Cálculo diferencial e integral

Sequências e séries infinitas

Aula 07
Séries de Taylor e Maclaurin

Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Séries de Taylor e Maclaurin.
2. Exemplos.
3. Exercícios.

Séries de Taylor e Maclaurin

Série de Taylor

- Encontramos séries de potência de funções semelhantes a expressão da soma de uma série geométrica $\frac{1}{1-x}$.

Série de Taylor

- Encontramos séries de potência de funções semelhantes a expressão da soma de uma série geométrica $\frac{1}{1-x}$.

- Para aplicações, necessitamos encontrar séries para um número maior de funções.

Série de Taylor

- Encontramos séries de potência de funções semelhantes a expressão da soma de uma série geométrica $\frac{1}{1-x}$.
- Para aplicações, necessitamos encontrar séries para um número maior de funções.
- Será desejável representar em séries funções como: e^x, $senx$, $\cos x$, tgx e suas variações.

Série de Taylor

- Encontramos séries de potência de funções semelhantes a expressão da soma de uma série geométrica $\frac{1}{1-x}$.
- Para aplicações, necessitamos encontrar séries para um número maior de funções.
- Será desejável representar em séries funções como: e^x, $senx$, $\cos x$, tgx e suas variações.
- A série de Taylor permite encontrar tais funções.

Série de Taylor

- Seja f uma função da variável x.

Série de Taylor

- Seja f uma função da variável x.
- Supondo que f possa ser representada por uma série de potência, com $|x - a| < R$, da forma:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots \quad (1)$$

Série de Taylor

- Seja f uma função da variável x.
- Supondo que f possa ser representada por uma série de potência, com $|x-a|<R$, da forma:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots \quad (1)$$

- Para que fique completamente definida será necessário calcular os coeficientes c_n.

Série de Taylor

- Seja f uma função da variável x.
- Supondo que f possa ser representada por uma série de potência, com $|x - a| < R$, da forma:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots \quad (1)$$

- Para que fique completamente definida será necessário calcular os coeficientes c_n.

$$\text{se} \;\; x = a \text{ na Equação 1:} \quad f(a) = c_0$$

Série de Taylor

- Seja f uma função da variável x.
- Supondo que f possa ser representada por uma série de potência, com $|x-a|<R$, da forma:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots \quad (1)$$

- Para que fique completamente definida será necessário calcular os coeficientes c_n.

se $x = a$ na Equação 1: $f(a) = c_0$

- Derivando a equação (1) termo a termo tem-se:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots \quad (2)$$

Série de Taylor

- Seja f uma função da variável x.
- Supondo que f possa ser representada por uma série de potência, com $|x-a|<R$, da forma:

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+\cdots \quad (1)$$

- Para que fique completamente definida será necessário calcular os coeficientes c_n.

se $x=a$ na Equação 1: $f(a)=c_0$

- Derivando a equação (1) termo a termo tem-se:

$$f'(x)=c_1+2c_2(x-a)+3c_3(x-a)^2+\cdots \quad (2)$$

se $x=a$ na Equação 2: $f'(a)=c_1$

Série de Taylor

- Derivando a equação (2) em ambos os lados:

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x - a) + 3 \cdot 4c_4(x - a)^2 + \cdots$$

Série de Taylor

- Derivando a equação (2) em ambos os lados:

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x - a) + 3 \cdot 4c_4(x - a)^2 + \cdots$$

se $x = a$ na Equação 3: $f''(a) = 2c_2$

Série de Taylor

- Derivando a equação (2) em ambos os lados:

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + 3 \cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots$$

se $x = a$ na Equação 3: $f''(a) = 2c_2$

- Repetindo-se o processo de derivação e substituindo $x = a$ determinam-se todos os coeficientes.

