Equações diferenciais

Equações diferenciais ordinárias

Aula 16

Função Impulso unitário

Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Função impulso ou delta de Dirac.
2. Transformada de Laplace da função impulso.
3. Exemplos.
4. Exercícios em sala.

Pré-requisitos

- Funções e transformadas básicas de Laplace.

Definição da função impulso unitário

Função impulso unitário

- A tensões impulsivas agem por um curto período de tempo, por exemplo:
  - ✓ Pancada em uma bola.
  - ✓ Colisão de corpos.
  - ✓ Força súbita em um sistema oscilatório.

Função impulso unitário

- A tensões impulsivas agem por um curto período de tempo, por exemplo:
  - Pancada em uma bola.
  - Colisão de corpos.
  - Força súbita em um sistema oscilatório.
- Problemas que envolvem impulso dão origem à equações diferenciais da forma:

$$ay'' + by' + cy = g(t)$$

Função impulso unitário

- A tensões impulsivas agem por um curto período de tempo, por exemplo:
  - ✓ Pancada em uma bola.
  - ✓ Colisão de corpos.
  - ✓ Força súbita em um sistema oscilatório.
- Problemas que envolvem impulso dão origem à equações diferenciais da forma:

$$ay'' + by' + cy = g(t)$$

$g(t)$: com frequência, apresenta alta intensidade em um instante e é nula no restante do intervalo.

Função impulso unitário

- Em um sistema mecânico, por exemplo, o impulso $I(\tau)$ corresponde à atuação da força $g(t)$ no intervalo $(t_o - \tau,\ t_o + \tau)$:

Função impulso unitário

- Em um sistema mecânico, por exemplo, o impulso $I(\tau)$ corresponde à atuação da força $g(t)$ no intervalo $(t_o - \tau,\ t_o + \tau)$:
- O impulso é definido pela integral:

$$I(\tau) = \int_{t_o-\tau}^{t_o+\tau} g(t)dt$$

Função impulso unitário

- Em um sistema mecânico, por exemplo, o impulso $I(\tau)$ corresponde à atuação da força $g(t)$ no intervalo $(t_o - \tau,\ t_o + \tau)$:
- O impulso é definido pela integral:

$$I(\tau) = \int_{t_o-\tau}^{t_o+\tau} g(t)dt$$

- Como g(t) é nula fora do intervalo $(t_o - \tau,\ t_o + \tau)$:

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$$

Função impulso unitário (δ)

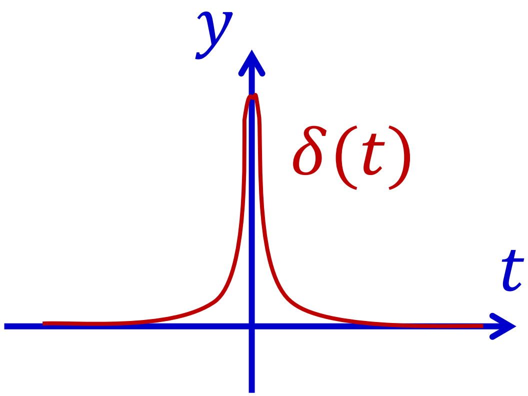
- Definição da função impulso unitário (δ):

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1, & t = 0 \end{cases}$$

Função impulso unitário (δ)

- Definição da função impulso unitário (δ):

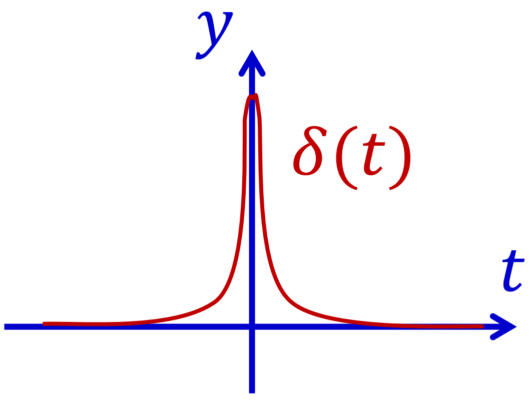
$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1, & t = 0 \end{cases}$$



Função impulso unitário (δ)

