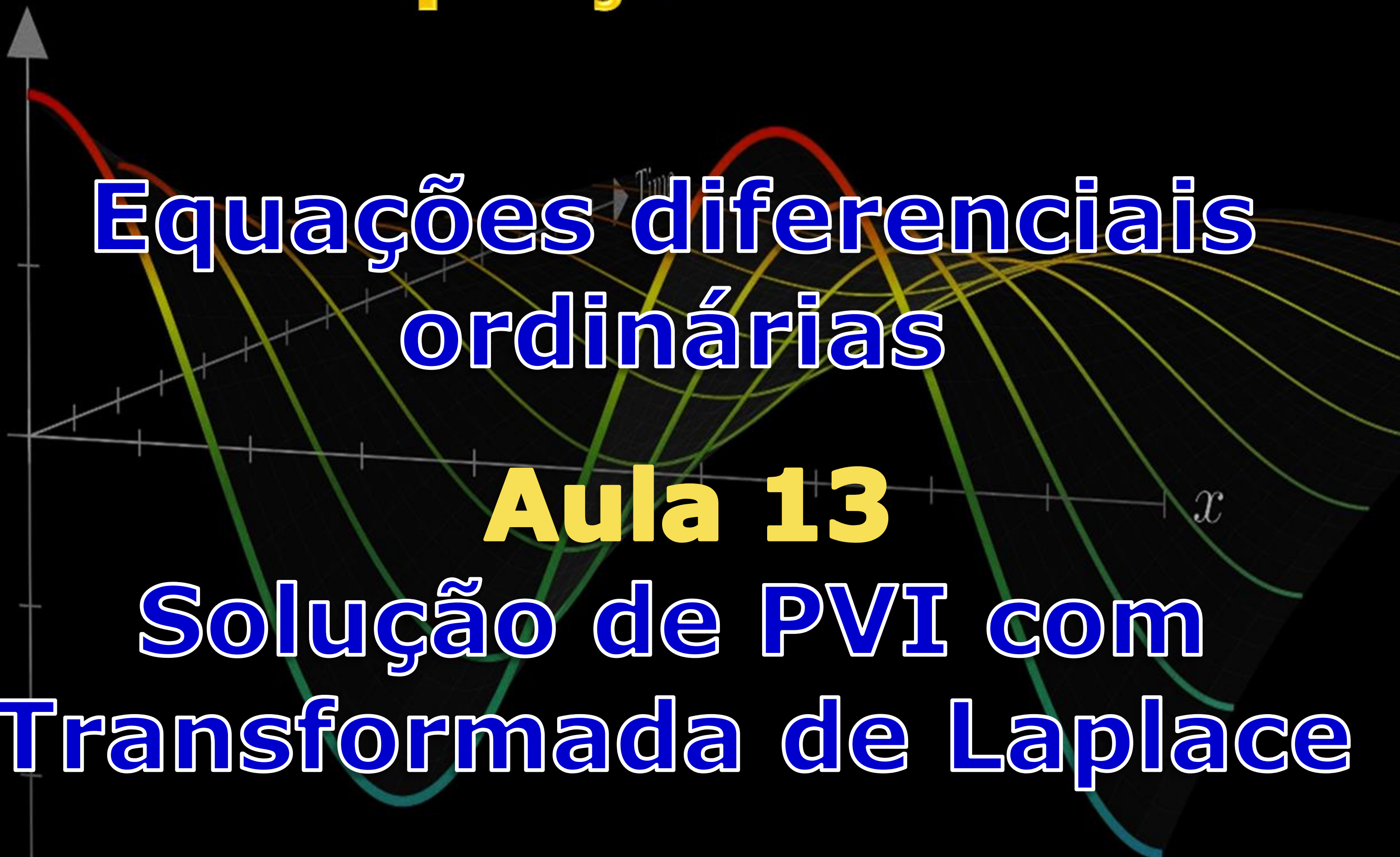
Equações diferenciais



Equações diferenciais ordinárias

Aula 13

Solução de PVI com Transformada de Laplace

Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Introdução.
2. Teorema da transformada de derivadas.
3. Exemplo de PVI homogêneo.
4. Observações sobre o método.
5. Exemplo de PVI não homogêneo.

Pré-requisitos

- Decomposição em frações parciais.

Introdução

Introdução

- Alguns problemas de valor inicial (PVI) podem ser resolvidos pela Transformada de Laplace.
- A equação diferencial deverá ser linear com coeficientes constantes.

Introdução

- Alguns problemas de valor inicial (PVI) podem ser resolvidos pela Transformada de Laplace.
- A equação diferencial deverá ser linear com coeficientes constantes.
- A técnica pode ser aplicada tanto na equação homogênea quanto na equação não homogênea.

