

Equações diferenciais



Equações diferenciais
ordinárias

Aula 10
Séries de Taylor e
Maclaurin

Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Séries de Taylor e Maclaurin.
2. Exemplos.
3. Exercícios.



Séries de Taylor e Maclaurin

Série de Taylor

- Encontramos séries de potência de funções semelhantes a expressão da soma de uma série geométrica $\frac{1}{1-x}$.

Série de Taylor

- Encontramos séries de potência de funções semelhantes a expressão da soma de uma série geométrica $\frac{1}{1-x}$.
- Para aplicações, necessitamos encontrar séries para um número maior de funções.

Série de Taylor

- Encontramos séries de potência de funções semelhantes a expressão da soma de uma série geométrica $\frac{1}{1-x}$.
- Para aplicações, necessitamos encontrar séries para um número maior de funções.
- Será desejável representar em séries funções como: e^x , $\text{sen}x$, $\text{cos}x$, $\text{tg}x$ e suas variações.

Série de Taylor

- Encontramos séries de potência de funções semelhantes a expressão da soma de uma série geométrica $\frac{1}{1-x}$.
- Para aplicações, necessitamos encontrar séries para um número maior de funções.
- Será desejável representar em séries funções como: e^x , $\text{sen}x$, $\text{cos}x$, $\text{tg}x$ e suas variações.
- A série de Taylor permite encontrar tais funções.

Série de Taylor

➤ Seja f uma função da variável x .

Série de Taylor

- Seja f uma função da variável x .
- Supondo que f possa ser representada por uma série de potência, com $|x - a| < R$, da forma:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots \quad (1)$$

Série de Taylor

- Seja f uma função da variável x .
- Supondo que f possa ser representada por uma série de potência, com $|x - a| < R$, da forma:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots \quad (1)$$

- Para que fique completamente definida será necessário calcular os coeficientes c_n .

Série de Taylor

- Seja f uma função da variável x .
- Supondo que f possa ser representada por uma série de potência, com $|x - a| < R$, da forma:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots \quad (1)$$

- Para que fique completamente definida será necessário calcular os coeficientes c_n .

se $x = a$ na Equação 1: $f(a) = c_0$

Série de Taylor

- Seja f uma função da variável x .
- Supondo que f possa ser representada por uma série de potência, com $|x - a| < R$, da forma:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots \quad (1)$$

- Para que fique completamente definida será necessário calcular os coeficientes c_n .

se $x = a$ na Equação 1: $f(a) = c_0$

- Derivando a equação (1) termo a termo tem-se:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + \dots \quad (2)$$

Série de Taylor

- Seja f uma função da variável x .
- Supondo que f possa ser representada por uma série de potência, com $|x - a| < R$, da forma:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots \quad (1)$$

- Para que fique completamente definida será necessário calcular os coeficientes c_n .

se $x = a$ na Equação 1: $f(a) = c_0$

- Derivando a equação (1) termo a termo tem-se:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + \dots \quad (2)$$

se $x = a$ na Equação 2: $f'(a) = c_1$

Série de Taylor

- Derivando a equação (2) em ambos os lados:

$$f'''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x - a) + 3 \cdot 4c_4(x - a)^2 + \dots$$

Série de Taylor

- Derivando a equação (2) em ambos os lados:

$$f'''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x - a) + 3 \cdot 4c_4(x - a)^2 + \dots$$

se $x = a$ na Equação 3: $f'''(a) = 2c_2$

Série de Taylor

- Derivando a equação (2) em ambos os lados:

$$f'''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x - a) + 3 \cdot 4c_4(x - a)^2 + \dots$$

se $x = a$ na Equação 3: $f'''(a) = 2c_2$

- Repetindo-se o processo de derivação e substituindo $x = a$ determinam-se todos os coeficientes.