- Definição da função impulso unitário (δ):

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1, & t = 0 \end{cases}$$

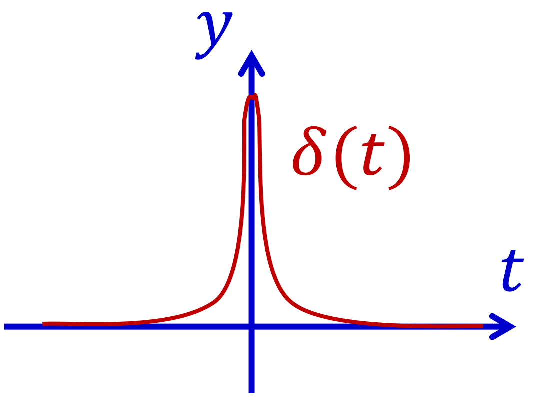


- Essa função também é conhecida como delta de Dirac.

Função impulso unitário (δ)

- Definição da função impulso unitário (δ):

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1, & t = 0 \end{cases}$$



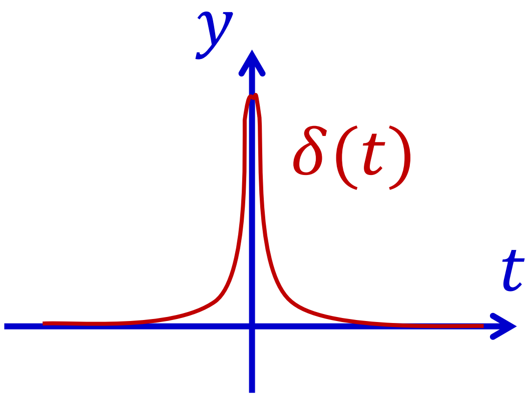
- Essa função também é conhecida como delta de Dirac.
- Com o impulso em um ponto t_o a função fica:

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)dt = 1, & t = t_0 \end{cases}$$

Função impulso unitário (δ)

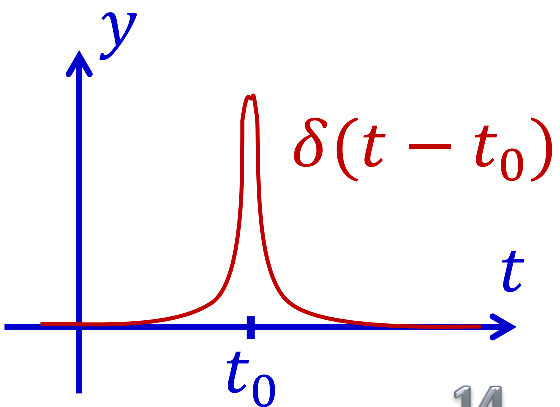
- Definição da função impulso unitário (δ):

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1, & t = 0 \end{cases}$$



- Essa função também é conhecida como delta de Dirac.
- Com o impulso em um ponto t_o a função fica:

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)dt = 1, & t = t_0 \end{cases}$$



Transformada da função delta

Transformada de Laplace da função δ

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-t_0 s} \qquad t_0 > 0$$

Transformada de Laplace da função δ

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-t_0 s} \qquad t_0 > 0$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{t_0 \to 0} e^{-t_0 s} = 1$$