Introdução

- Alguns problemas de valor inicial (PVI) podem ser resolvidos pela Transformada de Laplace.
- A equação diferencial deverá ser linear com coeficientes constantes.
- A técnica pode ser aplicada tanto na equação homogênea quanto na equação não homogênea.
- A resolução da eq. dif. não homogênea com a transformada é mais simples em comparação com outros métodos.

Introdução

- Alguns problemas de valor inicial (PVI) podem ser resolvidos pela Transformada de Laplace.
- A equação diferencial deverá ser linear com coeficientes constantes.
- A técnica pode ser aplicada tanto na equação homogênea quanto na equação não homogênea.
- A resolução da eq. dif. não homogênea com a transformada é mais simples em comparação com outros métodos.
- O próximo teorema estabelece a transformada de derivadas, fundamental para resolução de PVIs.

Teorema da transformada de derivadas

Teorema 6.2.1

Seja uma função f contínua e f' contínua por partes em um intervalo $0 \leq t \leq A$.

Teorema 6.2.1

Seja uma função f contínua e f' contínua por partes em um intervalo $0 \leq t \leq A$.

Supondo que $|f(t)| \leq Ke^{at}$ para $t \geq M \in \mathbb{R}$; com K, M e a constantes reais.

Teorema 6.2.1

Seja uma função f contínua e f' contínua por partes em um intervalo $0 \leq t \leq A$.

Supondo que $|f(t)| \leq Ke^{at}$ para $t \geq M \in \mathbb{R}$; com K, M e a constantes reais.

Então,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Teorema 6.2.1

Seja uma função f contínua e f' contínua por partes em um intervalo $0 \leq t \leq A$.

Supondo que $|f(t)| \leq Ke^{at}$ para $t \geq M \in \mathbb{R}$; com K, M e a constantes reais.

Então,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Corolário 6.2.2

Com as mesmas condições do teorema tem-se que:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

Exemplo de PVI homogêneo

Exemplo 1: Resolver o PVI com a Transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Exemplo 1: Resolver o PVI com a Transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

✓ Este problema poderia ser resolvido pelo método da eq. característica.

$$r^2 - r - 2 = 0$$

Exemplo 1: Resolver o PVI com a Transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

✓ Este problema poderia ser resolvido pelo método da eq. característica.

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r+1)(r-2) = 0$$

Exemplo 1: Resolver o PVI com a Transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

✓ Este problema poderia ser resolvido pelo método da eq. característica.

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r+1)(r-2) = 0$$

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 2$$

Exemplo 1: Resolver o PVI com a Transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

- ✓ Este problema poderia ser resolvido pelo método da eq. característica.

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r+1)(r-2) = 0$$

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}}$$

Exemplo 1: Resolver o PVI com a Transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

- ✓ Este problema poderia ser resolvido pelo método da eq. característica.

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r+1)(r-2) = 0$$

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}}$$

- ✓ Ao inserir as condições iniciais determina-se C_1 e C_2.

$$y(0) = 1 = C_1 e^0 + C_2 e^0$$

Exemplo 1: Resolver o PVI com a Transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

- ✓ Este problema poderia ser resolvido pelo método da eq. característica.

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r+1)(r-2) = 0$$

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}}$$

- ✓ Ao inserir as condições iniciais determina-se C_1 e C_2.

$$y(0) = 1 = C_1 e^0 + C_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 1$$

Exemplo 1: Resolver o PVI com a Transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

✓ Este problema poderia ser resolvido pelo método da eq. característica.

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r+1)(r-2) = 0$$

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}}$$

✓ Ao inserir as condições iniciais determina-se $C_1 \; e \; C_2$.

$$y(0) = 1 = C_1 e^0 + C_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 1$$

$$y'(0) = 0 = -C_1 e^0 + 2C_2 e^0$$

Exemplo 1: Resolver o PVI com a Transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

- ✓ Este problema poderia ser resolvido pelo método da eq. característica.

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r+1)(r-2) = 0$$

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}}$$

- ✓ Ao inserir as condições iniciais determina-se C_1 e C_2.

$$y(0) = 1 = C_1 e^0 + C_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 1$$

$$y'(0) = 0 = -C_1 e^0 + 2C_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2C_2$$

Exemplo 1: Resolver o PVI com a Transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

- ✓ Este problema poderia ser resolvido pelo método da eq. característica.