Série de Taylor

- Derivando a equação (2) em ambos os lados:

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x - a) + 3 \cdot 4c_4(x - a)^2 + \cdots$$

se $x = a$ na Equação 3: $f''(a) = 2c_2$

- Repetindo-se o processo de derivação e substituindo $x = a$ determinam-se todos os coeficientes.

- Nestas derivadas observamos um padrão:

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot nc_n = n!c_n$$

Série de Taylor

- Derivando a equação (2) em ambos os lados:

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + 3 \cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots$$

se $x = a$ na Equação 3: $f''(a) = 2c_2$

- Repetindo-se o processo de derivação e substituindo $x = a$ determinam-se todos os coeficientes.

- Nestas derivadas observamos um padrão:

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot nc_n = n!c_n$$

- Portanto, isolando o coeficiente c_n tem-se:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Série de Taylor

- Substituindo-se o coeficiente correspondente na expressão da função f tem-se a série de Taylor:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots$$

Série de Taylor

- Substituindo-se o coeficiente correspondente na expressão da função f tem-se a série de Taylor:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots$$

Série de Taylor

- Substituindo-se o coeficiente correspondente na expressão da função f tem-se a série de Taylor:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n}$$

Série de Taylor da função f

$$|x - a| < R$$

Série de Taylor

- Substituindo-se o coeficiente correspondente na expressão da função f tem-se a série de Taylor:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Série de Taylor da função f

$$|x-a| < R$$

- Quando $a = 0$ tem-se a série de Maclaurin.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Série de Maclaurin da função f

Série de Taylor

Observações

- Nem toda função pode ser representada por uma série de Taylor.

Série de Taylor

Observações

- Nem toda função pode ser representada por uma série de Taylor.
- Funções analíticas como e^x, $senx$, $\cos x$, tgx possuem a representação nos intervalos em que a série for convergente.

Série de Taylor

Observações

- Nem toda função pode ser representada por uma série de Taylor.
- Funções analíticas como e^x, $senx$, $\cos x$, tgx possuem a representação nos intervalos em que a série for convergente.
- O intervalo de convergência para e^x, $senx$, $\cos x$ é todo conjunto dos reais.
- Para tgx, $[-1,1]$ é o intervalo de convergência.

Exemplos

Exemplo 1 Obter a série de Taylor $f(x) = e^x$ em $a = 0$. Encontrar o raio de convergência.

✓ Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$,

Exemplo 1 Obter a série de Taylor $f(x) = e^x$ em $a = 0$. Encontrar o raio de convergência.

✓ Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$, portanto $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

Exemplo 1 Obter a série de Taylor $f(x) = e^x$ em $a = 0$.
Encontrar o raio de convergência.

- ✓ Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$, portanto $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

- ✓ Portanto, a série de Maclaurin para f em 0 é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Exemplo 1 Obter a série de Taylor $f(x) = e^x$ em $a = 0$. Encontrar o raio de convergência.

✓ Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$, portanto $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

✓ Portanto, a série de Maclaurin para f em 0 é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Exemplo 1 Obter a série de Taylor $f(x) = e^x$ em $a = 0$. Encontrar o raio de convergência.

✓ Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$, portanto $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

✓ Portanto, a série de Maclaurin para f em 0 é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

✓ Para o raio de convergência fazemos $a_n = x^n/n!$. Então,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \underset{\text{quando } n \to \infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

Exemplo 1 Obter a série de Taylor $f(x) = e^x$ em $a = 0$.
Encontrar o raio de convergência.

✓ Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$, portanto $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

✓ Portanto, a série de Maclaurin para f em 0 é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

✓ Para o raio de convergência fazemos $a_n = x^n/n!$. Então,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \underset{\substack{\text{quando} \\ n \to \infty}}{\longrightarrow} 0 < 1$$

✓ pelo Teste da Razão, a série converge para todo x e $R = \infty$.

Exemplo 2 Obter a série de Taylor de $f(x) = e^{x^2}$ e expressar a integral $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ por uma série.

