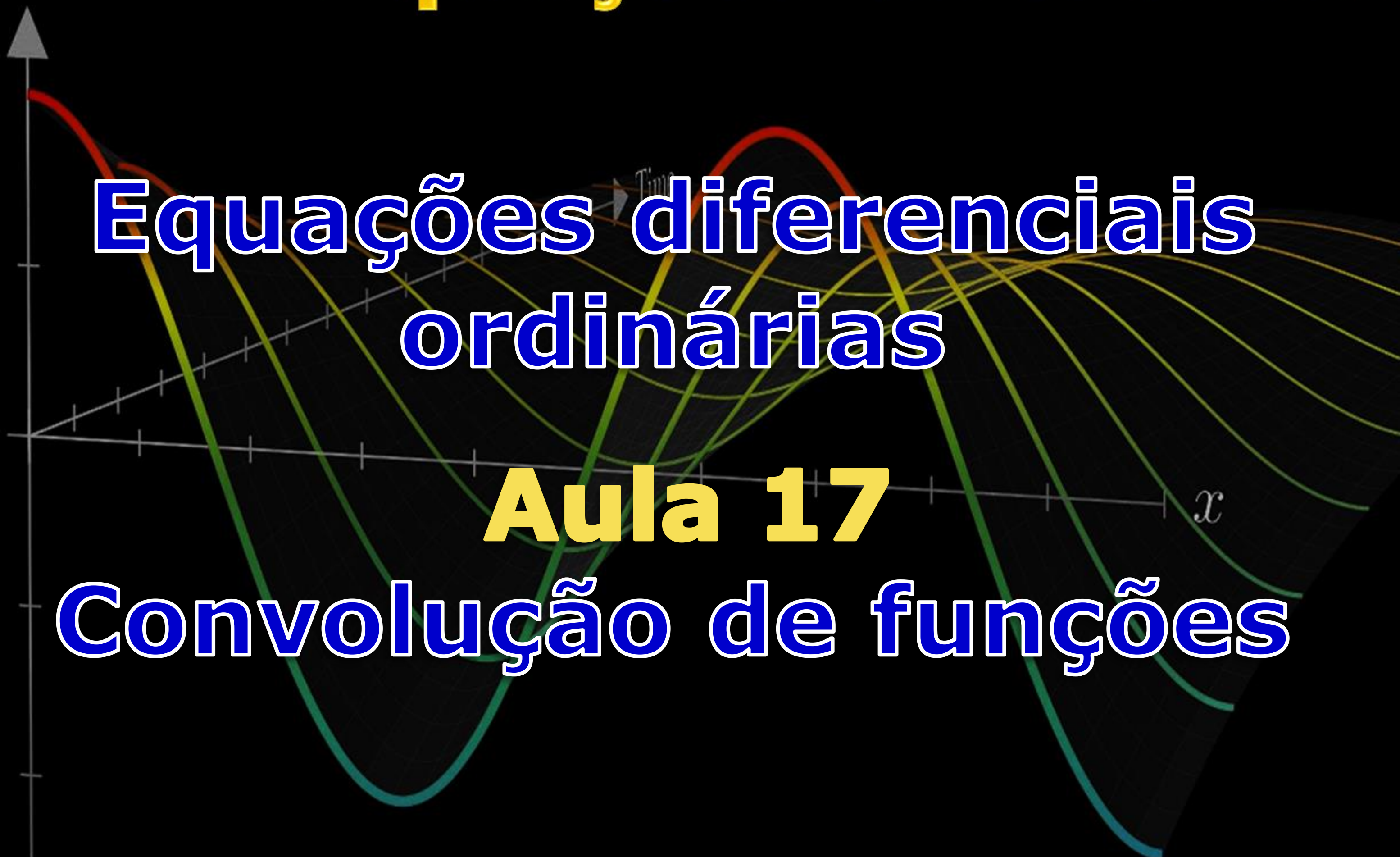
Equações diferenciais



Equações diferenciais ordinárias

Aula 17

Convolução de funções

Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

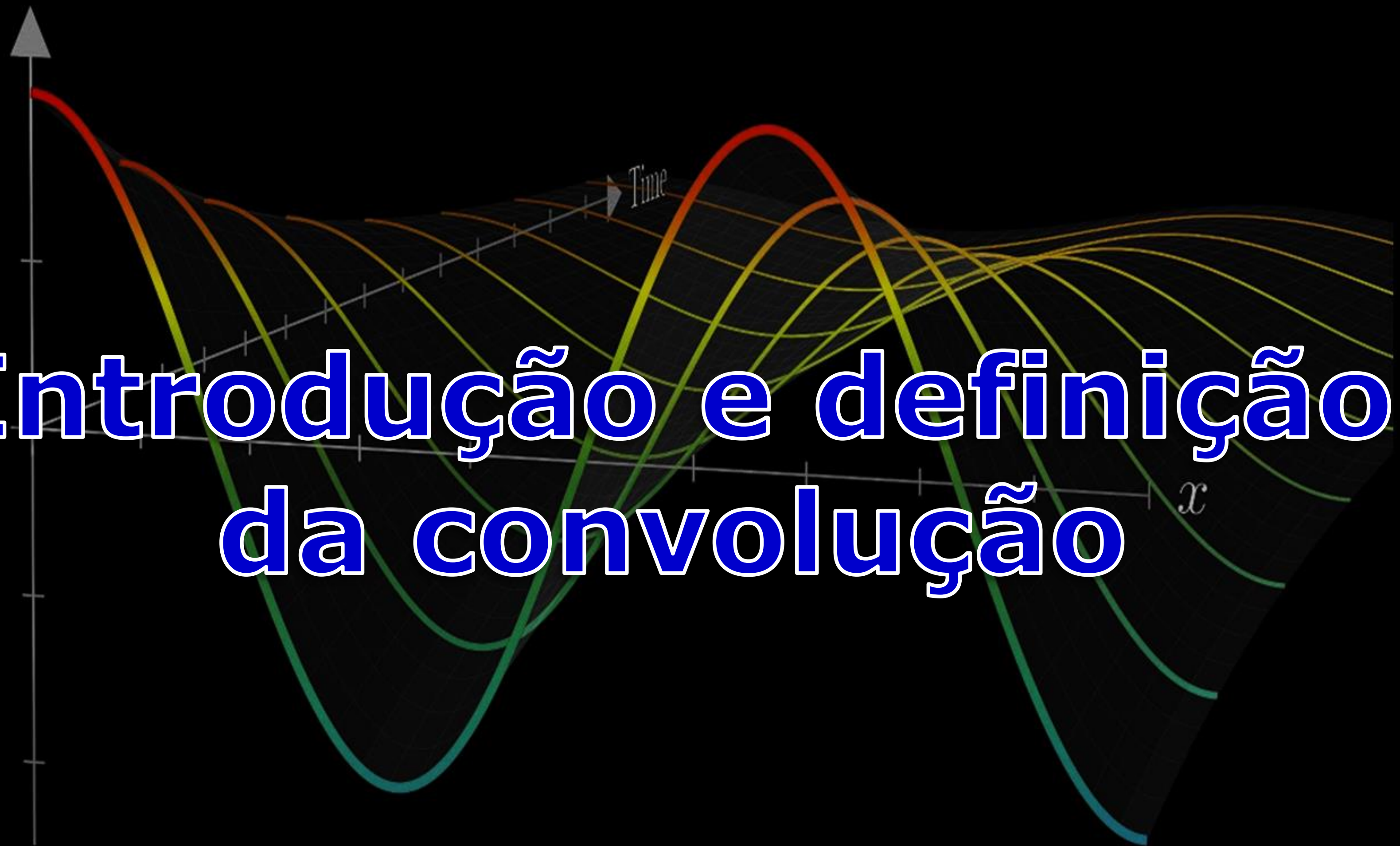
Tópicos desta aula

1. Introdução e definição da convolução.
2. Exemplos.
3. Transformada de Laplace e convolução.
4. Exemplos e exercícios.

Pré-requisitos

- Integração e transformada de Laplace.

Introdução e definição da convolução



Introdução

- Na maioria dos casos a transformada de Laplace não comuta com a multiplicação usual.

Introdução

- Na maioria dos casos a transformada de Laplace não comuta com a multiplicação usual.
- Por outro lado, se for definida outro tipo de produto de funções essa multiplicação pode ser possível.
- Esse outro tipo de produto de funções é chamado produto generalizado ou convolução de funções.

Introdução

