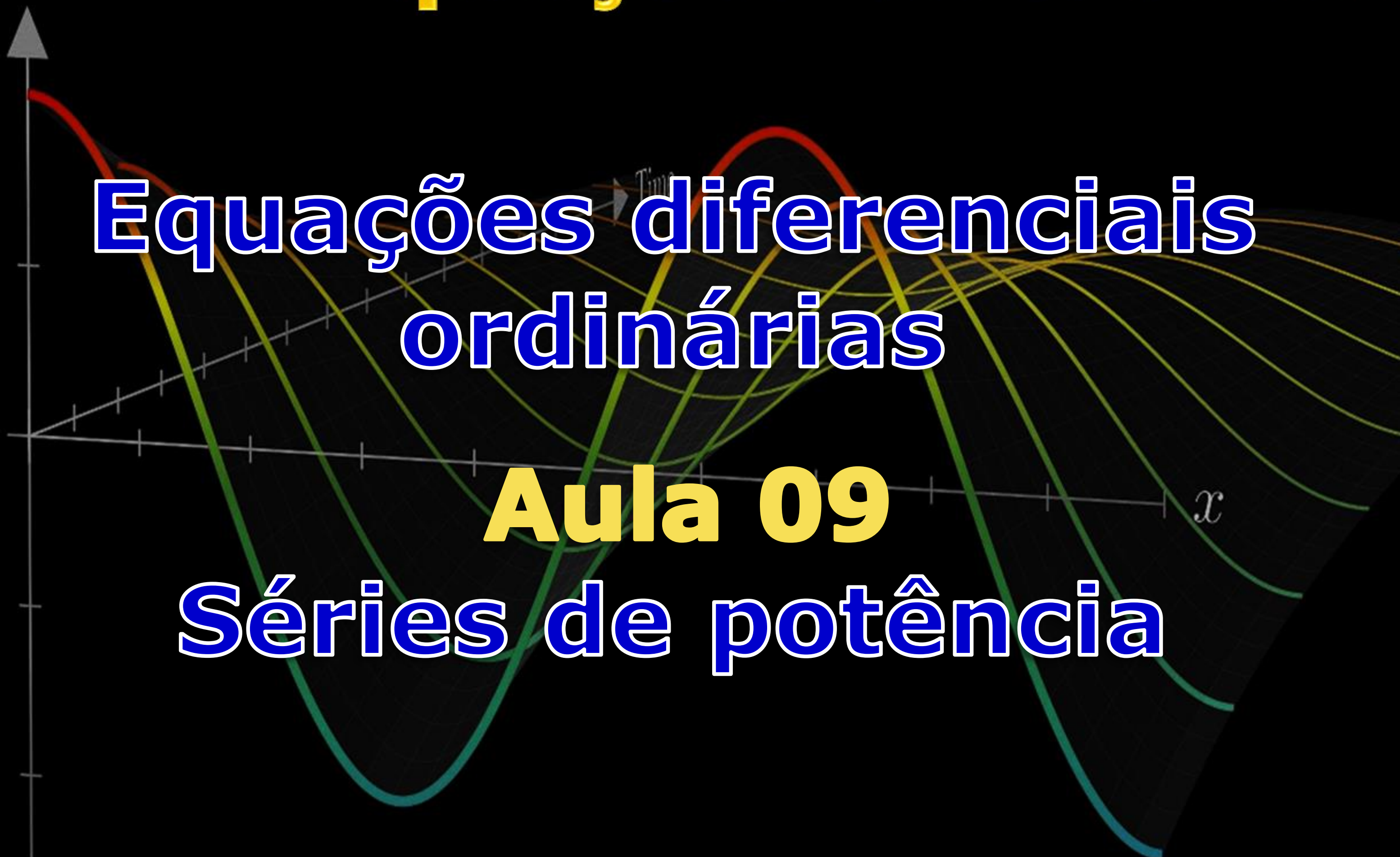
Equações diferenciais



Equações diferenciais ordinárias

Aula 09

Séries de potência

Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Séries de potência.
2. Teorema da Convergência.
3. Representação de funções.
4. Diferenciação e integração de séries.

Séries
de potência

Séries de potência

- Uma série de potência tem a forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

x é uma variável e c_n são coeficientes.

Séries de potência

- Uma série de potência tem a forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

x é uma variável e c_n são coeficientes.

- Esta série pode convergir para alguns valores de x e divergir para outros.

Séries de potência

- Uma série de potência tem a forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

  x é uma variável e c_n são coeficientes.