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r+1)(r-2) = 0$$

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}}$$

- ✓ Ao inserir as condições iniciais determina-se C_1 e C_2.

$$y(0) = 1 = C_1 e^0 + C_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1/3$$

$$y'(0) = 0 = -C_1 e^0 + 2C_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2C_2$$

Exemplo 1: Resolver o PVI com a Transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

✓ Este problema poderia ser resolvido pelo método da eq. característica.

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r+1)(r-2) = 0$$

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}}$$

✓ Ao inserir as condições iniciais determina-se C_1 e C_2.

$$y(0) = 1 = C_1 e^0 + C_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1/3$$

$$y'(0) = 0 = -C_1 e^0 + 2C_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2C_2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2/3$$

Exemplo 1: Resolver o PVI com a Transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

✓ Este problema poderia ser resolvido pelo método da eq. característica.

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r+1)(r-2) = 0$$

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}}$$

✓ Ao inserir as condições iniciais determina-se C_1 e C_2.

$$y(0) = 1 = C_1 e^0 + C_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1/3$$

$$y'(0) = 0 = -C_1 e^0 + 2C_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2C_2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2/3$$

✓ Solução do PVI: $\boxed{y = \frac{2}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t}}$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

- ✓ Resolução com a Transformada de Laplace.

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Resolução com a Transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

- ✓ Resolução com a Transformada de Laplace.

$$\underbrace{\mathcal{L}\{y''\}} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$\boxed{[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)]}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Resolução com a Transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$\boxed{[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)]} - \boxed{[s\mathcal{L}\{y\} - y(0)]}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

- ✓ Resolução com a Transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$\boxed{[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)]} - \boxed{[s\mathcal{L}\{y\} - y(0)]} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

- ✓ Resolução com a Transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$\boxed{[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)]} - \boxed{[s\mathcal{L}\{y\} - y(0)]} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$[s^2Y(s) - s.1 - 0] - [sY(s) - 1] - 2Y(s) = 0$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

- ✓ Resolução com a Transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$\boxed{[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)]} - \boxed{[s\mathcal{L}\{y\} - y(0)]} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$[s^2Y(s) - s.1 - 0] - [sY(s) - 1] - 2Y(s) = 0$$

$$[s^2 - s - 2]Y(s) + 1 - s = 0$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

- ✓ Resolução com a Transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$\boxed{[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)]} - \boxed{[s\mathcal{L}\{y\} - y(0)]} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$[s^2Y(s) - s.1 - 0] - [sY(s) - 1] - 2Y(s) = 0$$

$$[s^2 - s - 2]Y(s) + 1 - s = 0$$

$$[s^2 - s - 2]Y(s) = s - 1$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

- ✓ Resolução com a Transformada de Laplace.

$$\underbrace{\mathcal{L}\{y''\}} - \underbrace{\mathcal{L}\{y'\}} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$\boxed{[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)]} - \boxed{[s\mathcal{L}\{y\} - y(0)]} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$[s^2Y(s) - s.1 - 0] - [sY(s) - 1] - 2Y(s) = 0$$

$$[s^2 - s - 2]Y(s) + 1 - s = 0$$

$$[s^2 - s - 2]Y(s) = s - 1$$

$$Y(s) = \frac{s - 1}{s^2 - s - 2}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

- ✓ Resolução com a Transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$\boxed{[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)]} - \boxed{[s\mathcal{L}\{y\} - y(0)]} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$[s^2Y(s) - s.1 - 0] - [sY(s) - 1] - 2Y(s) = 0$$

$$[s^2 - s - 2]Y(s) + 1 - s = 0$$

$$[s^2 - s - 2]Y(s) = s - 1$$

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2 - s - 2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Y(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)}}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

- ✓ Decompor o denominador em frações parciais.

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

- ✓ Decompor o denominador em frações parciais.

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s-2)}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Decompor o denominador em frações parciais.

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s-2)}$$

$$= \frac{s-1}{(s+1)(s-2)}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

- ✓ Decompor o denominador em frações parciais.

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s-2)}$$

$$= \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A(s-2) + B(s+1)}{(s+1)(s-2)}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

- ✓ Decompor o denominador em frações parciais.

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s-2)}$$

$$= \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A(s-2) + B(s+1)}{(s+1)(s-2)}$$

- ✓ Como os denominadores são iguais,

$$s - 1 = A(s-2) + B(s+1)$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Decompor o denominador em frações parciais.

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s-2)}$$

$$= \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A(s-2) + B(s+1)}{(s+1)(s-2)}$$

✓ Como os denominadores são iguais,

$$s - 1 = A(s-2) + B(s+1) \quad \Rightarrow \quad s - 1 = (A+B)s - 2A + B$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

- ✓ Decompor o denominador em frações parciais.