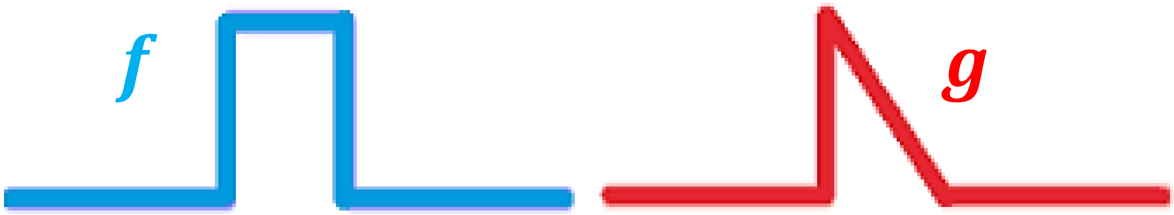
- Na maioria dos casos a transformada de Laplace não comuta com a multiplicação usual.
- Por outro lado, se for definida outro tipo de produto de funções essa multiplicação pode ser possível.
- Esse outro tipo de produto de funções é chamado produto generalizado ou convolução de funções.
- Aplicações: sistemas em que o comportamento presente depende do histórico passado.

Introdução

- Na maioria dos casos a transformada de Laplace não comuta com a multiplicação usual.
- Por outro lado, se for definida outro tipo de produto de funções essa multiplicação pode ser possível.
- Esse outro tipo de produto de funções é chamado produto generalizado ou convolução de funções.
- Aplicações: sistemas em que o comportamento presente depende do histórico passado.
- Exemplos: processamento de sinais, tratamento de imagens, dinâmica populacional, entre outros.

