potência para a função $f = \ln(1 + x)$.

✓ Diferenciando a função dada:

$$\frac{d}{dx} \ln(1 + x) = \frac{1}{1 + x} = \frac{1}{1 - (-x)}$$

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad |x| < 1$$

✓ Integrando em ambos os lados da última função

$$\int \frac{1}{1 + x} dx = \int (1 - x + x^2 + \dots) dx$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + C$$

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + C \quad |x| < 1$$



Exercícios

Exercícios:

1) Para que valores de x a série converge?

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^n (x - 2)^n$$

b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x - 3}{2} \right)^n$$

2) Encontrar a representação em série de $f = \ln(1 - x)$.

Exercícios:

1) Para que valores de x a série converge?

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^n (x - 2)^n$$

Respostas

$$\frac{7}{4} < x < \frac{9}{4}$$

b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x - 3}{2} \right)^n$$

$$1 < x < 5$$

2) Encontrar a representação em série de $f = \ln(1 - x)$.

Resposta:
$$\ln(1 - x) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad |x| < 1$$

Para depois desta aula:

- Estudar seções 11.8 e 11.9 do livro texto.
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar: exercícios Seções 11.8 e 11.9.

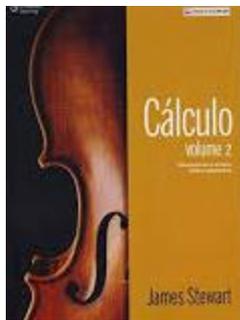
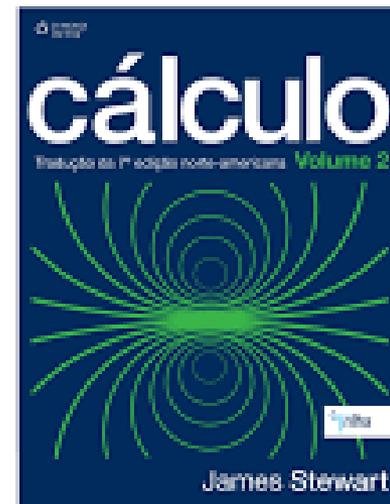
Próxima aula:

- Séries de Taylor e de Maclaurin.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios
com base na 7ª ed. ►



STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.**
São Paulo: Cengage, 2016.