- Esta série pode convergir para alguns valores de x e divergir para outros.

- A soma é uma função f cujo domínio é o conjunto de todo x para o qual a série de potência converge.

- A função f tem infinitos termos:

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

Exemplo 1 A série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge para que valores de x?

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

Exemplo 1 A série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge para que valores de x?

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

- ✓ Para $-1 < x < 1$ torna-se série geométrica convergente.

Exemplo 1 A série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge para que valores de x?

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

- ✓ Para $-1 < x < 1$ torna-se série geométrica convergente.
- ✓ Para $|x| \geq 1$ a série será divergente.

Exemplo 1 A série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge para que valores de x?

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

- ✓ Para $-1 < x < 1$ torna-se série geométrica convergente.
- ✓ Para $|x| \geq 1$ a série será divergente.

A convergência ou divergência de séries de potência depende dos valores de x.

O teste da razão é o mais usado para analisar uma série de potência.

Séries de potência

- Uma série de potência centrada em um ponto a, ou em torno de a, assume a forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

Séries de potência

- Uma série de potência centrada em um ponto a, ou em torno de a, assume a forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

- A série inicia em $n = 0$ e é infinita.

Séries de potência

- Uma série de potência centrada em um ponto a, ou em torno de a, assume a forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

- A série inicia em $n = 0$ e é infinita.

- Quanto $n = 0$ adota-se a convenção de que $(x-a)^0 = 1$. Isto ocorre mesmo quando $x = a$.

Séries de potência

- Uma série de potência centrada em um ponto a, ou em torno de a, assume a forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

- A série inicia em $n = 0$ e é infinita.
- Quanto $n = 0$ adota-se a convenção de que $(x-a)^0 = 1$. Isto ocorre mesmo quando $x = a$.
- Quando $x = a$ os outros termos são nulos. Portanto a série irá convergir em $x = a$.

Exemplo 2 Para que valores de x a série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$$

Seja $a_n = (x-3)^n/n$

Exemplo 2 Para que valores de x a série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} \qquad \text{Seja } a_n = (x-3)^n/n$$

✓ Pelo teste da razão tem-se a relação:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n}\right|$$

Exemplo 2 Para que valores de x a série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} \qquad \text{Seja } a_n = (x-3)^n/n$$

✓ Pelo teste da razão tem-se a relação:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n}\right|$$

$$= \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}|x-3| \to |x-3| \quad \begin{array}{c}\text{quando}\\ n \to \infty\end{array}$$

Exemplo 2 Para que valores de x a série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} \qquad \text{Seja } a_n = (x-3)^n/n$$

- ✓ Pelo teste da razão tem-se a relação:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n}\right|$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{n}}|x-3| \to |x-3| \quad \text{quando } n \to \infty$$

- ✓ A série é convergente se:

$$|x-3| < 1$$

Exemplo 2 Para que valores de x a série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} \qquad \text{Seja } a_n = (x-3)^n/n$$

✓ Pelo teste da razão tem-se a relação:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n}\right|$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{n}}|x-3| \underset{\substack{\text{quando} \\ n\to\infty}}{\longrightarrow} |x-3|$$

✓ A série é convergente se:

$$|x-3| < 1 \iff -1 < x-3 < 1$$

Exemplo 2 Para que valores de x a série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} \qquad \text{Seja } a_n = (x-3)^n/n$$

✓ Pelo teste da razão tem-se a relação:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n}\right|$$

$$= \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}|x-3| \to |x-3| \quad \underset{n\to\infty}{\text{quando}}$$

✓ A série é convergente se:

$$|x-3| < 1 \iff -1 < x-3 < 1 \iff \boxed{2 < x < 4}$$

Exemplo 2 Para que valores de x a série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$$

- ✓ O teste da razão não fornece resultado quando $|x-3| = 1$.

Exemplo 2 Para que valores de x a série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$$

- ✓ O teste da razão não fornece resultado quando $|x-3| = 1$.
- ✓ Então, é necessário testar os extremos $x = 2$ e $x = 4$ diretamente na série.

Exemplo 2 Para que valores de x a série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$$

- ✓ O teste da razão não fornece resultado quando $|x-3|=1$.
- ✓ Então, é necessário testar os extremos $x=2$ e $x=4$ diretamente na série.
- ✓ Se $x=4$ na série, ela se tornará

  $\Sigma\, 1/n$, série harmônica divergente.