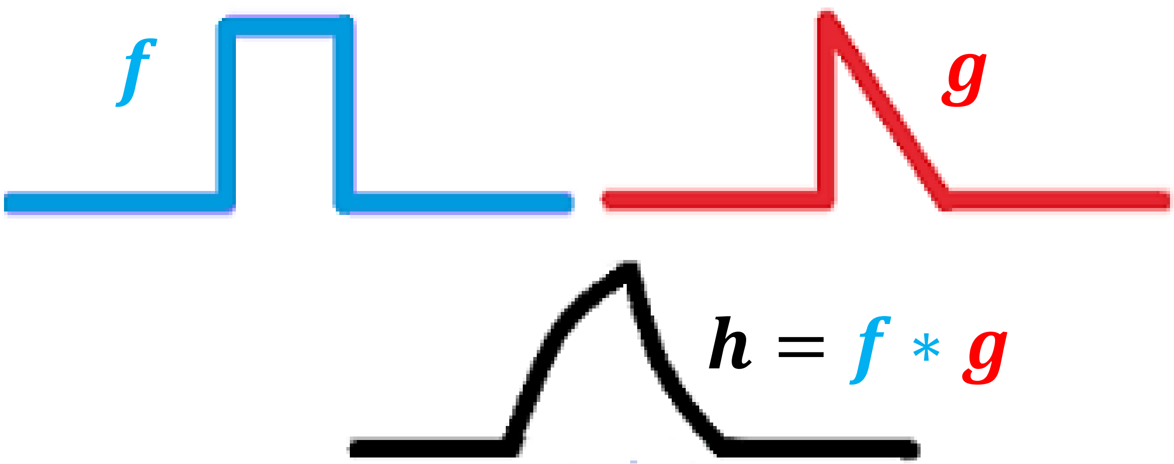
Introdução

- Visualização gráfica da convolução ($\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} * \boldsymbol{g}$)



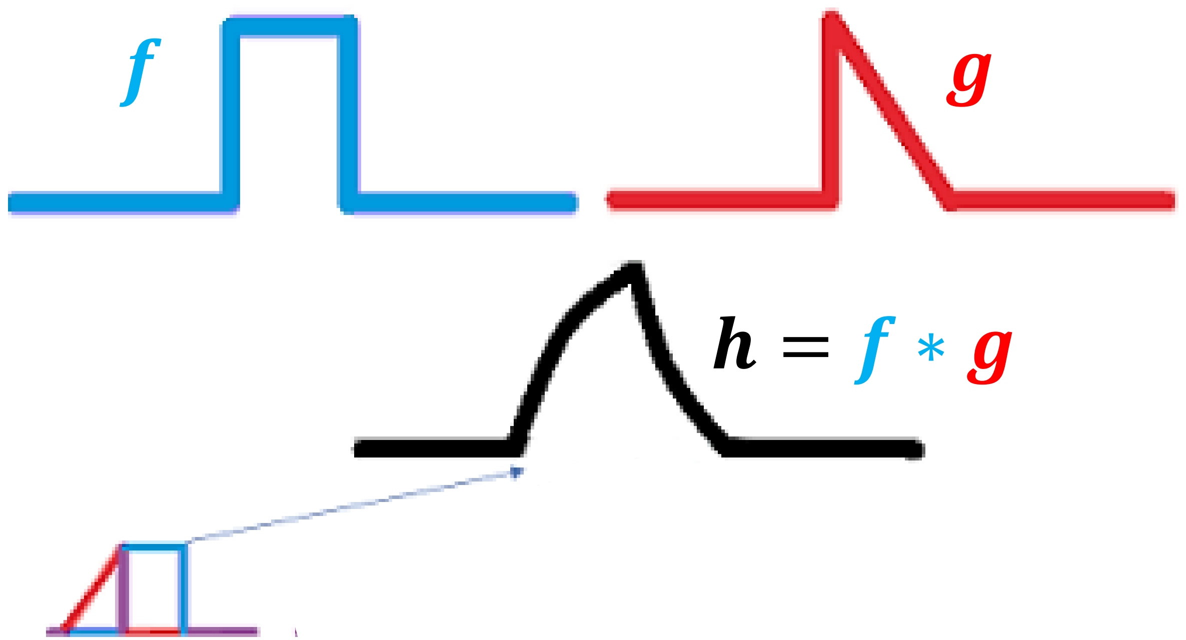
Introdução

- Visualização gráfica da convolução ($h = f * g$)