Transformada de Laplace da função δ

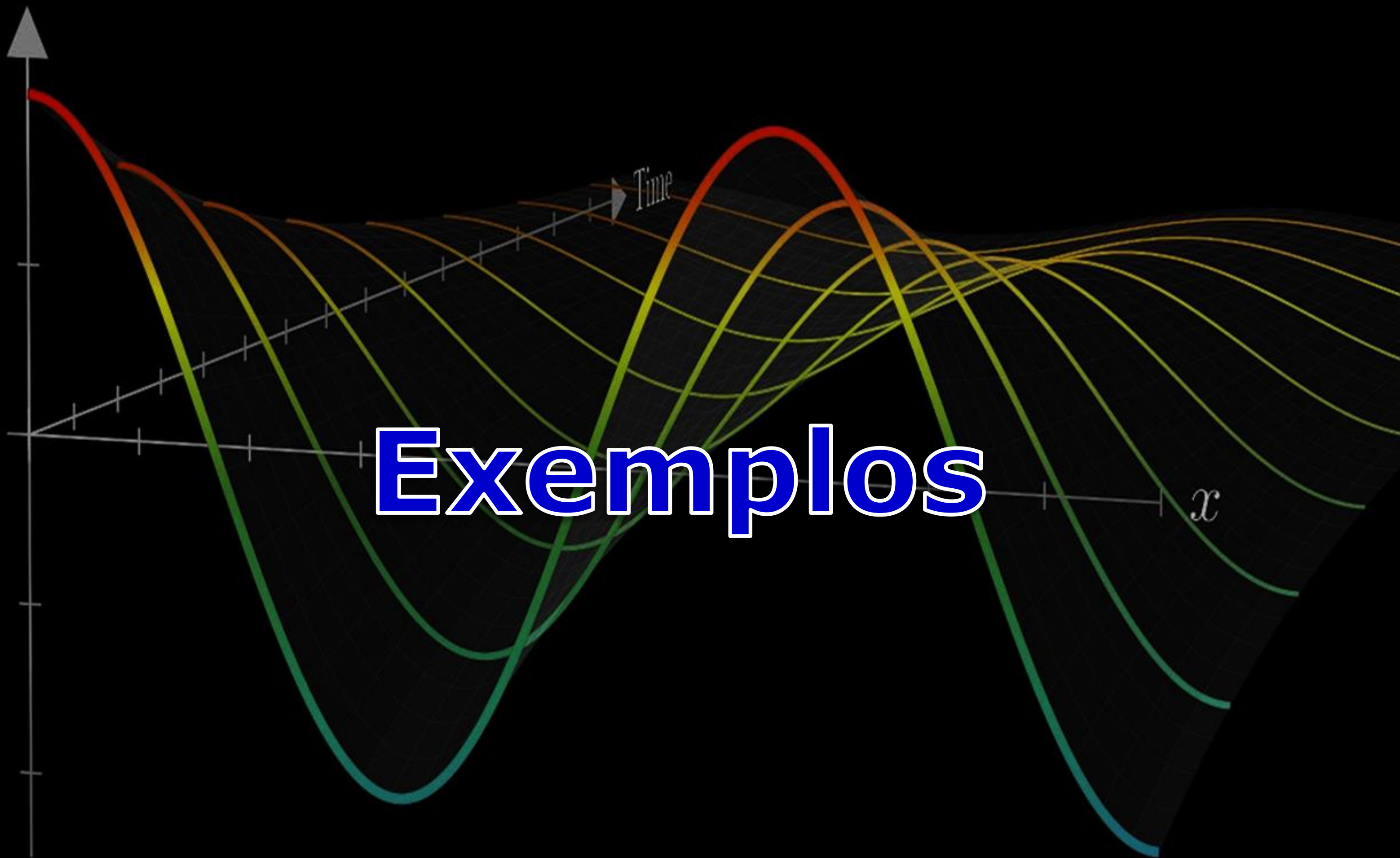
$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-t_0 s} \qquad t_0 > 0$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{t_0 \to 0} e^{-t_0 s} = 1$$

Transformada de Laplace inversa (u_c)

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-t_0 s} F(s)\} = u_{t_0}(t) f(t-t_0)$$

Exemplos



Função impulso unitário (δ)

Exemplo 1: Encontrar a transformada da função impulso unitário (δ).

(a) $\mathcal{L}\{\delta(t-\pi)\} =$

Função impulso unitário (δ)

Exemplo 1: Encontrar a transformada da função impulso unitário (δ).

(a) $\mathcal{L}\{\delta(t-\pi)\} = e^{-\pi s}$

Função impulso unitário (δ)

Exemplo 1: Encontrar a transformada da função impulso unitário (δ).

(a) $\mathcal{L}\{\delta(t-\pi)\} = e^{-\pi s}$

(b) $\mathcal{L}\{\delta(t-\pi) - \delta(t-2\pi)\} =$

Função impulso unitário (δ)

Exemplo 1: Encontrar a transformada da função impulso unitário (δ).

