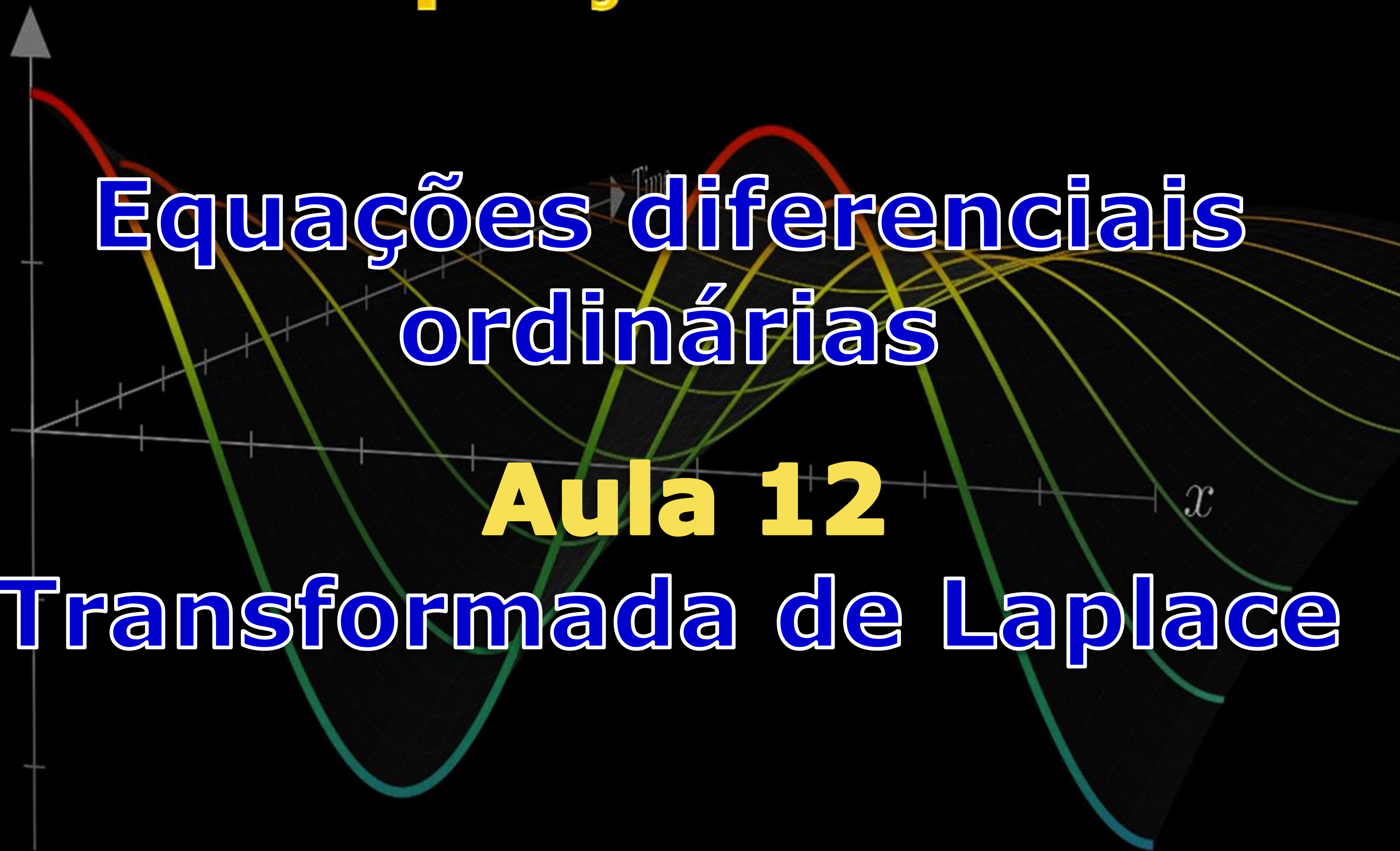
Equações diferenciais



Equações diferenciais ordinárias

Aula 12
Transformada de Laplace

Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Introdução e integrais impróprias
2. Funções contínuas por partes.
3. A transformada de Laplace.
4. Linearidade da transformada.

Pré-requisitos

- Cálculo de integrais.

Introdução e Integrais impróprias

Introdução

- Muitos problemas da Engenharia envolvem a ação de forças descontínuas ou impulsivas.
- A Transformada de Laplace é um método de resolução adequado para esses sistemas.

Introdução

- Muitos problemas da Engenharia envolvem a ação de forças descontínuas ou impulsivas.
- A Transformada de Laplace é um método de resolução adequado para esses sistemas.
- Esse método também pode ser utilizado para resolver eq. dif. lineares com coeficientes constantes.

Introdução

- Muitos problemas da Engenharia envolvem a ação de forças descontínuas ou impulsivas.
- A Transformada de Laplace é um método de resolução adequado para esses sistemas.
- Esse método também pode ser utilizado para resolver eq. dif. lineares com coeficientes constantes.
- A definição da transformada envolve integrais impróprias, conceito que será revisado a seguir.

Integrais impróprias

- A integral imprópria envolve limites de integração de um número maior que zero ao infinito.