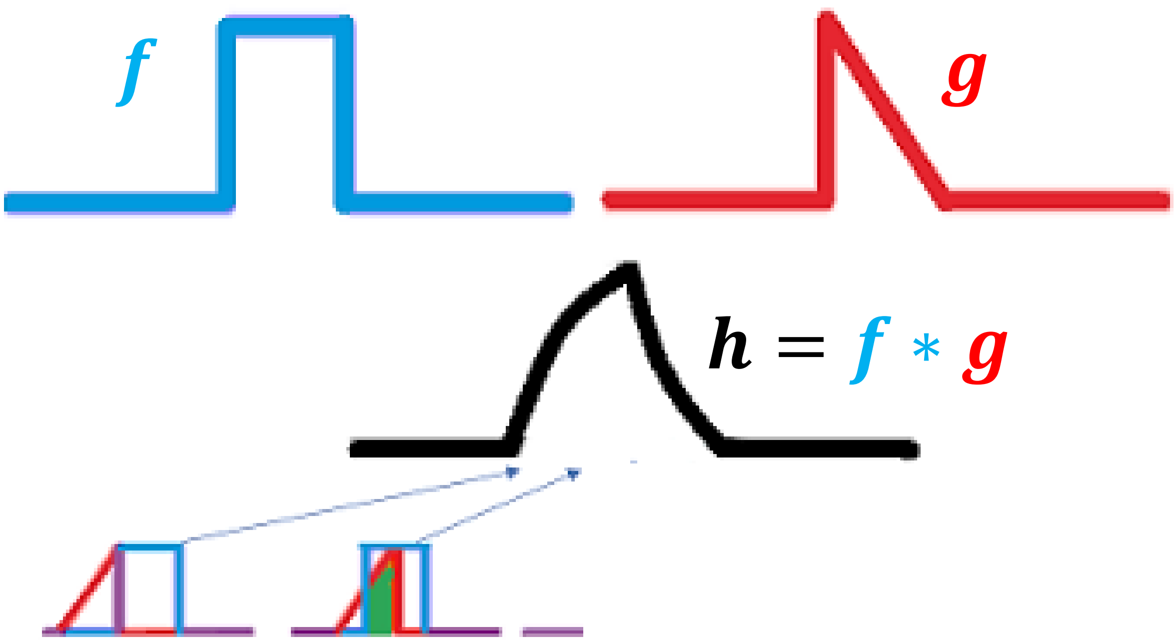
Introdução

- Visualização gráfica da convolução ($h = f * g$)



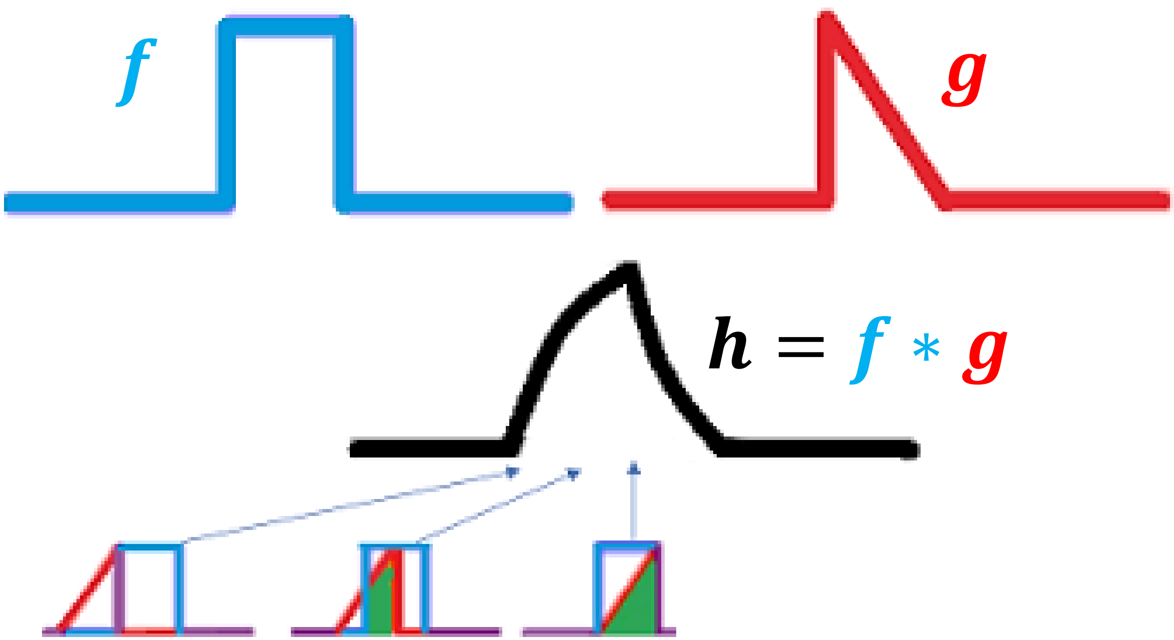
Introdução

- Visualização gráfica da convolução ($\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} * \boldsymbol{g}$)