(a) $\mathcal{L}\{\delta(t-\pi)\} = e^{-\pi s}$

(b) $\mathcal{L}\{\delta(t-\pi) - \delta(t-2\pi)\} = e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}$

Função impulso unitário (δ)

Exemplo 1: Encontrar a transformada da função impulso unitário (δ).

(a) $\mathcal{L}\{\delta(t-\pi)\} = e^{-\pi s}$

(b) $\mathcal{L}\{\delta(t-\pi) - \delta(t-2\pi)\} = e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}$

(c) $\mathcal{L}\{2\delta(t-5)\} =$

Função impulso unitário (δ)

Exemplo 1: Encontrar a transformada da função impulso unitário (δ).

(a) $\mathcal{L}\{\delta(t-\pi)\} = e^{-\pi s}$

(b) $\mathcal{L}\{\delta(t-\pi) - \delta(t-2\pi)\} = e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}$

(c) $\mathcal{L}\{2\delta(t-5)\} = 2e^{-5s}$

Função impulso unitário (δ)

Exemplo 1: Encontrar a transformada da função impulso unitário (δ).

(a) $\mathcal{L}\{\delta(t-\pi)\} = e^{-\pi s}$

(b) $\mathcal{L}\{\delta(t-\pi) - \delta(t-2\pi)\} = e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}$

(c) $\mathcal{L}\{2\delta(t-5)\} = 2e^{-5s}$

(d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}.\frac{1}{s^2+1}\right\}$

Função impulso unitário (δ)

Exemplo 1: Encontrar a transformada da função impulso unitário (δ).

(a) $\mathcal{L}\{\delta(t-\pi)\} = e^{-\pi s}$

(b) $\mathcal{L}\{\delta(t-\pi) - \delta(t-2\pi)\} = e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}$

(c) $\mathcal{L}\{2\delta(t-5)\} = 2e^{-5s}$

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
$senat$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$

(d) $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s}.\frac{1}{s^2+1}\}$

Função impulso unitário (δ)

Exemplo 1: Encontrar a transformada da função impulso unitário (δ).

(a) $\mathcal{L}\{\delta(t-\pi)\} = e^{-\pi s}$

(b) $\mathcal{L}\{\delta(t-\pi) - \delta(t-2\pi)\} = e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}$

(c) $\mathcal{L}\{2\delta(t-5)\} = 2e^{-5s}$

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
$sen at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$

(d) $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s}.\frac{1}{s^2+1}\} = u_1(t)sen(t-1)$

Exemplo 2: Resolver o PVI por Transformada de Laplace.

$$y'' + y = \delta(t-1) \qquad y(0) = 0 \;\; | \;\; y'(0) = 0$$

Exemplo 2: Resolver o PVI por Transformada de Laplace.

$$y'' + y = \delta(t-1) \qquad y(0) = 0 \ \ | \ \ y'(0) = 0$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-1)\}$$

Exemplo 2: Resolver o PVI por Transformada de Laplace.

$$y'' + y = \delta(t-1) \qquad y(0) = 0 \ \mid \ y'(0) = 0$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-1)\}$$

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)]$$

Exemplo 2: Resolver o PVI por Transformada de Laplace.

$$y'' + y = \delta(t-1) \qquad y(0) = 0 \ \mid \ y'(0) = 0$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-1)\}$$

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + Y(s) =$$

Exemplo 2: Resolver o PVI por Transformada de Laplace.

$$y'' + y = \delta(t-1) \qquad y(0) = 0 \;\; | \;\; y'(0) = 0$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-1)\}$$

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + Y(s) = e^{-s}$$

Exemplo 2: Resolver o PVI por Transformada de Laplace.

$$y'' + y = \delta(t-1) \qquad y(0) = 0 \ \ | \ \ y'(0) = 0$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-1)\}$$

$$[s^2Y(s) - s\cancel{y(0)}^{=0} - \cancel{y'(0)}^{=0}] + Y(s) = e^{-s}$$

Exemplo 2: Resolver o PVI por Transformada de Laplace.