Exemplo 2 Para que valores de x a série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$$

- ✓ O teste da razão não fornece resultado quando $|x-3| = 1$.
- ✓ Então, é necessário testar os extremos $x = 2$ e $x = 4$ diretamente na série.
- ✓ Se $x = 4$ na série, ela se tornará

  $\Sigma\, 1/n$, série harmônica divergente.
- ✓ Se $x = 2$, a série é $\Sigma\, (-1)^n/n$,

  converge pelo Teste da Série Alternada.

Exemplo 2 Para que valores de x a série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$$

- ✓ O teste da razão não fornece resultado quando $|x-3| = 1$.
- ✓ Então, é necessário testar os extremos $x = 2$ e $x = 4$ diretamente na série.
- ✓ Se $x = 4$ na série, ela se tornará

  $\Sigma\, 1/n$, série harmônica divergente.
- ✓ Se $x = 2$, a série é $\Sigma\, (-1)^n/n$,

  converge pelo Teste da Série Alternada.
- ✓ Portanto, a série converge se $2 \le x < 4$.

Séries de potência

Principal uso: representação de funções importantes.

Séries de potência

Principal uso: representação de funções importantes.

- Representar uma função em séries permite o cálculo de derivadas e integrais complicadas.

- As equações diferenciais também podem ser resolvidas expandindo em séries de potência.

Séries de potência

Principal uso: representação de funções importantes.

- Representar uma função em séries permite o cálculo de derivadas e integrais complicadas.
- As equações diferenciais também podem ser resolvidas expandindo em séries de potência.
- O conjunto de valores de x para o qual a série converge será um intervalo.
- Há três possibilidades para esse intervalo de convergência, definidos pelo teorema seguinte.

Teorema da Convergência de séries de potência

Teorema da convergência de séries

Para dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$,

existem apenas três possibilidades:

Teorema da convergência de séries

Para dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$,

existem apenas três possibilidades:

(i) A série converge apenas quando $x = a$.

Teorema da convergência de séries

Para dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$,

existem apenas três possibilidades:

(i) A série converge apenas quando $x = a$.

(ii) A série converge para todo x.

Teorema da convergência de séries

Para dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$,

existem apenas três possibilidades:

(i) A série converge apenas quando $x = a$.

(ii) A série converge para todo x.

(iii) Existe um número positivo R tal que a série

converge se $|x - a| < R$ e

diverge se $|x - a| > R$.

Teorema da convergência de séries

Para dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$,

existem apenas três possibilidades:

(i) A série converge apenas quando $x = a$.

(ii) A série converge para todo x.

(iii) Existe um número positivo R tal que a série

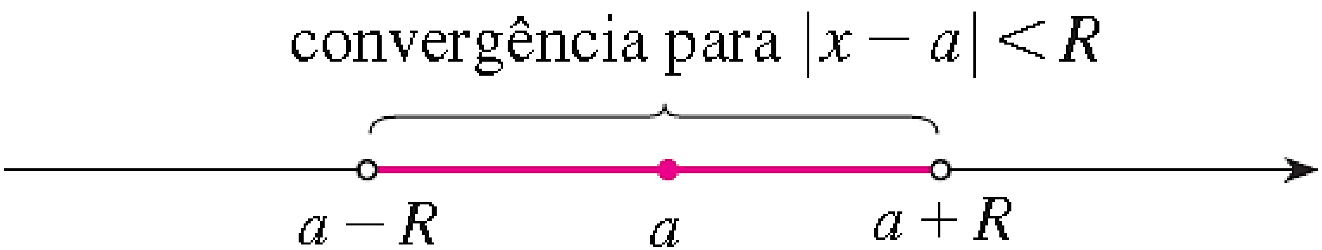
converge se $|x-a| < R$ e

diverge se $|x-a| > R$.

R: raio de convergência da série.