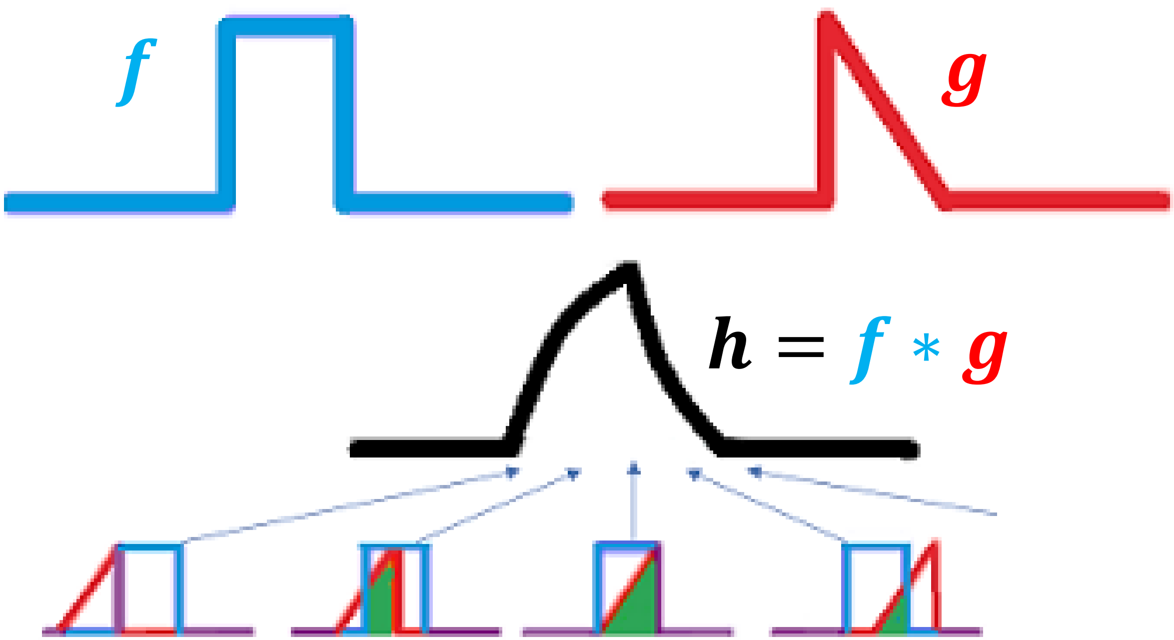
Introdução

- Visualização gráfica da convolução ($\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} * \boldsymbol{g}$)



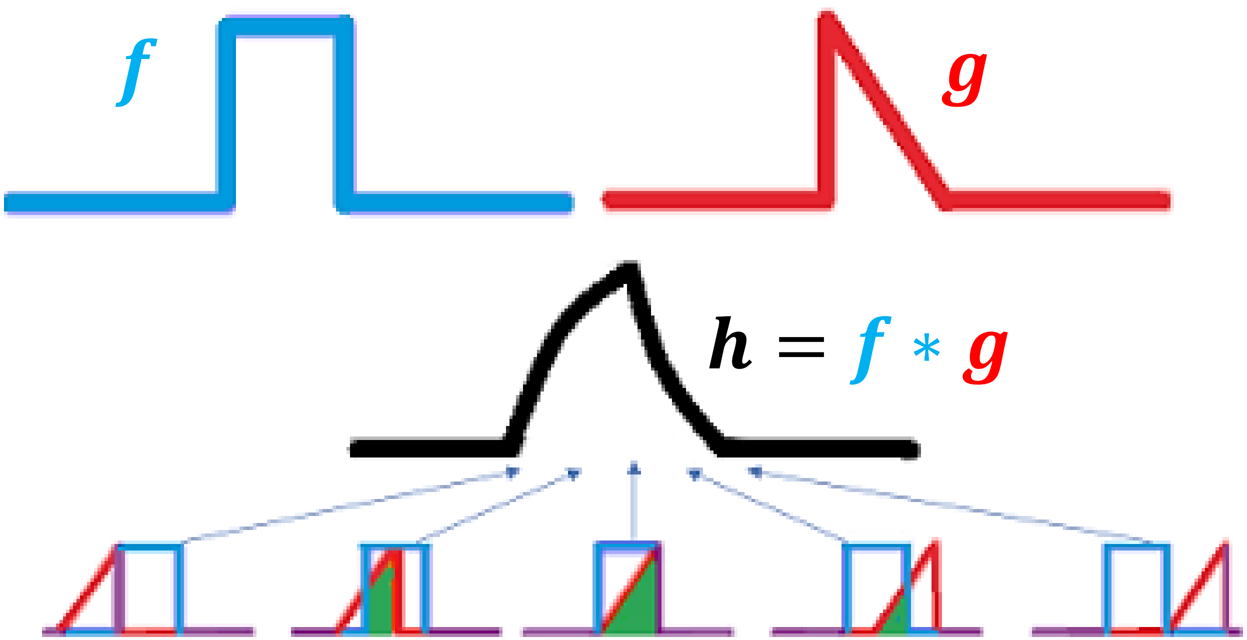
Introdução

- Visualização gráfica da convolução ($\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} * \boldsymbol{g}$)