Integrais impróprias

- A integral imprópria envolve limites de integração de um número maior que zero ao infinito.
- Essa integral é definida pela expressão:

$$\int_a^\infty f(t)dt$$

Integrais impróprias

- A integral imprópria envolve limites de integração de um número maior que zero ao infinito.
- Essa integral é definida pela expressão:

$$\int_a^{\infty} f(t)dt = \lim_{A\to\infty} \int_a^{A} f(t)dt \qquad (1)$$

Integrais impróprias

- A integral imprópria envolve limites de integração de um número maior que zero ao infinito.
- Essa integral é definida pela expressão:

$$\int_a^{\infty} f(t)dt = \lim_{A\to\infty} \int_a^{A} f(t)dt \qquad (1)$$

A: número real positivo, tal que $A > a$.

Integrais impróprias

- A integral imprópria envolve limites de integração de um número maior que zero ao infinito.
- Essa integral é definida pela expressão:

$$\int_a^{\infty} f(t)dt = \lim_{A \to \infty} \int_a^{A} f(t)dt \qquad (1)$$

A: número real positivo, tal que $A > a$.

- Se o limite de $A \to \infty$ existe, então a integral converge para um valor L.

Integrais impróprias

- A integral imprópria envolve limites de integração de um número maior que zero ao infinito.
- Essa integral é definida pela expressão:

$$\int_a^{\infty} f(t)dt = \lim_{A\to\infty}\int_a^{A} f(t)dt \qquad (1)$$

A: número real positivo, tal que $A > a$.

- Se o limite de $A \to \infty$ existe, então a integral converge para um valor L.
- Caso contrário, a integral diverge.

Exemplo 1: Calcule a integral imprópria.

$$\int_0^{\infty} e^{ct}\,dt \qquad t \geq 0,\ c \neq 0: constante \in \mathbb{R}$$

Exemplo 1: Calcule a integral imprópria.

$$\int_0^{\infty} e^{ct}\,dt \qquad t \geq 0,\ c \neq 0: constante \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{\infty} e^{ct}\,dt$$

Exemplo 1: Calcule a integral imprópria.

$$\int_0^{\infty} e^{ct}dt \qquad t \geq 0,\; c \neq 0: constante \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{\infty} e^{ct}dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{ct}dt$$

Exemplo 1: Calcule a integral imprópria.

$$\int_0^{\infty} e^{ct}dt \qquad t \geq 0,\ c \neq 0: constante \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{\infty} e^{ct}dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{ct}dt = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{ct}}{c}\Bigg|_{t=0}^{t=A}$$

Exemplo 1: Calcule a integral imprópria.

$$\int_0^{\infty} e^{ct}dt \qquad t \geq 0,\ c \neq 0{:}\, constante \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{\infty} e^{ct}dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{ct}dt = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{ct}}{c}\Bigg|_{t=0}^{t=A} = \frac{1}{c}$$

Exemplo 1: Calcule a integral imprópria.

$$\int_0^{\infty} e^{ct}dt \qquad t \geq 0, \; c \neq 0: constante \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{\infty} e^{ct}dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{ct}dt = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{ct}}{c}\Bigg|_{t=0}^{t=A} = \frac{1}{c}\lim_{A\to\infty}(e^{cA} - 1)$$

Exemplo 1: Calcule a integral imprópria.

$$\int_0^{\infty} e^{ct}dt \qquad t \geq 0,\ c \neq 0: constante \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{\infty} e^{ct}dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^{A} e^{ct}dt = \lim_{A\to\infty}\frac{e^{ct}}{c}\Bigg|_{t=0}^{t=A} = \frac{1}{c}\lim_{A\to\infty}\left(e^{cA}-1\right)$$

- ✓ Se $c < 0$ converge p/: $-\frac{1}{c}$

Exemplo 1: Calcule a integral imprópria.

$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt \qquad t \geq 0,\ c \neq 0: constante \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt = \lim_{A \to \infty} \int_0^{A} e^{ct} dt = \lim_{A \to \infty} \frac{e^{ct}}{c} \Bigg|_{t=0}^{t=A} = \frac{1}{c} \lim_{A \to \infty} (e^{cA} - 1)$$

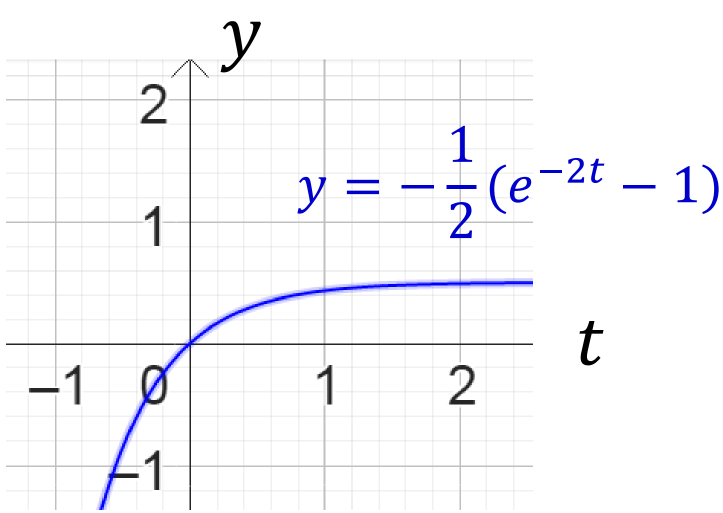
- ✓ Se $c < 0$ converge p/: $-\frac{1}{c}$
- ✓ Se $c \geq 0$ diverge.