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s-2)}$$

$$= \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A(s-2) + B(s+1)}{(s+1)(s-2)}$$

- ✓ Como os denominadores são iguais,

$$s - 1 = A(s-2) + B(s+1) \;\Rightarrow\; s - 1 = (A+B)s - 2A + B$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A + B = -1 \end{cases}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

- ✓ Decompor o denominador em frações parciais.

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s-2)}$$

$$= \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A(s-2) + B(s+1)}{(s+1)(s-2)}$$

- ✓ Como os denominadores são iguais,

$$s - 1 = A(s-2) + B(s+1) \;\Rightarrow\; s - 1 = (A+B)s - 2A + B$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A + B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 - B \\ -2(1-B) + B = -1 \end{cases}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Decompor o denominador em frações parciais.

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s-2)}$$

$$= \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A(s-2) + B(s+1)}{(s+1)(s-2)}$$

✓ Como os denominadores são iguais,

$$s - 1 = A(s-2) + B(s+1) \;\Rightarrow\; s - 1 = (A+B)s - 2A + B$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A + B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 - B \\ -2(1-B) + B = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = 1/3}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Decompor o denominador em frações parciais.

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s-2)}$$

$$= \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A(s-2) + B(s+1)}{(s+1)(s-2)}$$

✓ Como os denominadores são iguais,

$$s - 1 = A(s-2) + B(s+1) \quad \Rightarrow \quad s - 1 = (A+B)s - 2A + B$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A + B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 - B \\ -2(1-B) + B = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} A = 2/3 \\ \hline B = 1/3 \end{array}}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Portanto, a expressão de $Y(s)$ fica:

$$\boxed{Y(s) = \frac{2/3}{(s+1)} + \frac{1/3}{(s-2)}}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

- ✓ Portanto, a expressão de $Y(s)$ fica:

$$\boxed{Y(s) = \frac{2/3}{(s+1)} + \frac{1/3}{(s-2)}}$$

- ✓ Pelos exemplos resolvidos, sabe-se que:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \qquad s > 0$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

- Portanto, a expressão de $Y(s)$ fica:

$$\boxed{Y(s) = \frac{2/3}{(s+1)} + \frac{1/3}{(s-2)}}$$

- Pelos exemplos resolvidos, sabe-se que:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \qquad s > 0$$

- Então,

$$\frac{2}{3}\frac{1}{s+1} = \frac{2}{3}\mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

- ✓ Portanto, a expressão de $Y(s)$ fica:

$$\boxed{Y(s) = \frac{2/3}{(s+1)} + \frac{1/3}{(s-2)}}$$

- ✓ Pelos exemplos resolvidos, sabe-se que:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \qquad s > 0$$

- ✓ Então,

$$\frac{2}{3}\frac{1}{s+1} = \frac{2}{3}\mathcal{L}\{e^{-t}\} \quad \text{e} \quad \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} = \frac{1}{3}\mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

- Portanto, a expressão de $Y(s)$ fica:

$$\boxed{Y(s) = \frac{2/3}{(s+1)} + \frac{1/3}{(s-2)}}$$

- Pelos exemplos resolvidos, sabe-se que:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \qquad s > 0$$

- Então,

$$\frac{2}{3}\frac{1}{s+1} = \frac{2}{3}\mathcal{L}\{e^{-t}\} \quad \text{e} \quad \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} = \frac{1}{3}\mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

- Portanto, $$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}$$ *Solução do PVI*

Observações sobre o método da transformada

Observações sobre o método

1. A equação diferencial na variável t é reduzida para uma equação algébrica de variável s.

Observações sobre o método

1. A equação diferencial na variável t é reduzida para uma equação algébrica de variável s.
2. A transformada $Y(s)$ de $y(t)$ é encontrada, resolvendo-se essa equação algébrica.

Observações sobre o método

1. A equação diferencial na variável t é reduzida para uma equação algébrica de variável s.
2. A transformada $Y(s)$ de $y(t)$ é encontrada, resolvendo-se essa equação algébrica.
3. As constantes arbitrárias são determinadas ao se substituir as condições iniciais na expressão de $Y(s)$.

Observações sobre o método

1. A equação diferencial na variável t é reduzida para uma equação algébrica de variável s.
2. A transformada $Y(s)$ de $y(t)$ é encontrada, resolvendo-se essa equação algébrica.
3. As constantes arbitrárias são determinadas ao se substituir as condições iniciais na expressão de $Y(s)$.
4. As equações diferenciais não homogêneas são resolvidas da mesma forma que as homogêneas.