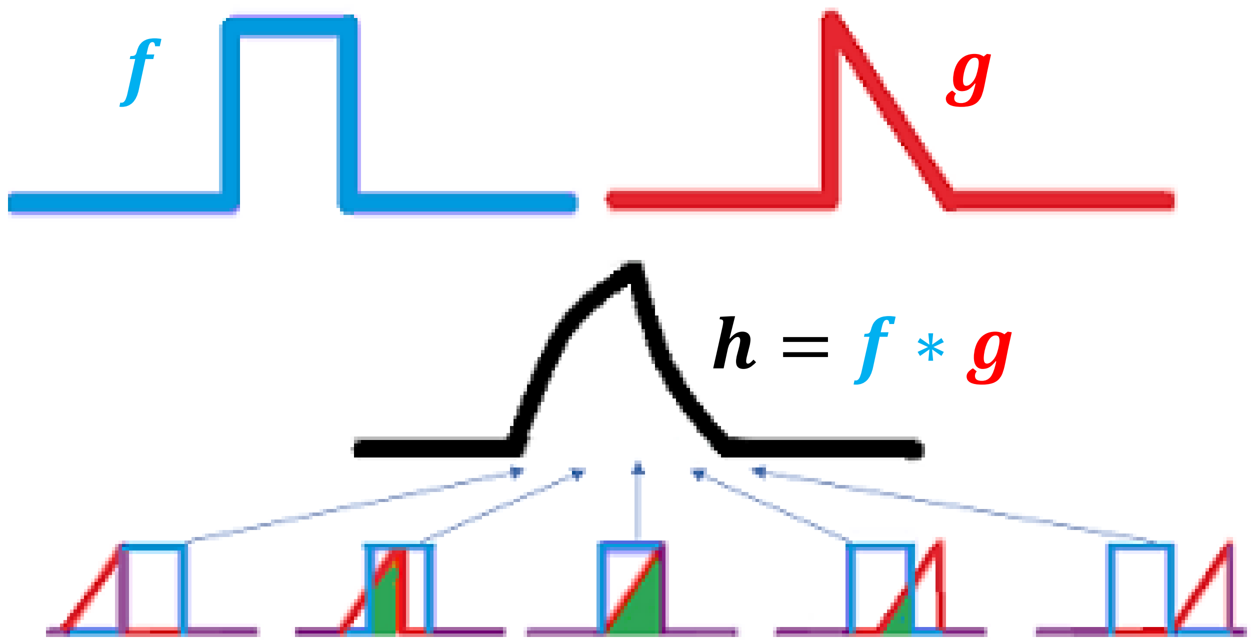
Introdução

- Visualização gráfica da convolução ($\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} * \boldsymbol{g}$)



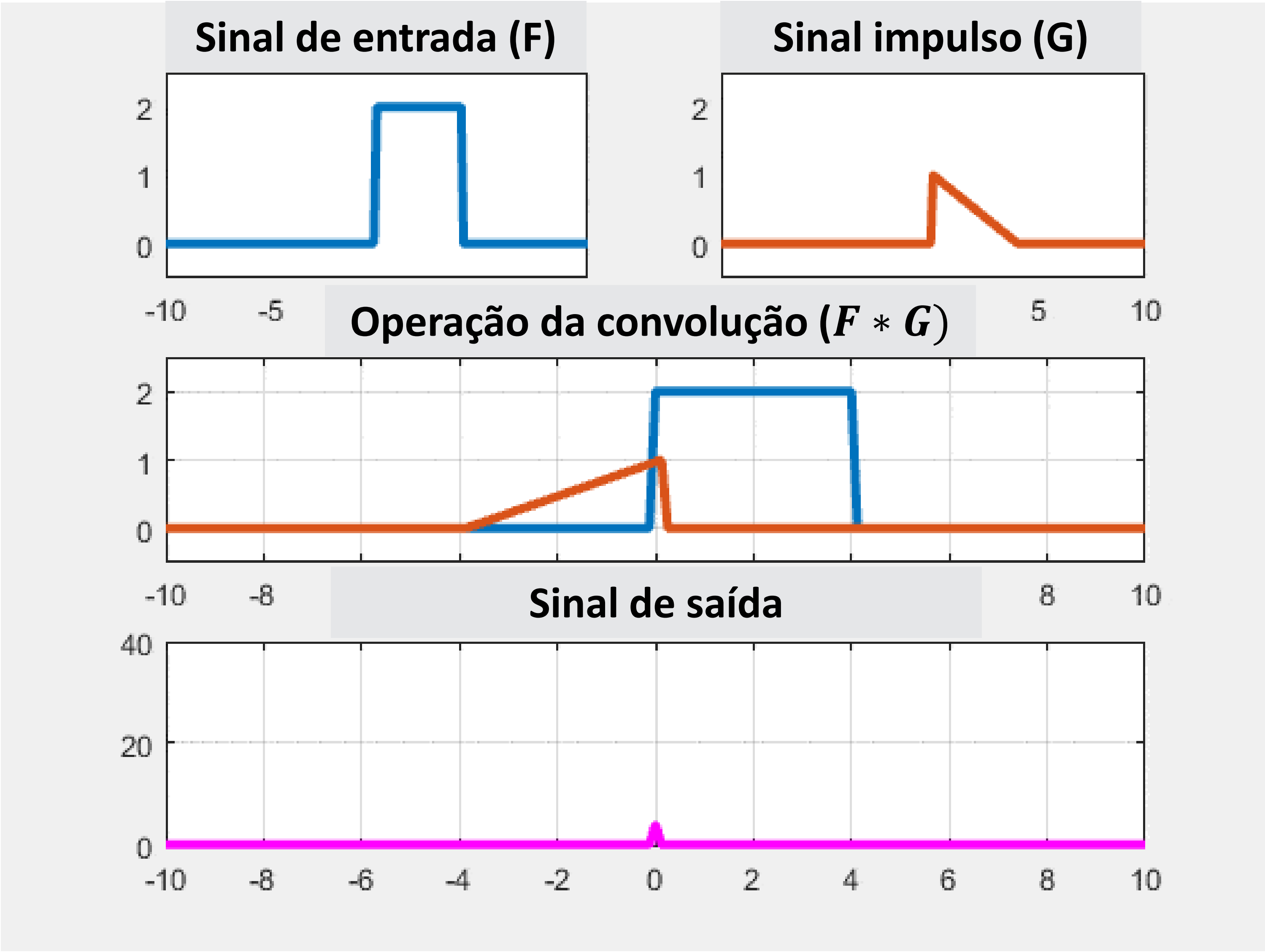
Introdução

- Visualização gráfica da convolução ($h = f * g$)



Definição: convolução é uma operação de somatório do produto entre duas funções, na região em que elas se sobrepõem.