Exemplo 1: Calcule a integral imprópria.

$$\int_0^\infty e^{ct}dt \qquad t \geq 0,\ c \neq 0: constante \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^\infty e^{ct}dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{ct}dt = \lim_{A\to\infty}\frac{e^{ct}}{c}\bigg|_{t=0}^{t=A} = \frac{1}{c}\lim_{A\to\infty}(e^{cA}-1)$$

- ✓ Se $c < 0$ converge p/: $-\frac{1}{c}$
- ✓ Se $c \geq 0$ diverge.

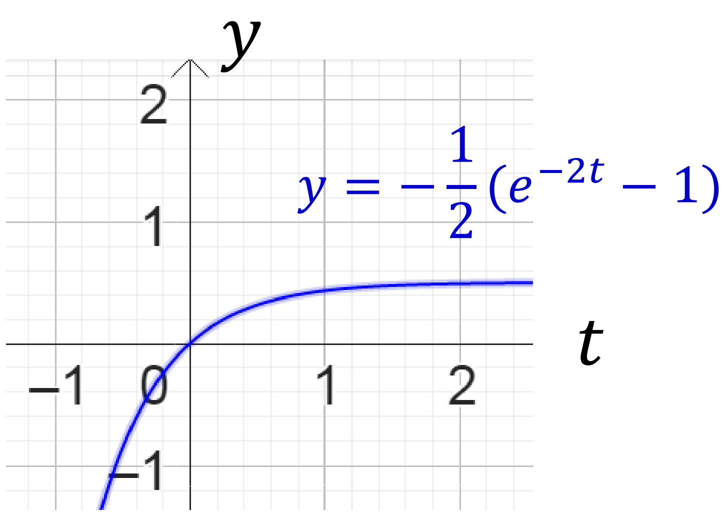


Exemplo 1: Calcule a integral imprópria.

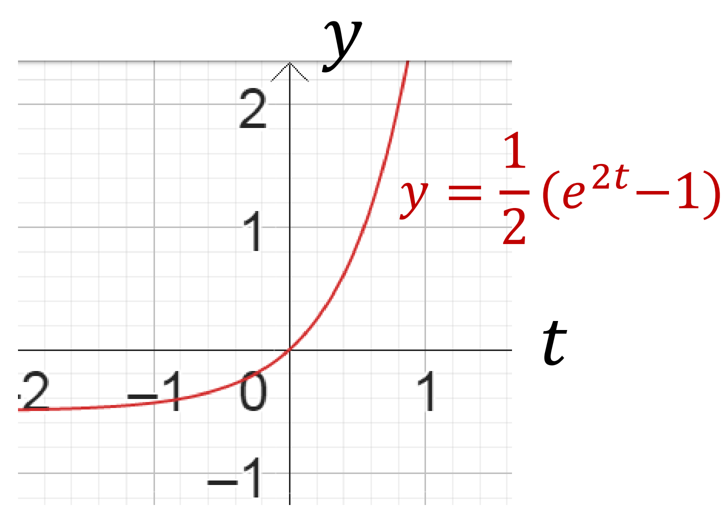
$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt \qquad t \geq 0,\ c \neq 0: constante \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{ct} dt = \lim_{A\to\infty} \left.\frac{e^{ct}}{c}\right|_{t=0}^{t=A} = \frac{1}{c} \lim_{A\to\infty} (e^{cA} - 1)$$

✓ Se $c < 0$ converge p/: $-\frac{1}{c}$



✓ Se $c \geq 0$ diverge.



Funções contínuas por partes

Funções contínuas por partes

- Uma função é contínua por partes em um intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ se puder ser dividida em número finito de pontos, tal que:

Funções contínuas por partes

- Uma função é contínua por partes em um intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ se puder ser dividida em número finito de pontos, tal que:

  1. Uma função f seja contínua em cada subintervalo aberto.

Funções contínuas por partes

- Uma função é contínua por partes em um intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ se puder ser dividida em número finito de pontos, tal que:

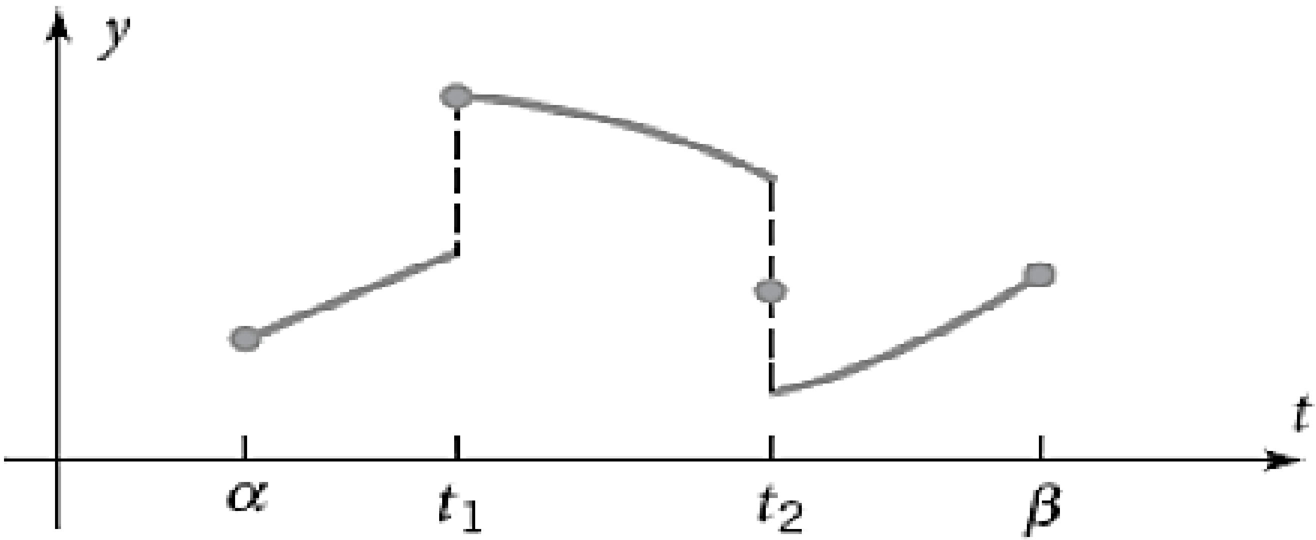
  1. Uma função f seja contínua em cada subintervalo aberto.
  2. f tem limite finito interior nos extremos de cada subintervalo.

Funções contínuas por partes

- Uma função é contínua por partes em um intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ se puder ser dividida em número finito de pontos, tal que:
  1. Uma função f seja contínua em cada subintervalo aberto.
  2. f tem limite finito interior nos extremos de cada subintervalo.

- A integral de uma função contínua por partes em um intervalo finito é a soma das integrais dos subintervalos.

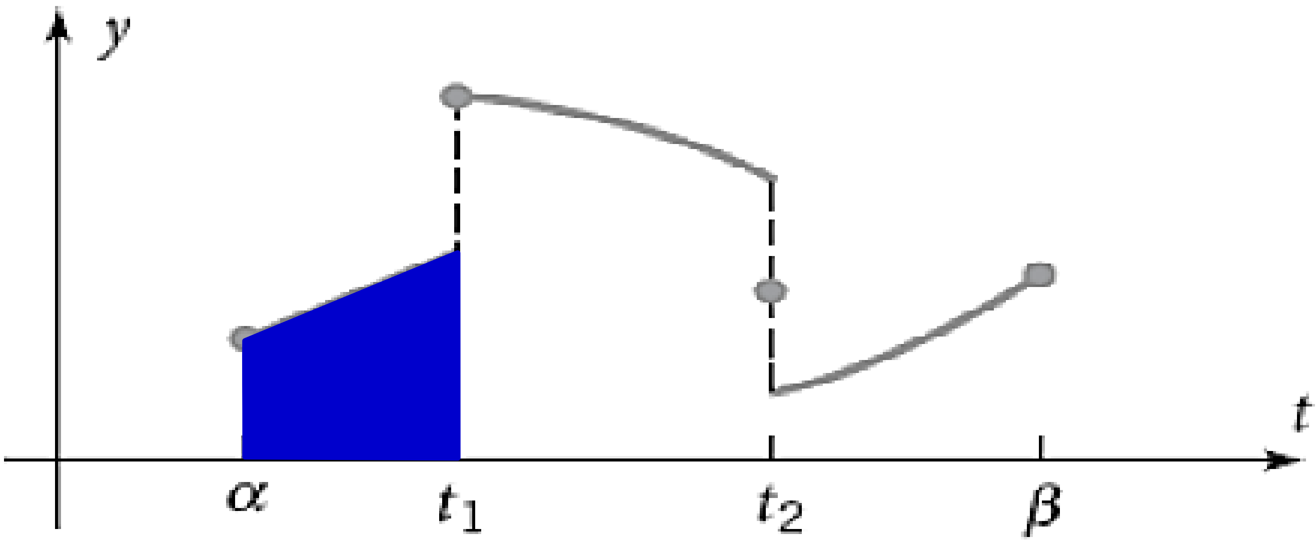
Funções contínuas por partes



$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt =$$

FIGURA 6.1.1 Uma função seccionalmente contínua $y = f(t)$.