Observações sobre o método

1. A equação diferencial na variável t é reduzida para uma equação algébrica de variável s.
2. A transformada $Y(s)$ de $y(t)$ é encontrada, resolvendo-se essa equação algébrica.
3. As constantes arbitrárias são determinadas ao se substituir as condições iniciais na expressão de $Y(s)$.
4. As equações diferenciais não homogêneas são resolvidas da mesma forma que as homogêneas.
5. A dificuldade reside em encontrar a transformada de Laplace inversa $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t)$.

Observações sobre o método

1. A equação diferencial na variável t é reduzida para uma equação algébrica de variável s.
2. A transformada $Y(s)$ de $y(t)$ é encontrada, resolvendo-se essa equação algébrica.
3. As constantes arbitrárias são determinadas ao se substituir as condições iniciais na expressão de $Y(s)$.
4. As equações diferenciais não homogêneas são resolvidas da mesma forma que as homogêneas.
5. A dificuldade reside em encontrar a transformada de Laplace inversa $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t)$.
6. Pelo Teorema 3.2.1 haverá solução única para o PVI, portanto, única transformada inversa para $Y(s)$.

TABELA 6.2.1 Transformadas de Laplace Elementares

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\dfrac{1}{s}, \quad s > 0$
2. e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$
3. t^n, n um inteiro positivo	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
4. $\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
5. $\operatorname{sen}(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
16. $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$

Transformada de Laplace

Problema de valor inicial

Eq. dif. linear

↓ ** Métodos anteriores*

Solução do PVI

$y(t)$

** Equação característica, coeficientes a determinar e variação dos parâmetros.*

Transformada de Laplace

1

Problema de valor inicial

Eq. dif. linear

Aplicar a transformada $\mathcal{L}$

** Métodos anteriores*

Solução do PVI $y(t)$

** Equação característica, coeficientes a determinar e variação dos parâmetros.*

Transformada de Laplace

1

2

Problema de valor inicial

Eq. dif. linear

→

Aplicar a transformada
$\mathcal{L}$

→

Equação algébrica em
$Y(s)$

** Métodos anteriores*

Solução do PVI
$y(t)$

** Equação característica, coeficientes a determinar e variação dos parâmetros.*

Transformada de Laplace

Problema de valor inicial

Eq. dif. linear

1

Aplicar a transformada $\mathcal{L}$

2

Equação algébrica em $Y(s)$

Solução de $Y(s)$ por frações parciais

3

** Métodos anteriores*

Solução do PVI $y(t)$

** Equação característica, coeficientes a determinar e variação dos parâmetros.*

Transformada de Laplace

Problema de valor inicial

Eq. dif. linear

→ **1** Aplicar a transformada $\mathcal{L}$

→ **2** Equação algébrica em $Y(s)$

↓ **3** Solução de $Y(s)$ por frações parciais

← **4** Aplicar a transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$

← Solução do PVI $y(t)$

** Métodos anteriores*

** Equação característica, coeficientes a determinar e variação dos parâmetros.*

Exemplo de PVI não homogêneo

Exemplo 2: Resolver o PVI. $\begin{cases} y'' + y = \text{sen}2\text{t} \\ y(0) = 2, \quad \text{y}'(0) = 1 \end{cases}$

Exemplo 2: Resolver o PVI. $\begin{cases} y'' + y = \text{sen}2\text{t} \\ y(0) = 2, \quad \text{y}'(0) = 1 \end{cases}$

- ✓ Aplica-se a transformada.

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{sen2t\}$$

Exemplo 2: Resolver o PVI. $\begin{cases} y'' + y = \text{sen}2\text{t} \\ y(0) = 2, \quad \text{y}'(0) = 1 \end{cases}$

- ✓ Aplica-se a transformada.

$$\underbrace{\mathcal{L}\{y''\}}_{\boxed{[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)]}} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{sen2t\}$$

Exemplo 2: Resolver o PVI. $\begin{cases} y'' + y = \text{sen}2\text{t} \\ y(0) = 2, \quad \text{y}'(0) = 1 \end{cases}$

- ✓ Aplica-se a transformada.

$$\underbrace{\mathcal{L}\{y''\}} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{sen2t\}$$

$$\boxed{[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)]} + \mathcal{L}\{y\}$$

Exemplo 2: Resolver o PVI. $\begin{cases} y'' + y = \text{sen}2\text{t} \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$

- ✓ Aplica-se a transformada.

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{sen2t\}$$

$$\boxed{[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)]} + \mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{s^2+4}$$

Exemplo 2: Resolver o PVI. $\begin{cases} y'' + y = \text{sen}2\text{t} \\ y(0) = 2, \quad \text{y}'(0) = 1 \end{cases}$

- ✓ Aplica-se a transformada.