Introdução



Sinal de entrada (F)
Sinal impulso (G)
Operação da convolução ($F * G$)
Sinal de saída

Definição da convolução

$$h(t) = f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Ou

τ: variável muda.

Definição da convolução

$$h(t) = f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Ou

$$h(t) = g * f = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

τ: variável muda.

Definição da convolução

$$h(t) = f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Ou

$$h(t) = g * f = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

Propriedades

τ: variável muda.

$f * g = g * f$ (comutatividade)

Definição da convolução

$$h(t) = f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Ou

$$h(t) = g * f = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

Propriedades

τ: variável muda.

$f * g = g * f$ (comutatividade)

$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$ (distributividade)

Definição da convolução

$$h(t) = f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Ou

$$h(t) = g * f = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

Propriedades

τ: variável muda.

$f * g = g * f$ (comutatividade)

$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$ (distributividade)

$(f * g) * h = f * (g * h)$ (associatividade)

Exemplo 1: Calcular a convolução $h(t)$ das funções.

$f(t) = t$ e $g(t) = 1$

Exemplo 1: Calcular a convolução $h(t)$ das funções.

$$f(t) = t \quad \text{e} \quad g(t) = 1$$

$$h = f * g =$$

Exemplo 1: Calcular a convolução $h(t)$ das funções.

$f(t) = t$ e $g(t) = 1$

$$h = f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau =$$

Exemplo 1: Calcular a convolução $h(t)$ das funções.

$f(t) = t$ e $g(t) = 1$

$$h = f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t \tau.1d\tau =$$

Exemplo 1: Calcular a convolução $h(t)$ das funções.

$f(t) = t$ e $g(t) = 1$

$$h = f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t \tau.1d\tau = \boldsymbol{\frac{t^2}{2}}$$

Exemplo 1: Calcular a convolução $h(t)$ das funções.

$f(t) = t$ e $g(t) = 1$

$$h = f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t \tau.1d\tau = \frac{\boldsymbol{t^2}}{\mathbf{2}}$$

$$h = g * f =$$

Exemplo 1: Calcular a convolução $h(t)$ das funções.

$f(t) = t$ e $g(t) = 1$

$$h = f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t \tau.1d\tau = \frac{\boldsymbol{t^2}}{\boldsymbol{2}}$$

$$h = g * f = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau =$$

Exemplo 1: Calcular a convolução $h(t)$ das funções.

$f(t) = t$ e $g(t) = 1$

$$h = f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t \tau.1d\tau = \boldsymbol{\frac{t^2}{2}}$$

$$h = g * f = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau = \int_0^t 1.(t-\tau)d\tau$$

Exemplo 1: Calcular a convolução $h(t)$ das funções.

$f(t) = t$ e $g(t) = 1$

$$h = f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t \tau.1d\tau = \boldsymbol{\frac{t^2}{2}}$$

$$h = g * f = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau = \int_0^t 1.(t-\tau)d\tau$$

$$h = 1 * t =$$

Exemplo 1: Calcular a convolução $h(t)$ das funções.

$f(t) = t$ e $g(t) = 1$

$$h = f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t \tau.1d\tau = \boldsymbol{\frac{t^2}{2}}$$

$$h = g * f = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau = \int_0^t 1.(t-\tau)d\tau$$

$$h = 1 * t = \left[t.\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_0^t =$$

Exemplo 1: Calcular a convolução $h(t)$ das funções.

$$f(t) = t \quad \text{e} \quad g(t) = 1$$

$$h = f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t \tau.1d\tau = \boldsymbol{\frac{t^2}{2}}$$

$$h = g * f = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau = \int_0^t 1.(t-\tau)d\tau$$

$$h = 1 * t = \left[t.\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_0^t = t^2 - \frac{t^2}{2} =$$

Exemplo 1: Calcular a convolução $h(t)$ das funções.

$f(t) = t$ e $g(t) = 1$

$$h = f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t \tau.1d\tau = \boldsymbol{\frac{t^2}{2}}$$

$$h = g * f = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau = \int_0^t 1.(t-\tau)d\tau$$

$$h = 1 * t = \left[t.\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_0^t = t^2 - \frac{t^2}{2} = \boldsymbol{\frac{t^2}{2}}$$ (comutatividade)

Exemplo 2: Calcular a convolução $h(t)$ das funções.

$f(t) = t$ e $g(t) = t^2$

Exemplo 2: Calcular a convolução $h(t)$ das funções.

$f(t) = t$ e $g(t) = t^2$

$$h = f * g = \int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda =$$

Exemplo 2: Calcular a convolução $h(t)$ das funções.