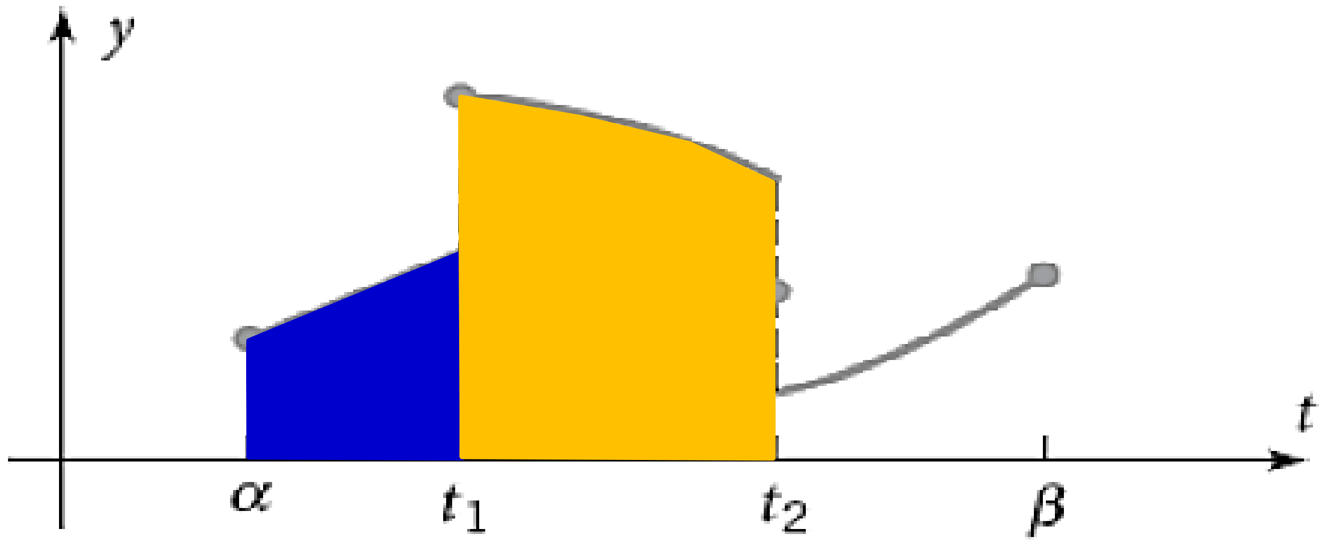
Funções contínuas por partes



$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{t_1} f(t)dt$$

FIGURA 6.1.1 Uma função seccionalmente contínua $y = f(t)$.

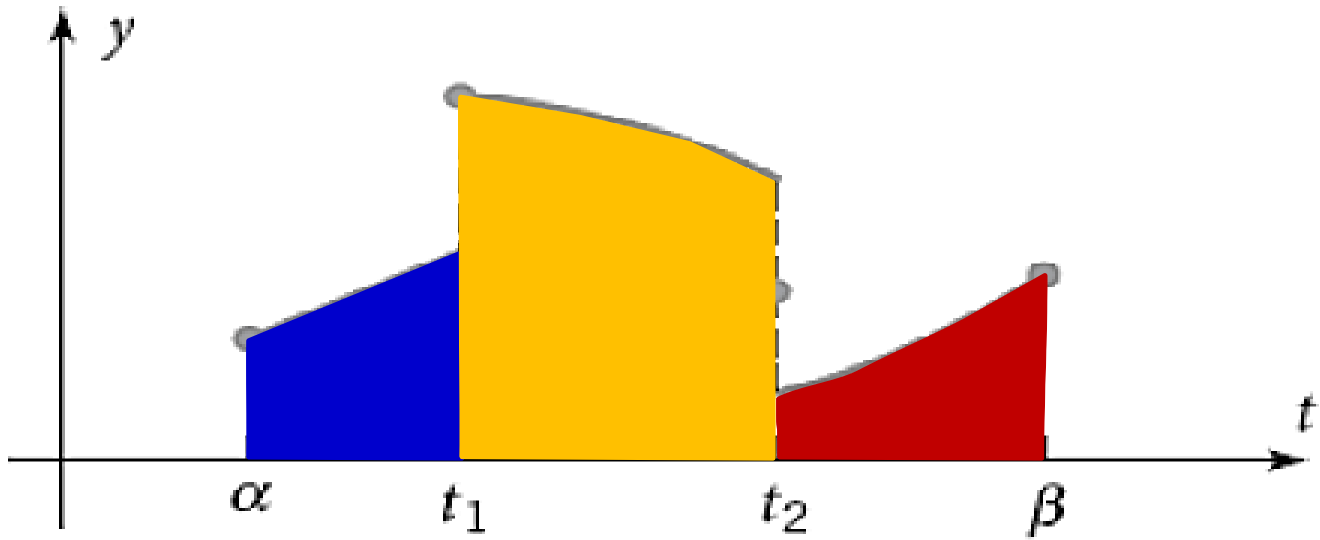
Funções contínuas por partes



$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{t_1} f(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

FIGURA 6.1.1 Uma função seccionalmente contínua $y = f(t)$.

Funções contínuas por partes



$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{t_1} f(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt + \int_{t_2}^{\beta} f(t)dt$$

FIGURA 6.1.1 Uma função seccionalmente contínua $y = f(t)$.

Transformada de Laplace

Transformada de Laplace

- Uma transformada integral é uma relação da forma:

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t) f(t) dt$$

Transformada de Laplace

- Uma transformada integral é uma relação da forma:

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t) f(t) dt$$

$K(s,t)$: função dada chamada núcleo da transformação.