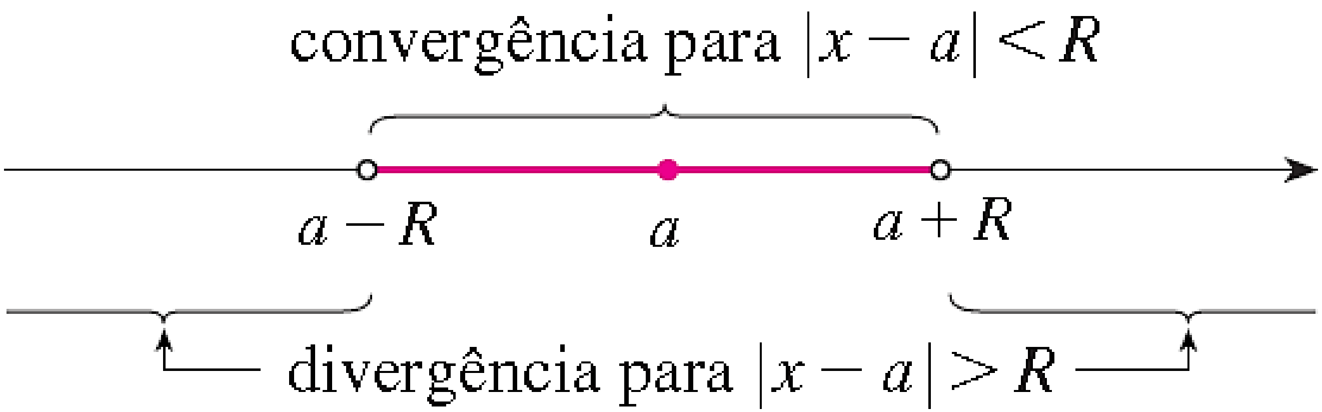
Teorema da convergência de séries

- Representação do raio de convergência da série:



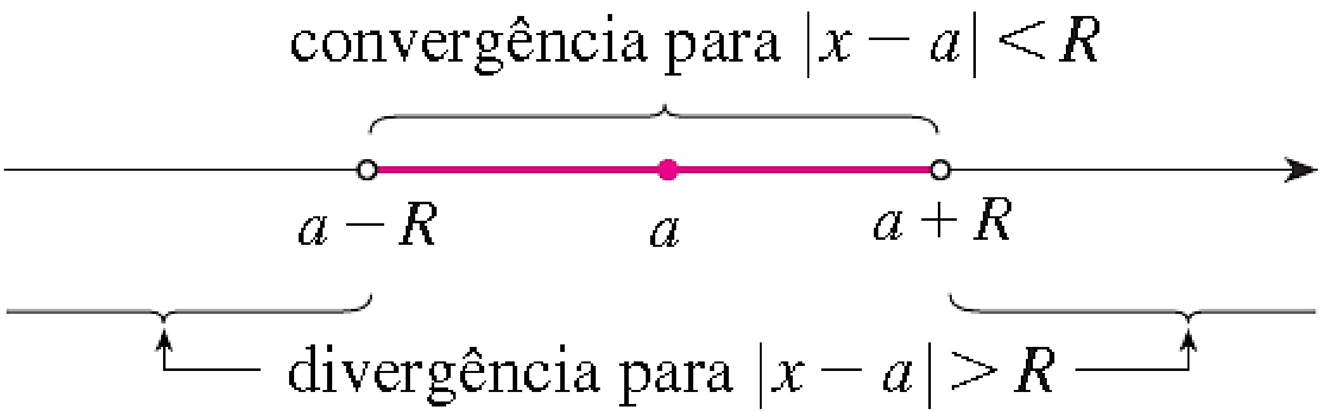
Teorema da convergência de séries

- Representação do raio de convergência da série:



Teorema da convergência de séries

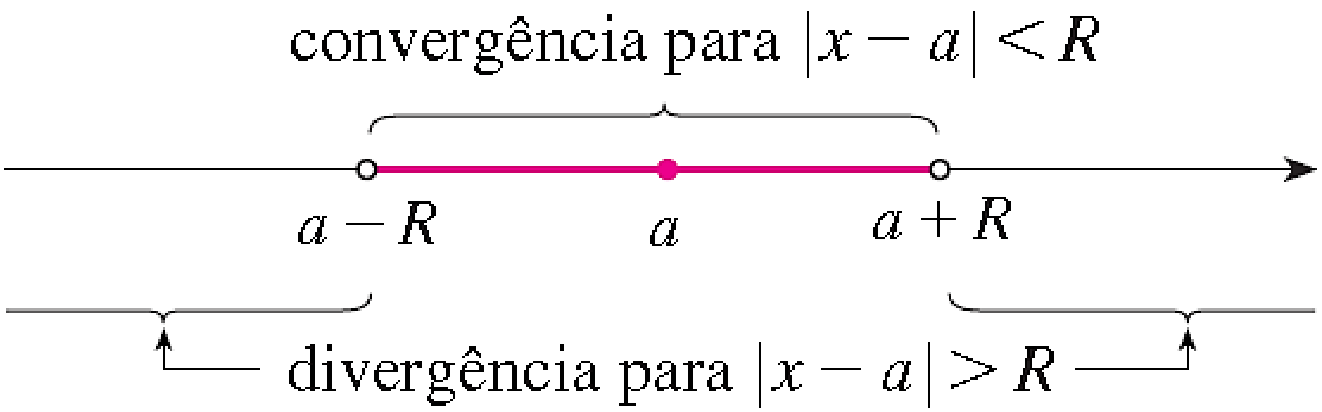
- Representação do raio de convergência da série:



- Na maioria das séries de potência, utiliza-se o teste da razão ou da raiz para verificar a convergência.