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{sen2t\}$$

$$\boxed{[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)]} + \mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{s^2+4}$$

$$[s^2Y(s) - s.2 - 1] + Y(s) = \frac{2}{s^2+4}$$

Exemplo 2: Resolver o PVI. $\begin{cases} y'' + y = \text{sen}2\text{t} \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$

✓ Aplica-se a transformada.

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{sen2t\}$$

$$\boxed{[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)]} + \mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{s^2+4}$$

$$[s^2Y(s) - s.2 - 1] + Y(s) = \frac{2}{s^2+4}$$

$$[s^2+1]Y(s) - 2s - 1 = \frac{2}{s^2+4}$$

Exemplo 2: Resolver o PVI. $\begin{cases} y'' + y = \text{sen}2\text{t} \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$

- ✓ Aplica-se a transformada.

$$\underbrace{\mathcal{L}\{y''\}} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{sen2t\}$$

$$\boxed{[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)]} + \mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{s^2+4}$$

$$[s^2Y(s) - s.2 - 1] + Y(s) = \frac{2}{s^2+4}$$

$$[s^2+1]Y(s) - 2s - 1 = \frac{2}{s^2+4}$$

$$[s^2+1]Y(s) = \frac{2}{s^2+4} + (2s+1)$$

Exemplo 2: Resolver o PVI. $\begin{cases} y'' + y = \text{sen}2\text{t} \\ y(0) = 2, \quad \text{y}'(0) = 1 \end{cases}$

- ✓ Aplica-se a transformada.

$$\underbrace{\mathcal{L}\{y''\}} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{sen2t\}$$

$$\boxed{[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)]} + \mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{s^2+4}$$

$$[s^2Y(s) - s.2 - 1] + Y(s) = \frac{2}{s^2+4}$$

$$[s^2+1]Y(s) - 2s - 1 = \frac{2}{s^2+4}$$

$$[s^2+1]Y(s) = \frac{2}{s^2+4} + (2s+1)$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)} \frac{(2s+1)(s^2+4)+2}{(s^2+4)}}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \text{sen}2\text{t} \qquad y(0) = 2, \qquad \text{y}'(0) = 1$

- ✓ Como os termos no denominador são quadráticos em s, a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s+1)(s^2+4)+2}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \text{sen}2\text{t} \qquad y(0) = 2, \qquad \text{y}'(0) = 1$

- ✓ Como os termos no denominador são quadráticos em s, a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s+1)(s^2+4)+2}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{2s^3+s^2+8s+6}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \text{sen}2\text{t} \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

- ✓ Como os termos no denominador são quadráticos em s, a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s+1)(s^2+4)+2}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{2s^3+s^2+8s+6}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$Y(s) = \frac{As+B}{(s^2+1)} + \frac{Cs+D}{(s^2+4)}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \text{sen}2\text{t} \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1$

- ✓ Como os termos no denominador são quadráticos em s, a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s+1)(s^2+4)+2}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{2s^3+s^2+8s+6}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$Y(s) = \frac{As+B}{(s^2+1)} + \frac{Cs+D}{(s^2+4)} = \frac{(As+B)(s^2+4)+(Cs+D)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \text{sen}2\text{t} \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1$

- ✓ Como os termos no denominador são quadráticos em s, a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s+1)(s^2+4)+2}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{2s^3+s^2+8s+6}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$Y(s) = \frac{As+B}{(s^2+1)} + \frac{Cs+D}{(s^2+4)} = \frac{(As+B)(s^2+4)+(Cs+D)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

- ✓ Como os denominadores são iguais,

$$2s^3+s^2+8s+6 = (A+C)s^3+(B+D)s^2+(4A+C)s+(4B+D)$$

Exemplo 2: $y'' + y = \text{sen}2t \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1$

- ✓ Como os termos no denominador são quadráticos em s, a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s+1)(s^2+4)+2}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{2s^3+s^2+8s+6}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$Y(s) = \frac{As+B}{(s^2+1)} + \frac{Cs+D}{(s^2+4)} = \frac{(As+B)(s^2+4)+(Cs+D)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

- ✓ Como os denominadores são iguais,

$$2s^3+s^2+8s+6 = (A+C)s^3+(B+D)s^2+(4A+C)s+(4B+D)$$

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ B + D = 1 \\ 4A + C = 8 \\ 4B + D = 6 \end{cases}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \text{sen}2\text{t} \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1$

- ✓ Como os termos no denominador são quadráticos em s, a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s+1)(s^2+4)+2}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{2s^3+s^2+8s+6}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$Y(s) = \frac{As+B}{(s^2+1)} + \frac{Cs+D}{(s^2+4)} = \frac{(As+B)(s^2+4)+(Cs+D)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