$$y'' + y = \delta(t-1) \qquad y(0) = 0 \;\; | \;\; y'(0) = 0$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-1)\}$$

$$[s^2Y(s) - s\cancel{y}^{=0}(0) - \cancel{y'}^{=0}(0)] + Y(s) = e^{-s}$$

$$(s^2+1)Y(s) = e^{-s}$$

Exemplo 2: Resolver o PVI por Transformada de Laplace.

$$y'' + y = \delta(t-1) \qquad y(0) = 0 \ \mid \ y'(0) = 0$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-1)\}$$

$$[s^2Y(s) - s\cancel{y(0)}^{=0} - \cancel{y'(0)}^{=0}] + Y(s) = e^{-s}$$

$$(s^2+1)Y(s) = e^{-s} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{e^{-s}}{(s^2+1)}$$

Exemplo 2: Resolver o PVI por Transformada de Laplace.

$$y'' + y = \delta(t-1) \qquad y(0) = 0 \;\;|\;\; y'(0) = 0$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-1)\}$$

$$[s^2Y(s) - s\overbrace{\cancel{y(0)}}^{=0} - \overbrace{\cancel{y'(0)}}^{=0}] + Y(s) = e^{-s}$$

$$(s^2+1)Y(s) = e^{-s} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{e^{-s}}{(s^2+1)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} =$$

Exemplo 2: Resolver o PVI por Transformada de Laplace.

$$y'' + y = \delta(t-1) \qquad y(0) = 0 \ \mid \ y'(0) = 0$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-1)\}$$

$$[s^2Y(s) - s\underbrace{\cancel{y(0)}}_{=0} - \underbrace{\cancel{y'(0)}}_{=0}] + Y(s) = e^{-s}$$

$$(s^2+1)Y(s) = e^{-s} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{e^{-s}}{(s^2+1)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-s}}{(s^2+1)}\}$$

Exemplo 2: Resolver o PVI por Transformada de Laplace.

$$y'' + y = \delta(t-1) \qquad y(0) = 0 \ \ | \ \ y'(0) = 0$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-1)\}$$

$$[s^2Y(s) - s\cancel{y(0)}^{=0} - \cancel{y'(0)}^{=0}] + Y(s) = e^{-s}$$

$$(s^2+1)Y(s) = e^{-s} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{e^{-s}}{(s^2+1)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-s}}{(s^2+1)}\}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}.\frac{1}{(s^2+1)}\right\} =$$

Exemplo 2: Resolver o PVI por Transformada de Laplace.

$$y'' + y = \delta(t-1) \qquad y(0) = 0 \;\; | \;\; y'(0) = 0$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-1)\}$$

$$[s^2Y(s) - s\underbrace{\cancel{y(0)}}_{=0} - \underbrace{\cancel{y'(0)}}_{=0}] + Y(s) = e^{-s}$$

$$(s^2+1)Y(s) = e^{-s} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{e^{-s}}{(s^2+1)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-s}}{(s^2+1)}\}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}.\frac{1}{(s^2+1)}\right\} = u_1(t)sen(t-1)$$

Exemplo 2: Resolver o PVI por Transformada de Laplace.

$$y'' + y = \delta(t-1) \qquad y(0) = 0 \;\mid\; y'(0) = 0$$

$$y(t) = u_1(t)sen(t-1)$$

Exemplo 2: Resolver o PVI por Transformada de Laplace.

$$y'' + y = \delta(t-1) \qquad y(0) = 0 \ \mid \ y'(0) = 0$$

$$y(t) = u_1(t)sen(t-1) \qquad mas\text{:} \quad u_1(t) = \begin{cases} 0, t < 1 \\ 1, t \geq 1 \end{cases}$$

Exemplo 2: Resolver o PVI por Transformada de Laplace.

$$y'' + y = \delta(t-1) \qquad y(0) = 0 \ \mid \ y'(0) = 0$$

$$y(t) = u_1(t)sen(t-1) \qquad mas: \ u_1(t) = \begin{cases} 0, t < 1 \\ 1, t \geq 1 \end{cases}$$

$Então,$

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ sen(t-1), & t \geq 1 \end{cases}$$