Teorema da convergência de séries

- Representação do raio de convergência da série:



- Na maioria das séries de potência, utiliza-se o teste da razão ou da raiz para verificar a convergência.

- As extremidades do intervalo devem ser testadas por outro teste, adequado para cada caso.

Teorema da convergência de séries

- Raio de convergência dos exemplos.

	Série	Raio de convergência	Intervalo de convergência
Exemplo 1	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R = 1$	$(-1, 1)$
Exemplo 2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$	$R = 1$	$[2, 4)$

Exemplo 3 Encontrar o raio de convergência da série.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}} \qquad a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$$

Exemplo 3 Encontrar o raio de convergência da série.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}} \qquad a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$$

✓ Pelo teste da razão tem-se a relação:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n}\right|$$

Exemplo 3 Encontrar o raio de convergência da série.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}} \qquad a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$$

- ✓ Pelo teste da razão tem-se a relação:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n}\right|$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{|x+2|}{3} \underset{\substack{\text{quando} \\ n \to \infty}}{\longrightarrow} \frac{|x+2|}{3}$$

Exemplo 3 Encontrar o raio de convergência da série.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}} \qquad a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$$

- ✓ Pelo teste da razão tem-se a relação:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n}\right|$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{|x+2|}{3} \underset{\substack{\text{quando} \\ n \to \infty}}{\longrightarrow} \frac{|x+2|}{3}$$

- ✓ A série é convergente se: $\dfrac{|x+2|}{3} < 1$

$$-3 < x + 2 < 3$$

Exemplo 3 Encontrar o raio de convergência da série.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}} \qquad a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$$

✓ Pelo teste da razão tem-se a relação:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n}\right|$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{|x+2|}{3} \underset{\substack{\text{quando} \\ n \to \infty}}{\longrightarrow} \frac{|x+2|}{3}$$

✓ A série é convergente se: $\dfrac{|x+2|}{3} < 1$

$$-3 < x + 2 < 3 \quad \Rightarrow \quad -5 < x < 1$$

Exemplo 3 Encontrar o raio de convergência da série.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}} \qquad a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$$

✓ Pelo teste da razão tem-se a relação:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n}\right|$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{|x+2|}{3} \underset{\substack{\text{quando} \\ n \to \infty}}{\longrightarrow} \frac{|x+2|}{3}$$

✓ A série é convergente se: $\dfrac{|x+2|}{3} < 1$

Raio de convergência

$$-3 < x + 2 < 3 \quad \Rightarrow \quad -5 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = 3}$$

Exemplo 3 Encontrar o raio de convergência da série.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

Teste nos extremos: $x = -5$ e $x = 1$

Exemplo 3 Encontrar o raio de convergência da série.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

Teste nos extremos: $x = -5$ e $x = 1$

✓ Quando $x = -5$ a série é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$$

Exemplo 3 Encontrar o raio de convergência da série.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

Teste nos extremos: $x = -5$ e $x = 1$

✓ Quando $x = -5$ a série é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \quad \textit{Divergente} \quad \begin{cases} \textit{Limite do} \\ \textit{termo geral} \\ \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \neq 0 \end{cases}$$

Exemplo 3 Encontrar o raio de convergência da série.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

Teste nos extremos: $x = -5$ e $x = 1$

✓ Quando $x = -5$ a série é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \quad \textit{Divergente} \quad \begin{cases} \textit{Limite do} \\ \textit{termo geral} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \neq 0 \end{cases}$$

✓ Quando $x = 1$ a série é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} n$$

Exemplo 3 Encontrar o raio de convergência da série.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

Teste nos extremos: $x = -5$ e $x = 1$

- ✓ Quando $x = -5$ a série é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \quad \textit{Divergente} \quad \begin{cases} \textit{Limite do} \\ \textit{termo geral} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \neq 0 \end{cases}$$

- ✓ Quando $x = 1$ a série é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} n \quad \textit{Divergente} \quad \begin{cases} \textit{Teste da} \\ \textit{divergência} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \neq 0 \end{cases}$$

Exemplo 3 Encontrar o raio de convergência da série.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