- ✓ Como os denominadores são iguais,

$$2s^3+s^2+8s+6 = (A+C)s^3+(B+D)s^2+(4A+C)s+(4B+D)$$

$$\begin{cases} A+C = 2 \\ B+D = 1 \\ 4A+C = 8 \\ 4B+D = 6 \end{cases}$$

3ª eq. −1ª

$$3A = 6$$

Exemplo 2: $y'' + y = \text{sen}2\text{t} \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

- ✓ Como os termos no denominador são quadráticos em s, a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s+1)(s^2+4)+2}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{2s^3+s^2+8s+6}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$Y(s) = \frac{As+B}{(s^2+1)} + \frac{Cs+D}{(s^2+4)} = \frac{(As+B)(s^2+4)+(Cs+D)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

- ✓ Como os denominadores são iguais,

$$2s^3+s^2+8s+6 = (A+C)s^3+(B+D)s^2+(4A+C)s+(4B+D)$$

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ B + D = 1 \\ 4A + C = 8 \\ 4B + D = 6 \end{cases}$$

3ª eq. −1ª

$$3A = 6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 2}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \text{sen}2\text{t} \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1$

- ✓ Como os termos no denominador são quadráticos em s, a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s+1)(s^2+4)+2}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{2s^3+s^2+8s+6}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$Y(s) = \frac{As+B}{(s^2+1)} + \frac{Cs+D}{(s^2+4)} = \frac{(As+B)(s^2+4)+(Cs+D)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

- ✓ Como os denominadores são iguais,

$$2s^3+s^2+8s+6 = (A+C)s^3+(B+D)s^2+(4A+C)s+(4B+D)$$

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ B + D = 1 \\ 4A + C = 8 \\ 4B + D = 6 \end{cases}$$

3ª eq. −1ª

$$3A = 6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 2}$$

Na 1ª

$$\Rightarrow \quad \boxed{C = 0}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \text{sen}2\text{t} \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1$

- Como os termos no denominador são quadráticos em s, a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s+1)(s^2+4)+2}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{2s^3+s^2+8s+6}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$Y(s) = \frac{As+B}{(s^2+1)} + \frac{Cs+D}{(s^2+4)} = \frac{(As+B)(s^2+4)+(Cs+D)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

- Como os denominadores são iguais,

$$2s^3+s^2+8s+6 = (A+C)s^3+(B+D)s^2+(4A+C)s+(4B+D)$$

$$\begin{cases} A+C=2 \\ B+D=1 \\ 4A+C=8 \\ 4B+D=6 \end{cases}$$

3ª eq. −1ª

$$3A = 6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A=2}$$

Na 1ª

$$\Rightarrow \quad \boxed{C=0}$$

4ª eq. −2ª

$$3B = 5$$

Exemplo 2: $y'' + y = \text{sen}2\text{t} \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

- ✓ Como os termos no denominador são quadráticos em s, a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s+1)(s^2+4)+2}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{2s^3+s^2+8s+6}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$Y(s) = \frac{As+B}{(s^2+1)} + \frac{Cs+D}{(s^2+4)} = \frac{(As+B)(s^2+4)+(Cs+D)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

- ✓ Como os denominadores são iguais,

$$2s^3+s^2+8s+6 = (A+C)s^3+(B+D)s^2+(4A+C)s+(4B+D)$$

$$\begin{cases} A+C=2 \\ B+D=1 \\ 4A+C=8 \\ 4B+D=6 \end{cases}$$

3ª eq. −1ª

$$3A = 6 \Rightarrow \boxed{A=2} \quad \text{Na 1ª} \Rightarrow \boxed{C=0}$$

4ª eq. −2ª

$$3B = 5 \Rightarrow \boxed{B=5/3}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \text{sen}2t \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1$

- ✓ Como os termos no denominador são quadráticos em s, a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s+1)(s^2+4)+2}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{2s^3+s^2+8s+6}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$Y(s) = \frac{As+B}{(s^2+1)} + \frac{Cs+D}{(s^2+4)} = \frac{(As+B)(s^2+4)+(Cs+D)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

- ✓ Como os denominadores são iguais,

$$2s^3+s^2+8s+6 = (A+C)s^3+(B+D)s^2+(4A+C)s+(4B+D)$$

$$\begin{cases} A+C=2 \\ B+D=1 \\ 4A+C=8 \\ 4B+D=6 \end{cases}$$

3ª eq. −1ª

$3A = 6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A=2} \quad \overset{\text{Na 1ª}}{\Rightarrow} \quad \boxed{C=0}$