Série de Taylor

- Derivando a equação (2) em ambos os lados:

$$f'''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x - a) + 3 \cdot 4c_4(x - a)^2 + \dots$$

se $x = a$ na Equação 3: $f'''(a) = 2c_2$

- Repetindo-se o processo de derivação e substituindo $x = a$ determinam-se todos os coeficientes.
- Nestas derivadas observamos um padrão:

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot nc_n = n!c_n$$

Série de Taylor

- Derivando a equação (2) em ambos os lados:

$$f'''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x - a) + 3 \cdot 4c_4(x - a)^2 + \dots$$

se $x = a$ na Equação 3: $f'''(a) = 2c_2$

- Repetindo-se o processo de derivação e substituindo $x = a$ determinam-se todos os coeficientes.

- Nestas derivadas observamos um padrão:

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot nc_n = n!c_n$$

- Portanto, isolando o coeficiente c_n tem-se:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Série de Taylor

- Substituindo-se o coeficiente correspondente na expressão da função f tem-se a **série de Taylor**:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots$$

Série de Taylor

- Substituindo-se o coeficiente correspondente na expressão da função f tem-se a **série de Taylor**:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x - a)^3 + \dots$$

Série de Taylor

- Substituindo-se o coeficiente correspondente na expressão da função f tem-se a **série de Taylor**:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x - a)^3 + \dots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

*Série de Taylor
da função f* $|x - a| < R$

Série de Taylor

- Substituindo-se o coeficiente correspondente na expressão da função f tem-se a **série de Taylor**:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x - a)^3 + \dots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

*Série de Taylor
da função f* $|x - a| < R$

- Quando $a = 0$ tem-se a **série de Maclaurin**.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

*Série de Maclaurin
da função f*

Série de Taylor

Observações

- ❖ Nem toda função pode ser representada por uma série de Taylor.

Série de Taylor

Observações

- ❖ Nem toda função pode ser representada por uma série de Taylor.
- ❖ Funções analíticas como e^x , $\text{sen}x$, $\text{cos}x$, $\text{tg}x$ possuem a representação nos intervalos em que a série for convergente.

Série de Taylor

Observações

- ❖ Nem toda função pode ser representada por uma série de Taylor.
- ❖ Funções analíticas como e^x , $\text{sen}x$, $\text{cos}x$, $\text{tg}x$ possuem a representação nos intervalos em que a série for convergente.
- ❖ O intervalo de convergência para e^x , $\text{sen}x$, $\text{cos}x$ é todo conjunto dos reais.
- ❖ Para $\text{tg}x$, $[-1,1]$ é o intervalo de convergência.



Exemplos

Exemplo 1 Obter a série de Taylor $f(x) = e^x$ em $a = 0$.
Encontrar o raio de convergência.

✓ Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$,

Exemplo 1 Obter a série de Taylor $f(x) = e^x$ em $a = 0$.
Encontrar o raio de convergência.

✓ Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$, portanto $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

Exemplo 1 Obter a série de Taylor $f(x) = e^x$ em $a = 0$.
Encontrar o raio de convergência.

✓ Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$, portanto $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

✓ Portanto, a série de Maclaurin para f em 0 é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Exemplo 1 Obter a série de Taylor $f(x) = e^x$ em $a = 0$.
Encontrar o raio de convergência.

✓ Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$, portanto $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

✓ Portanto, a série de Maclaurin para f em 0 é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Exemplo 1 Obter a série de Taylor $f(x) = e^x$ em $a = 0$.
Encontrar o raio de convergência.

✓ Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$, portanto $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

✓ Portanto, a série de Maclaurin para f em 0 é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

✓ Para o raio de convergência fazemos $a_n = x^n/n!$. Então,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

quando
 $n \rightarrow \infty$

Exemplo 1 Obter a série de Taylor $f(x) = e^x$ em $a = 0$.
Encontrar o raio de convergência.

✓ Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$, portanto $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

✓ Portanto, a série de Maclaurin para f em 0 é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

✓ Para o raio de convergência fazemos $a_n = x^n/n!$. Então,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

quando
 $n \rightarrow \infty$

✓ pelo Teste da Razão, a série converge para todo x e $R = \infty$.

Exemplo 2 Obter a série de Taylor de $f(x) = e^{x^2}$ e expressar a integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ por uma série.