Teste nos extremos: $x = -5$ e $x = 1$

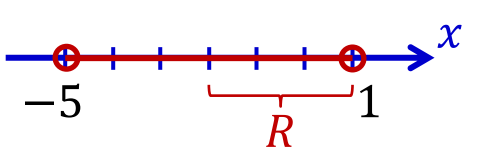
- ✓ Quando $x = -5$ a série é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \quad \color{red}{Divergente} \quad \begin{cases} \text{Limite do} \\ \text{termo geral} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \neq 0 \end{cases}$$

- ✓ Quando $x = 1$ a série é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} n \quad \color{red}{Divergente} \quad \begin{cases} \text{Teste da} \\ \text{divergência} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \neq 0 \end{cases}$$

- ✓ Assim, a série é convergente no intervalo $(-5,1)$ e raio de convergência $R = 3$.



Representação de funções por séries de potência

Representação de funções

- A representação de “funções” por soma infinita de termos era comum no início do cálculo.

Representação de funções

- A representação de “funções” por soma infinita de termos era comum no início do cálculo.
- Atualmente, essa técnica é útil para integrar funções que não têm antiderivadas elementares.

Representação de funções

- A representação de “funções” por soma infinita de termos era comum no início do cálculo.
- Atualmente, essa técnica é útil para integrar funções que não têm antiderivadas elementares.
- O método também é utilizado para resolver equações diferenciais (eq. que contém derivadas).

Representação de funções

- A representação de "funções" por soma infinita de termos era comum no início do cálculo.
- Atualmente, essa técnica é útil para integrar funções que não têm antiderivadas elementares.
- O método também é utilizado para resolver equações diferenciais (eq. que contém derivadas).
- Mesmo as funções conhecidas podem ser representadas como uma soma de polinômios.
- Derivar e integrar polinômios é mais simples.

Representação de funções

- Seja uma série geométrica convergente com primeiro termo $a = 1$, razão $r = x$ e $|x| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

Representação de funções

- Seja uma série geométrica convergente com primeiro termo $a = 1$, razão $r = x$ e $|x| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

- Olhando de um outro ponto de vista, podemos nos referir a esta série como a expressão da função:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

Representação de funções

- Seja uma série geométrica convergente com primeiro termo $a = 1$, razão $r = x$ e $|x| < 1$:

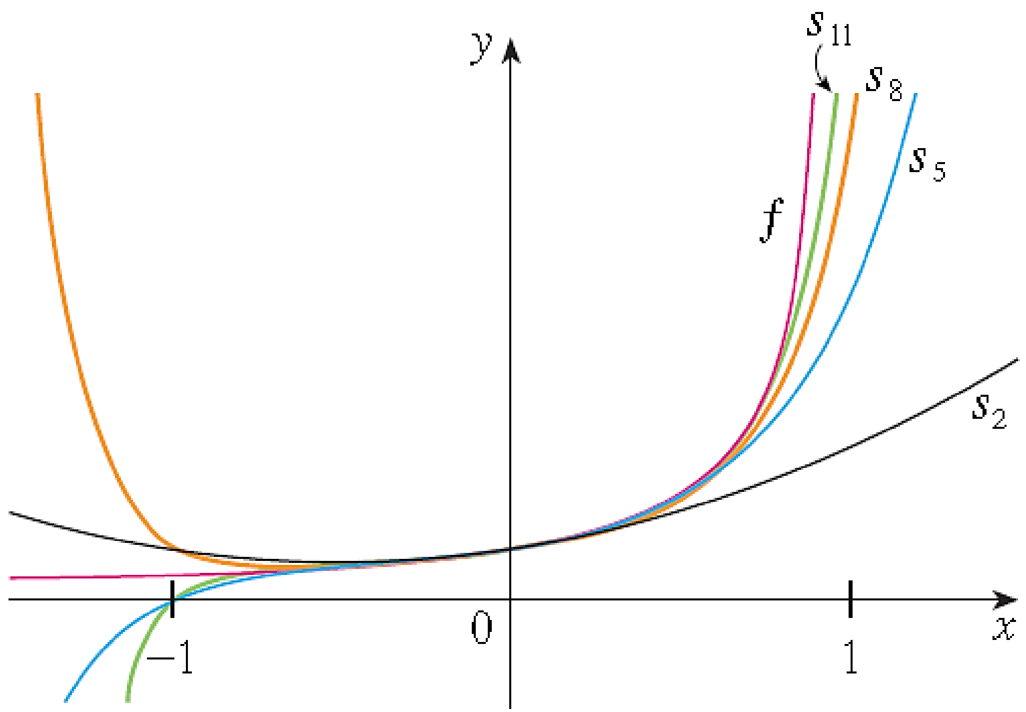
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1 - x}$$

- Olhando de um outro ponto de vista, podemos nos referir a esta série como a expressão da função:

$$f(x) = \frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

- A medida em que n aumenta, $S_n(x)$ se aproxima melhor de f no intervalo $(-1, 1)$.