Transformada de Laplace

- Uma transformada integral é uma relação da forma:

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t) f(t) dt$$

$K(s,t)$: função dada chamada núcleo da transformação.

- A relação integral transforma a função f dependente de t em uma função F dependente de s.

Transformada de Laplace

- Uma transformada integral é uma relação da forma:

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t) f(t)\,dt$$

$K(s,t)$: função dada chamada núcleo da transformação.

- A relação integral transforma a função f dependente de t em uma função F dependente de s.
- A função F é chamada de transformada de f.

Transformada de Laplace

- Uma transformada integral é uma relação da forma:

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t) f(t) dt$$

$K(s,t)$: função dada chamada núcleo da transformação.

- A relação integral transforma a função f dependente de t em uma função F dependente de s.
- A função F é chamada de transformada de f.
- As transformadas mais conhecidas são a transformada de Fourie e a transformada de Laplace.

Transformada de Laplace ($\mathcal{L}$)

- Definição da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) =$$

Transformada de Laplace ($\mathcal{L}$)

- Definição da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Transformada de Laplace ($\mathcal{L}$)

- Definição da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

$\mathcal{L}$: símbolo da transformada de Laplace.

Transformada de Laplace ($\mathcal{L}$)

- Definição da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

$\mathcal{L}$: símbolo da transformada de Laplace.

$F(s)$: função transformada de $f(t)$.

Transformada de Laplace ($\mathcal{L}$)

- Definição da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$\mathcal{L}$: símbolo da transformada de Laplace.

$F(s)$: função transformada de $f(t)$.

e^{-st}: núcleo da transformada de Laplace.

Transformada de Laplace ($\mathcal{L}$)

- Definição da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

$\mathcal{L}$: símbolo da transformada de Laplace.

$F(s)$: função transformada de $f(t)$.

e^{-st}: núcleo da transformada de Laplace.

- Sempre que a integral imprópria convergir existirá a transformada da função f.

Teorema 6.1.2

Supondo que:

1. A função f seja contínua por partes em $0 \leq t \leq A$ para qualquer $A > 0$.

Teorema 6.1.2

Supondo que:

1. A função f seja contínua por partes em $0 \leq t \leq A$ para qualquer $A > 0$.
2. $|f(t)| \leq Ke^{at}$ quando $t \geq M \in \mathbb{R}$;

Teorema 6.1.2

Supondo que:

1. A função f seja contínua por partes em $0 \leq t \leq A$ para qualquer $A > 0$.
2. $|f(t)| \leq Ke^{at}$ quando $t \geq M \in \mathbb{R}$;

$$K > 0, M > 0, K \in \mathbb{R} \text{ e } a \in \mathbb{R}$$

Teorema 6.1.2

Supondo que:

1. A função f seja contínua por partes em $0 \leq t \leq A$ para qualquer $A > 0$.
2. $|f(t)| \leq Ke^{at}$ quando $t \geq M \in \mathbb{R}$;

$$K > 0, M > 0, K \in \mathbb{R} \text{ e } a \in \mathbb{R}$$

Então, a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ existe para $s > a$.

Teorema 6.1.2

Supondo que:

1. A função f seja contínua por partes em $0 \leq t \leq A$ para qualquer $A > 0$.
2. $|f(t)| \leq Ke^{at}$ quando $t \geq M \in \mathbb{R}$;

$$K > 0, M > 0, K \in \mathbb{R} \text{ e } a \in \mathbb{R}$$

Então, a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ existe para $s > a$.

As funções tratadas nesta aula e nas aulas seguintes irão satisfazer este teorema.

Exemplo 2: Calcule a Transformada de Laplace.

a) $f(t) = 1, \quad t > 0$

Exemplo 2: Calcule a Transformada de Laplace.

a) $f(t) = 1, \quad t > 0$

$$\mathcal{L}\{1\} = F(s) =$$

Exemplo 2: Calcule a Transformada de Laplace.

a) $f(t) = 1, \quad t > 0$

$$\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} 1 dt$$

Exemplo 2: Calcule a Transformada de Laplace.

a) $f(t) = 1, \quad t > 0$

$$\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt = \lim_{A \to \infty} \int_0^{A} e^{-st} dt$$

Exemplo 2: Calcule a Transformada de Laplace.

a) $f(t) = 1, \quad t > 0$

$$\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt = \lim_{A \to \infty} \int_0^{A} e^{-st} dt$$

$$= \lim_{A \to \infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^A =$$

Exemplo 2: Calcule a Transformada de Laplace.

a) $f(t) = 1, \quad t > 0$

$$\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} 1dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{-st} dt$$

$$= \lim_{A\to\infty} \frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^A = \lim_{A\to\infty} \left(\frac{e^{-sA}}{-s} - \frac{e^{-s.0}}{-s}\right)$$

Exemplo 2: Calcule a Transformada de Laplace.

a) $f(t) = 1, \quad t > 0$

$$\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} 1 dt = \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{-st} dt$$

$$= \lim_{A \to \infty} \frac{e^{-st}}{-s} \Bigg|_0^A = \lim_{A \to \infty} \Big(\overbrace{\cancel{\frac{e^{-sA}}{-s}}}^{=0} - \frac{e^{-s.0}}{-s} \Big)$$