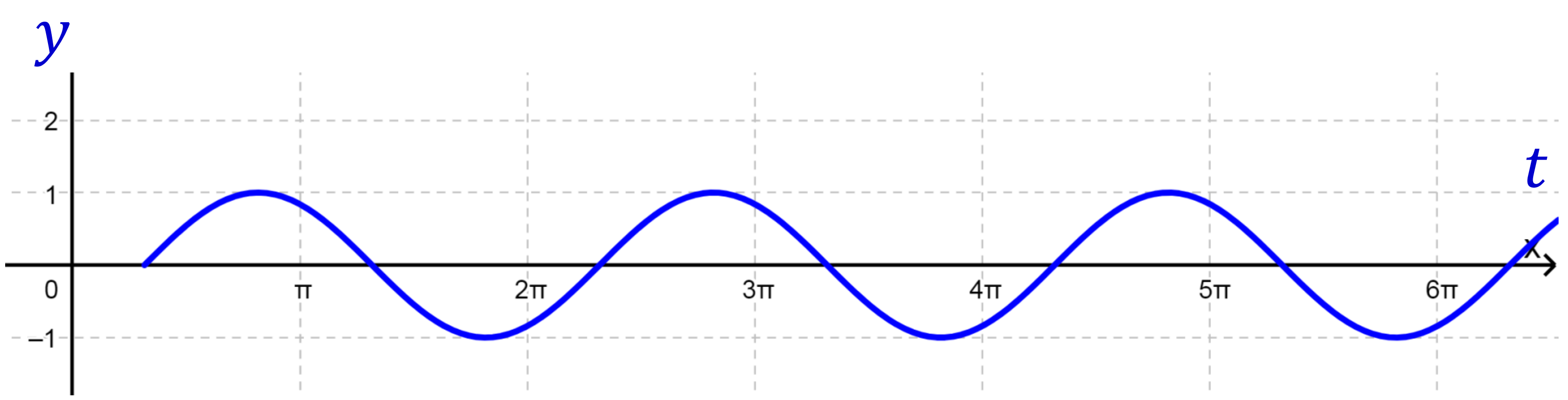
Exemplo 2: Resolver o PVI por Transformada de Laplace.

$$y'' + y = \delta(t-1) \qquad y(0) = 0 \;\; | \;\; y'(0) = 0$$

$$y(t) = u_1(t) sen(t-1) \qquad mas: \; u_1(t) = \begin{cases} 0, t < 1 \\ 1, t \geq 1 \end{cases}$$

Então,

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ sen(t-1), & t \geq 1 \end{cases}$$



Exercícios

Exercícios: Resolver o PVI por Transformada de Laplace e esboçar o gráfico.

(a) $y'' + 4y = \delta(t - \pi)$ $\quad y(0) = 0 \mid y'(0) = 0$

(b) $y'' - y = -2\delta(t - 3)$ $\quad y(0) = 0 \mid y'(0) = 0{,}5$

(c) $y'' + 4y = \delta(t - 4\pi)$ $\quad y(0) = 0{,}5 \mid y'(0) = 0$

Entregar no final da aula um folha por dupla.

Para depois desta aula:

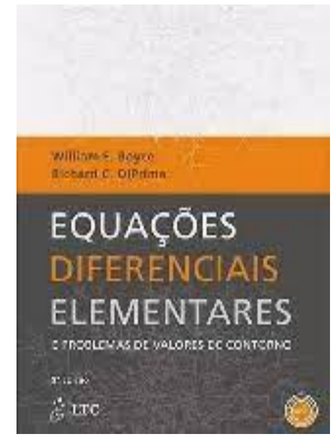
- Estudar seção 6.5 do livro texto (Boyce).
- Resolver os exemplos da aula.
- Praticar: exercícios da seção 6.5 do Boyce.

Próxima aula:

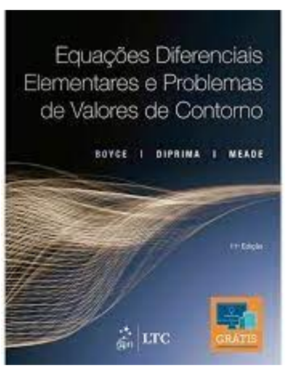
- Integral da Convolução.

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.



Numeração dos exercícios com base na 9ª ed.



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2020.