Representação de funções



$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

- ✓ Se n aumenta, $S_n(x)$ se aproxima de f em $(-1, 1)$.

Exemplo 4 Expressar a função $f = \frac{1}{1+x^2}$ como uma série e encontrar o intervalo de convergência.

Exemplo 4 Expressar a função $f = \frac{1}{1+x^2}$ como uma série e encontrar o intervalo de convergência.

- ✓ Trocando x por x^2 na função anterior:

$$f = \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{1 - (-x^2)}$$

Exemplo 4 Expressar a função $f = \frac{1}{1+x^2}$ como uma série e encontrar o intervalo de convergência.

- ✓ Trocando x por x^2 na função anterior:

$$f = \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

Exemplo 4 Expressar a função $f = \frac{1}{1+x^2}$ como uma série e encontrar o intervalo de convergência.

- ✓ Trocando x por x^2 na função anterior:

$$f = \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

Exemplo 4 Expressar a função $f = \frac{1}{1+x^2}$ como uma série e encontrar o intervalo de convergência.

✓ Trocando x por x^2 na função anterior:

$$f = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

✓ A série a valores absolutos é uma série geométrica de razão x^2. Ela converge se:

$$x^2 < 1$$

Exemplo 4 Expressar a função $f = \frac{1}{1+x^2}$ como uma série e encontrar o intervalo de convergência.

- ✓ Trocando x por x^2 na função anterior:

$$f = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

- ✓ A série a valores absolutos é uma série geométrica de razão x^2. Ela converge se:

$$x^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < x < 1$$

Exemplo 4 Expressar a função $f = \frac{1}{1+x^2}$ como uma série e encontrar o intervalo de convergência.

- Trocando x por x^2 na função anterior:

$$f = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

- A série a valores absolutos é uma série geométrica de razão x^2. Ela converge se:

$$x^2 < 1 \qquad \Rightarrow \qquad -1 < x < 1$$

- Portanto, o intervalo de convergência é $(-1,1)$.

Diferenciação e integração de séries

Diferenciação e integração de séries

- Vimos que a soma de uma série de potência infinita é uma função $f = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\,(x-a)^n$.
- O domínio de f será o intervalo de convergência R da série.

Diferenciação e integração de séries

- Vimos que a soma de uma série de potência infinita é uma função $f = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \, (x-a)^n$.
- O domínio de f será o intervalo de convergência R da série.
- Caso seja necessário, será possível derivar e integrar essa função?
- O teorema seguinte afirma que isso é possível sob condições para o raio de convergência.

Teorema da diferenciação e integração

Se a série de potências $\sum c_n(x-a)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

Teorema da diferenciação e integração

Se a série de potências $\Sigma\, c_n(x - a)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$$

é diferenciável no intervalo $(a - R, a + R)$ e

(i) $$f'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x - a)^{n-1}$$

Teorema da diferenciação e integração

Se a série de potências $\Sigma\, c_n(x - a)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$$

é diferenciável no intervalo $(a - R, a + R)$ e

$$\text{(i)} \quad f'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x - a)^{n-1}$$

$$\text{(ii)} \quad \int f(x)\, dx = C + c_0(x - a) + c_1\frac{(x - a)^2}{2} + \cdots = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1}$$

Os raios de convergência das séries (i) e (ii) são ambos R.

Diferenciação e integração de séries

- As equações (i) e (ii) podem ser reescritas por:

$$\textbf{(iii)}\quad \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[c_n(x-a)^n\right]$$

$$\textbf{(iv)}\quad \int\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right]dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n(x-a)^n\,dx$$

Diferenciação e integração de séries

- As equações (i) e (ii) podem ser reescritas por:

$$\text{(iii)}\quad \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[c_n(x-a)^n\right]$$

$$\text{(iv)}\quad \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n(x-a)^n\, dx$$

- As propriedades da derivada da soma e da integral da soma são válidas para séries de potência.
- O intervalo de convergência pode mudar após a diferenciação ou a integração.

Exemplo 5 Expressar pela diferenciação a função $f = \frac{1}{(1-x)^2}$ como uma série de potência.

Exemplo 5 Expressar pela diferenciação a função $f = \frac{1}{(1-x)^2}$ como uma série de potência.