Exemplo 2: Calcule a Transformada de Laplace.

a) $f(t) = 1, \quad t > 0$

$$\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{-st} dt$$

$$= \lim_{A\to\infty} \frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^A = \lim_{A\to\infty} \left(\underbrace{\cancel{\frac{e^{-sA}}{-s}}}_{=0} - \frac{\overbrace{\cancel{e^{-s.0}}}^{=1}}{-s} \right)$$

Exemplo 2: Calcule a Transformada de Laplace.

a) $f(t) = 1, \quad t > 0$

$$\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{-st} dt$$

$$= \lim_{A\to\infty} \frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^A = \lim_{A\to\infty} \Big(\underbrace{\cancel{\frac{e^{-sA}}{-s}}}_{=0} - \frac{\overbrace{\cancel{e^{-s.0}}}^{=1}}{-s}\Big)$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

Exemplo 2: Calcule a Transformada de Laplace.

a) $f(t) = 1, \quad t > 0$

$$\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{-st} dt$$

$$= \lim_{A\to\infty} \frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^A = \lim_{A\to\infty} \Big(\underbrace{\cancel{\frac{e^{-sA}}{-s}}}_{=0} - \frac{\overbrace{\cancel{e^{-s.0}}}^{=1}}{-s} \Big)$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \qquad s > 0$$

b) $f(t) = e^{at}, \quad t \geq 0$ e a constante.

b) $f(t) = e^{at}, \quad t \geq 0$ e a constante.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s) =$$

b) $f(t) = e^{at}$, $\quad t \geq 0$ e a constante.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt$$

b) $f(t) = e^{at}, \quad t \geq 0$ e a constante.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \lim_{A \to \infty} \int_0^{A} e^{-(s-a)t} dt$$

b) $f(t) = e^{at}, \quad t \geq 0$ e a constante.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_0^A$$

b) $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$ e a constante.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \lim_{A \to \infty} \int_0^{A} e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \lim_{A \to \infty} \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_0^A = \lim_{A \to \infty} \left(\frac{e^{-(s-a)A}}{-(s-a)} - \frac{e^{0}}{-(s-a)} \right)$$

b) $f(t) = e^{at}, \quad t \geq 0$ e a constante.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \lim_{A \to \infty} \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \Bigg|_0^A = \lim_{A \to \infty} \left(\underbrace{\cancel{\frac{e^{-(s-a)A}}{-(s-a)}}}_{=0} - \frac{e^0}{-(s-a)} \right)$$

b) $f(t) = e^{at}, \quad t \geq 0$ e a constante.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \lim_{A \to \infty} \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_0^A = \lim_{A \to \infty} \left(\overbrace{\cancel{\frac{e^{-(s-a)A}}{-(s-a)}}}^{=0} - \frac{\overbrace{\cancel{e^0}}^{=1}}{-(s-a)} \right)$$

b) $f(t) = e^{at}, \quad t \geq 0$ e a constante.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \lim_{A \to \infty} \int_0^{A} e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \lim_{A \to \infty} \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \bigg|_0^A = \lim_{A \to \infty} \left(\underbrace{\cancel{\frac{e^{-(s-a)A}}{-(s-a)}}}_{=0} - \frac{\overbrace{\cancel{e^0}}^{=1}}{-(s-a)} \right)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

b) $f(t) = e^{at}, \quad t \geq 0$ e a constante.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \lim_{A \to \infty} \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \Bigg|_0^A = \lim_{A \to \infty} \Big(\overbrace{\cancel{\frac{e^{-(s-a)A}}{-(s-a)}}}^{=0} - \frac{\overbrace{\cancel{e^0}}^{=1}}{-(s-a)} \Big)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \qquad s > 0$$

Exercício: Calcule a Transformada de Laplace.

$f(t) = sen(at)$, $t > 0$ e a constante.

Resp.: $F(s) = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$

Linearidade da transformada de Laplace

Linearidade da transformada de Laplace

- A transformada de Laplace é um operador linear.

Linearidade da transformada de Laplace

- A transformada de Laplace é um operador linear.

Prova

$$\mathcal{L}\{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\} =$$

Linearidade da transformada de Laplace

- A transformada de Laplace é um operador linear.

Prova

$$\mathcal{L}\{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\} =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st}[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)]dt$$

Linearidade da transformada de Laplace

- A transformada de Laplace é um operador linear.

Prova

$$\mathcal{L}\{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)]dt$$

$$= C_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)$$

Linearidade da transformada de Laplace

- A transformada de Laplace é um operador linear.

Prova

$$\mathcal{L}\{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)]dt$$

$$= C_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t) + C_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)dt$$

Linearidade da transformada de Laplace

- A transformada de Laplace é um operador linear.