4ª eq. −2ª

$3B = 5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B=5/3} \quad \overset{\text{Na 2ª}}{\Rightarrow} \quad \boxed{D=-2/3}$

Exemplo 2: $y'' + y = \text{sen}2\text{t} \qquad y(0) = 2, \qquad \text{y}'(0) = 1$

- ✓ Assim, a função transformada fica:

$$Y(s) = \frac{2s + 5/3}{(s^2 + 1)} - \frac{2/3}{(s^2 + 4)}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \text{sen}2\text{t} \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1$

- ✓ Assim, a função transformada fica:

$$Y(s) = \frac{2s + 5/3}{(s^2+1)} - \frac{2/3}{(s^2+4)} = 2 \cdot \frac{s}{s^2+1}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \text{sen}2\text{t} \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1$

- ✓ Assim, a função transformada fica:

$$Y(s) = \frac{2s + 5/3}{(s^2 + 1)} - \frac{2/3}{(s^2 + 4)} = 2 \cdot \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{s^2 + 1}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \text{sen}2t \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

✓ Assim, a função transformada fica:

$$Y(s) = \frac{2s + 5/3}{(s^2+1)} - \frac{2/3}{(s^2+4)} = 2 \cdot \frac{s}{s^2+1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{s^2+4}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \text{sen}2\text{t} \quad y(0) = 2, \quad \text{y}'(0) = 1$

- ✓ Assim, a função transformada fica:

$$Y(s) = \frac{2s + 5/3}{(s^2+1)} - \frac{2/3}{(s^2+4)} = 2 \cdot \frac{s}{s^2+1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{s^2+4}$$

- ✓ Aplicar a transformada inversa para determinar $y(t)$.

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} =$$

Exemplo 2: $y'' + y = \text{sen}2\text{t} \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

- ✓ Assim, a função transformada fica:

$$Y(s) = \frac{2s + 5/3}{(s^2+1)} - \frac{2/3}{(s^2+4)} = 2 \cdot \frac{s}{s^2+1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{s^2+4}$$

- ✓ Aplicar a transformada inversa para determinar $y(t)$.

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} +$$

Exemplo 2: $y'' + y = \text{sen}2\text{t} \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1$

- ✓ Assim, a função transformada fica:

$$Y(s) = \frac{2s + 5/3}{(s^2+1)} - \frac{2/3}{(s^2+4)} = 2 \cdot \frac{s}{s^2+1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{s^2+4}$$

- ✓ Aplicar a transformada inversa para determinar $y(t)$.

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{5}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \text{sen}2\text{t} \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1$

- Assim, a função transformada fica:

$$Y(s) = \frac{2s + 5/3}{(s^2+1)} - \frac{2/3}{(s^2+4)} = 2 \cdot \frac{s}{s^2+1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{s^2+4}$$

- Aplicar a transformada inversa para determinar $y(t)$.

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{5}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - \frac{1}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \text{sen}2\text{t} \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1$

✓ Assim, a função transformada fica:

$$Y(s) = \frac{2s + 5/3}{(s^2+1)} - \frac{2/3}{(s^2+4)} = 2 \cdot \frac{s}{s^2+1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{s^2+4}$$

✓ Aplicar a transformada inversa para determinar $y(t)$.

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{5}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - \frac{1}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

✓ Consultar tabela de transformada para obter a solução do PVI.

$$y(t) = 2cost + \frac{5}{3}sent - \frac{1}{3}sen2t$$

Para depois desta aula:

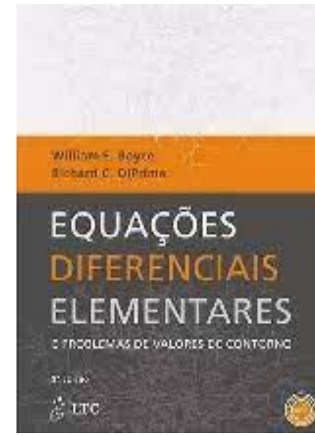
- Estudar seção 6.2 do livro texto (Boyce).
- Resolver os exemplos da aula.
- Praticar: exercícios da seção 6.2 do Boyce.

Próxima aula:

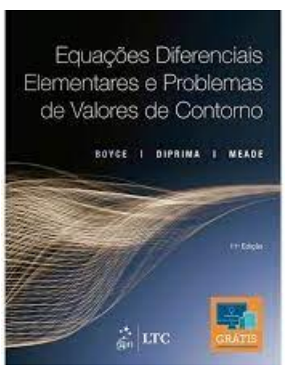
- Função degrau ou de Heaviside.

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.



Numeração dos exercícios com base na 9ª ed.



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2020.