- ✓ A série de potência da função seguinte é conhecida:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Exemplo 5 Expressar pela diferenciação a função $f = \frac{1}{(1-x)^2}$ como uma série de potência.

- ✓ A série de potência da função seguinte é conhecida:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

- ✓ Diferenciar termo a termo dessa série:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Exemplo 5 Expressar pela diferenciação a função $f = \frac{1}{(1-x)^2}$ como uma série de potência.

- ✓ A série de potência da função seguinte é conhecida:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

- ✓ Diferenciar termo a termo dessa série:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

- ✓ Trocar n por $n+1$ para que a série inicie em $n = 0$.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

Exemplo 5 Expressar pela diferenciação a função $f = \frac{1}{(1-x)^2}$ como uma série de potência.

- ✓ A série de potência da função seguinte é conhecida:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

- ✓ Diferenciar termo a termo dessa série:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

- ✓ Trocar n por $n+1$ para que a série inicie em $n = 0$.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

- ✓ Portanto, o intervalo de convergência é $(-1,1)$.

Exemplo 6 Encontrar uma representação em série de potência para a função $f = \ln(1 + x)$.

Exemplo 6 Encontrar uma representação em série de potência para a função $f = \ln(1+x)$.

- ✓ Diferenciando a função dada:

$$\frac{d}{dx}\ln\,(1+x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}$$

Exemplo 6 Encontrar uma representação em série de potência para a função $f = \ln(1+x)$.

- ✓ Diferenciando a função dada:

$$\frac{d}{dx} \ln\,(1+x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \qquad |\,x\,| < 1$$

Exemplo 6 Encontrar uma representação em série de potência para a função $f = \ln(1+x)$.

- ✓ Diferenciando a função dada:

$$\frac{d}{dx}\ln\,(1+x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \quad |\,x\,| < 1$$

- ✓ Integrando em ambos os lados da última função

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \int (1 - x + x^2 + \cdots)\,dx$$

Exemplo 6 Encontrar uma representação em série de potência para a função $f = \ln(1+x)$.

✓ Diferenciando a função dada:

$$\frac{d}{dx} \ln(1+x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \quad |x| < 1$$

✓ Integrando em ambos os lados da última função

$$\int \frac{1}{1+x} dx = \int (1 - x + x^2 + \cdots) dx$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + C$$

Exemplo 6 Encontrar uma representação em série de potência para a função $f = \ln(1+x)$.

- ✓ Diferenciando a função dada:

$$\frac{d}{dx}\ln\,(1+x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \qquad |x| < 1$$

- ✓ Integrando em ambos os lados da última função

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \int (1 - x + x^2 + \cdots)\,dx$$

$$\ln\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + C$$

$$\ln\,(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + C \qquad |x| < 1$$

Exercícios

Exercícios:

1) Para que valores de x a série converge?

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} 4^n (x-2)^n$$

b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-3}{2}\right)^n$$

2) Encontrar a representação em série de $f = \ln(1-x)$.

Exercícios:

1) Para que valores de x a série converge?

Respostas

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n (x-2)^n$ $\qquad \frac{7}{4} < x < \frac{9}{4}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-3}{2}\right)^n$ $\qquad 1 < x < 5$

2) Encontrar a representação em série de $f = \ln(1-x)$.

Resposta: $\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad |x| < 1$

Para depois desta aula:

- Estudar seções 11.8 e 11.9 do livro texto.
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar: exercícios Seções 11.8 e 11.9.

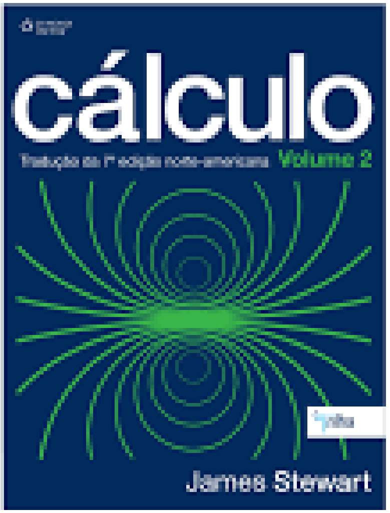
Próxima aula:

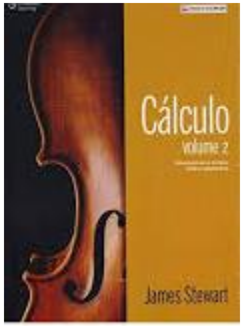
- Séries de Taylor e de Maclaurin.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed. ▶





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.