Exemplo 2 Obter a série de Taylor de $f(x) = e^{x^2}$ e expressar a integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ por uma série.

✓ Partindo da série da exponencial e^x :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Exemplo 2 Obter a série de Taylor de $f(x) = e^{x^2}$ e expressar a integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ por uma série.

✓ Partindo da série da exponencial e^x :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

✓ Trocando x na série de e^x por x^2 :

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

Exemplo 2 Obter a série de Taylor de $f(x) = e^{x^2}$ e expressar a integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ por uma série.

✓ Partindo da série da exponencial e^x :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

✓ Trocando x na série de e^x por x^2 :

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^3)^2}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

✓ A primitiva da função $f(x) = e^{x^2}$ é então:

$$\int e^{x^2} dx = \int \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \dots \right) dx$$

Exemplo 2 $f(x) = e^{x^2}$ expressar $\int_0^1 e^{x^2} dx$ em série.

$$\int e^{x^2} dx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{x^7}{7 \cdot 3!} +$$

Exemplo 2 $f(x) = e^{x^2}$ expressar $\int_0^1 e^{x^2} dx$ em série.

$$\int e^{x^2} dx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

Exemplo 2 $f(x) = e^{x^2}$ expressar $\int_0^1 e^{x^2} dx$ em série.

$$\int e^{x^2} dx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

✓ Portanto, a integral definida será:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \Bigg|_{x=0}^{x=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}$$

Exemplo 2 $f(x) = e^{x^2}$ expressar $\int_0^1 e^{x^2} dx$ em série.

$$\int e^{x^2} dx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

✓ Portanto, a integral definida será:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \Bigg|_{x=0}^{x=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}$$

❖ Este processo pode ser aplicado para funções nas quais não se conhece a primitiva.

Exemplo 2 $f(x) = e^{x^2}$ expressar $\int_0^1 e^{x^2} dx$ em série.

$$\int e^{x^2} dx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

✓ Portanto, a integral definida será:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \Bigg|_{x=0}^{x=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}$$

- ❖ Este processo pode ser aplicado para funções nas quais não se conhece a primitiva.
- ❖ O resultado da integral definida será uma aproximação para o valor real.



Exercícios

Exercícios:

1) Obter a série de Taylor das funções em $a = 0$.
Encontrar os intervalos de convergência.

a) $f(x) = \text{sen}x$

b) $f(x) = \text{cos}x$

2) Encontrar uma série para $\int \frac{\text{sen}x}{x} dx$ em $R \neq 0$.

Exercícios:

1) Obter a série de Taylor das funções em $a = 0$.
Encontrar os intervalos de convergência.

a) $f(x) = \text{sen}x$ $\text{sen}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

b) $f(x) = \text{cos}x$ $\text{cos}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}$

Respostas

2) Encontrar uma série para $\int \frac{\text{sen}x}{x} dx$ em $R \neq 0$.

Resposta: $\int \frac{\text{sen}x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \quad x \neq 0$

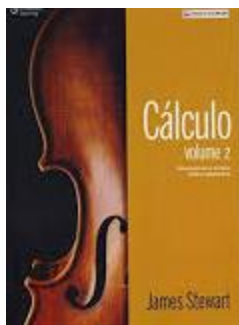
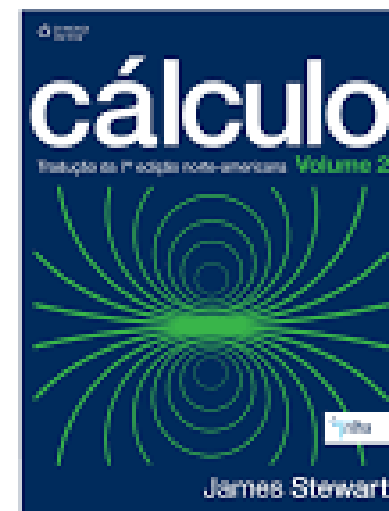
Para depois desta aula:

- Estudar seções 11.10 do livro texto.
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar: exercícios Seções 11.10.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios
com base na 7^a ed. ►



STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.**
São Paulo: Cengage, 2016.