Exemplo 2 Obter a série de Taylor de $f(x) = e^{x^2}$ e expressar a integral $\int_0^1 e^{x^2}\, dx$ por uma série.

- ✓ Partindo da série da exponencial e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Exemplo 2 Obter a série de Taylor de $f(x) = e^{x^2}$ e expressar a integral $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ por uma série.

- ✓ Partindo da série da exponencial e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- ✓ Trocando x na série de e^x por x^2:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^3)^2}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

Exemplo 2 Obter a série de Taylor de $f(x) = e^{x^2}$ e expressar a integral $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ por uma série.

- ✓ Partindo da série da exponencial e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- ✓ Trocando x na série de e^x por x^2:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^3)^2}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

- ✓ A primitiva da função $f(x) = e^{x^2}$ é então:

$$\int e^{x^2}\,dx = \int \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \cdots\right) dx$$

Exemplo 2 $f(x) = e^{x^2}$ expressar $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ em série.

$$\int e^{x^2}\,dx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5.2!} + \frac{x^7}{7.3!} +$$

Exemplo 2 $f(x) = e^{x^2}$ expressar $\int_0^1 e^{x^2}\, dx$ em série.

$$\int e^{x^2}\, dx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5.2!} + \frac{x^7}{7.3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

Exemplo 2 $f(x) = e^{x^2}$ expressar $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ em série.

$$\int e^{x^2}\,dx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5.2!} + \frac{x^7}{7.3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

- ✓ Portanto, a integral definida será:

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}$$

Exemplo 2 $f(x) = e^{x^2}$ expressar $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ em série.

$$\int e^{x^2}\,dx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5.2!} + \frac{x^7}{7.3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

- ✓ Portanto, a integral definida será:

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}$$

- ❖ Este processo pode ser aplicado para funções nas quais não se conhece a primitiva.

Exemplo 2 $f(x) = e^{x^2}$ expressar $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ em série.

$$\int e^{x^2}\,dx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5.2!} + \frac{x^7}{7.3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

✓ Portanto, a integral definida será:

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}$$

- Este processo pode ser aplicado para funções nas quais não se conhece a primitiva.
- O resultado da integral definida será uma aproximação para o valor real.

Exercícios

Exercícios:

1) Obter a série de Taylor das funções em $a = 0$. Encontrar os intervalos de convergência.

a) $f(x) = senx$

b) $f(x) = cosx$

2) Encontrar uma série para $\int \frac{senx}{x} dx$ em $R \neq 0$.

Exercícios:

1) Obter a série de Taylor das funções em $a = 0$. Encontrar os intervalos de convergência.

a) $f(x) = senx$

$$senx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

b) $f(x) = cosx$

$$cosx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}$$

Respostas

2) Encontrar uma série para $\int \frac{senx}{x} dx$ em $R \neq 0$.

Resposta: $$\int \frac{senx}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \qquad x \neq 0$$

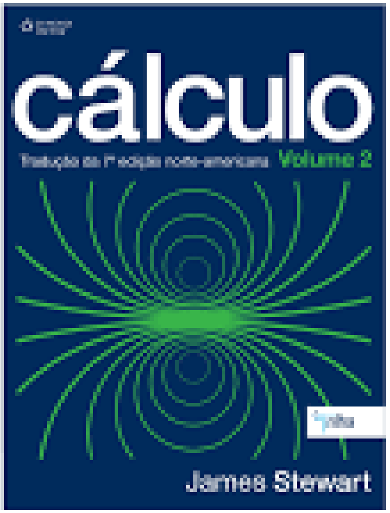
Para depois desta aula:

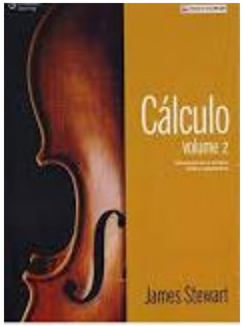
- Estudar seções 11.10 do livro texto.
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar: exercícios Seções 11.10.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed. ▶





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.