Prova

$$\mathcal{L}\{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)]dt$$

$$= C_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t) + C_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)dt$$

$$= C_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + C_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

Exemplo 3: Calcule a Transformada de Laplace.

$$f(t) = 5e^{-2t} - 3sen4t \qquad t \geq 0$$

Exemplo 3: Calcule a Transformada de Laplace.

$$f(t) = 5e^{-2t} - 3sen4t \qquad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} -$$

Exemplo 3: Calcule a Transformada de Laplace.

$$f(t) = 5e^{-2t} - 3sen4t \qquad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - 3\mathcal{L}\{sen4t\}$$

Exemplo 3: Calcule a Transformada de Laplace.

$$f(t) = 5e^{-2t} - 3sen4t \qquad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - 3\mathcal{L}\{sen4t\}$$

- ✓ Nos exemplos anteriores foram calculadas as transformadas da exponencial e do seno.

Exemplo 3: Calcule a Transformada de Laplace.

$$f(t) = 5e^{-2t} - 3sen4t \qquad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - 3\mathcal{L}\{sen4t\}$$

- ✓ Nos exemplos anteriores foram calculadas as transformadas da exponencial e do seno.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}\{senat\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

Exemplo 3: Calcule a Transformada de Laplace.

$$f(t) = 5e^{-2t} - 3sen4t \qquad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - 3\mathcal{L}\{sen4t\}$$

- ✓ Nos exemplos anteriores foram calculadas as transformadas da exponencial e do seno.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad \overset{a=-2}{\Rightarrow} \quad 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\}$$

$$\mathcal{L}\{senat\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

Exemplo 3: Calcule a Transformada de Laplace.

$$f(t) = 5e^{-2t} - 3sen4t \quad\quad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - 3\mathcal{L}\{sen4t\}$$

- ✓ Nos exemplos anteriores foram calculadas as transformadas da exponencial e do seno.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad \overset{a=-2}{\Rightarrow} \quad 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \frac{5}{s+2}$$

$$\mathcal{L}\{senat\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

Exemplo 3: Calcule a Transformada de Laplace.

$$f(t) = 5e^{-2t} - 3sen4t \qquad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - 3\mathcal{L}\{sen4t\}$$

- ✓ Nos exemplos anteriores foram calculadas as transformadas da exponencial e do seno.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad \overset{a=-2}{\Rightarrow} \quad 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \frac{5}{s+2}$$

$$\mathcal{L}\{senat\} = \frac{a}{s^2+a^2} \quad \overset{a=4}{\Rightarrow} \quad 3\mathcal{L}\{sen4t\}$$

Exemplo 3: Calcule a Transformada de Laplace.

$$f(t) = 5e^{-2t} - 3sen4t \qquad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - 3\mathcal{L}\{sen4t\}$$

- ✓ Nos exemplos anteriores foram calculadas as transformadas da exponencial e do seno.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad \overset{a=-2}{\Rightarrow} \quad 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \frac{5}{s+2}$$

$$\mathcal{L}\{senat\} = \frac{a}{s^2+a^2} \quad \overset{a=4}{\Rightarrow} \quad 3\mathcal{L}\{sen4t\} = \frac{12}{s^2+4^2}$$

Exemplo 3: Calcule a Transformada de Laplace.

$$f(t) = 5e^{-2t} - 3sen4t \qquad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - 3\mathcal{L}\{sen4t\}$$

✓ Nos exemplos anteriores foram calculadas as transformadas da exponencial e do seno.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad \overset{a=-2}{\Rightarrow} \quad 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \frac{5}{s+2}$$

$$\mathcal{L}\{senat\} = \frac{a}{s^2+a^2} \quad \overset{a=4}{\Rightarrow} \quad 3\mathcal{L}\{sen4t\} = \frac{12}{s^2+4^2}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{5}{s+2} - \frac{12}{s^2+4^2}$$

Ideia geral da transformada

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

Ideia geral da transformada

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

1. A integral transforma um PVI de variável independente t em um problema mais simples de variável *s.*

Ideia geral da transformada

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

1. A integral transforma um PVI de variável independente t em um problema mais simples de variável *s.*

2. O problema mais simples é algébrico cuja resolução permite encontrar $F(s)$.

Ideia geral da transformada

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

1. A integral transforma um PVI de variável independente t em um problema mais simples de variável *s.*
2. O problema mais simples é algébrico cuja resolução permite encontrar $F(s)$.
3. Após resolver o problema algébrico, recupera-se a função $f = f(t)$ aplicando-se a transformada inversa sobre $F = F(s)$.

Para depois desta aula:

- Estudar seção 6.1 do livro texto (Boyce).
- Resolver os exemplos da aula.
- Praticar: exercícios da seção 6.1 do Boyce.

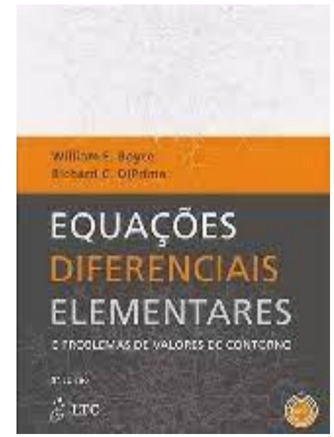
Próxima aula:

- Solução de problemas de valor inicial.

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Numeração dos exercícios com base na 9ª ed.



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2020.