$f(t) = t$ e $g(t) = t^2$

$$h = f * g = \int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda = \int_0^t \lambda.(t-\lambda)^2 d\lambda$$

Exemplo 2: Calcular a convolução $h(t)$ das funções.

$f(t) = t$ e $g(t) = t^2$

$$h = f * g = \int_0^t f(\lambda) g(t-\lambda) d\lambda = \int_0^t \lambda.(t-\lambda)^2 d\lambda$$

$$= \int_0^t \lambda.(t^2 - 2t\lambda + \lambda^2) d\lambda =$$

Exemplo 2: Calcular a convolução $h(t)$ das funções.

$f(t) = t$ e $g(t) = t^2$

$$h = f * g = \int_0^t f(\lambda) g(t-\lambda) d\lambda = \int_0^t \lambda.(t-\lambda)^2 d\lambda$$

$$= \int_0^t \lambda.(t^2 - 2t\lambda + \lambda^2) d\lambda = \int_0^t (\lambda t^2 - 2t\lambda^2 + \lambda^3) d\lambda$$

Exemplo 2: Calcular a convolução $h(t)$ das funções.

$f(t) = t$ e $g(t) = t^2$

$$h = f * g = \int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda = \int_0^t \lambda.(t-\lambda)^2 d\lambda$$

$$= \int_0^t \lambda.(t^2 - 2t\lambda + \lambda^2)d\lambda = \int_0^t (\lambda t^2 - 2t\lambda^2 + \lambda^3)d\lambda$$

$$= \left[t^2\frac{\lambda^2}{2} - 2t\frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^4}{4}\right]_0^t =$$

Exemplo 2: Calcular a convolução $h(t)$ das funções.

$f(t) = t$ e $g(t) = t^2$

$$h = f * g = \int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda = \int_0^t \lambda.(t-\lambda)^2 d\lambda$$

$$= \int_0^t \lambda.(t^2 - 2t\lambda + \lambda^2)d\lambda = \int_0^t (\lambda t^2 - 2t\lambda^2 + \lambda^3)d\lambda$$

$$= \left[t^2\frac{\lambda^2}{2} - 2t\frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^4}{4}\right]_0^t = \frac{t^4}{2} - 2\frac{t^4}{3} + \frac{t^4}{4}$$

Exemplo 2: Calcular a convolução $h(t)$ das funções.

$f(t) = t$ e $g(t) = t^2$

$$h = f * g = \int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda = \int_0^t \lambda.(t-\lambda)^2 d\lambda$$

$$= \int_0^t \lambda.(t^2 - 2t\lambda + \lambda^2)d\lambda = \int_0^t (\lambda t^2 - 2t\lambda^2 + \lambda^3)d\lambda$$

$$= \left[t^2\frac{\lambda^2}{2} - 2t\frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^4}{4}\right]_0^t = \frac{t^4}{2} - 2\frac{t^4}{3} + \frac{t^4}{4}$$

$$= t^4\left(\frac{6-8+3}{12}\right)$$

Exemplo 2: Calcular a convolução $h(t)$ das funções.

$f(t) = t$ e $g(t) = t^2$

$$h = f * g = \int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda = \int_0^t \lambda.(t-\lambda)^2 d\lambda$$

$$= \int_0^t \lambda.(t^2 - 2t\lambda + \lambda^2)d\lambda = \int_0^t (\lambda t^2 - 2t\lambda^2 + \lambda^3)d\lambda$$

$$= \left[t^2\frac{\lambda^2}{2} - 2t\frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^4}{4}\right]_0^t = \frac{t^4}{2} - 2\frac{t^4}{3} + \frac{t^4}{4}$$

$$= t^4\left(\frac{6-8+3}{12}\right)$$

$$h = f * g = t * t^2 = \frac{t^4}{12}$$

Transformada e convolução

Teorema 6.6.1

Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ existem para $s > a \geq 0$.

Teorema 6.6.1

Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ existem para $s > a \geq 0$.

Então, $H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$

Teorema 6.6.1

Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ existem para $s > a \geq 0$.

Então, $\boxed{H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}}$

onde,

$$\boxed{h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau}$$

Teorema 6.6.1

Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ existem para $s > a \geq 0$.

Então, $\boxed{H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}}$

onde,

$$\boxed{h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau}$$

Função $\boldsymbol{h = f * g}$: conhecida como convolução de f e g.

As integrais são chamadas de integrais de convolução.

Exemplo 3: Encontrar a transformada de Laplace de $h(t)$.

$$h(t) = \int_0^t (t - \tau)e^t d\tau$$

Exemplo 3: Encontrar a transformada de Laplace de $h(t)$.

$$h(t) = \int_0^t (t - \tau)e^t d\tau$$

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

Exemplo 3: Encontrar a transformada de Laplace de $h(t)$.

$$h(t) = \int_0^t (t - \tau)e^t d\tau$$

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t (t - \tau)e^\tau d\tau$$

Exemplo 3: Encontrar a transformada de Laplace de $h(t)$.

$$h(t) = \int_0^t (t-\tau)e^t d\tau$$

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t (t-\tau)e^\tau d\tau \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(t) = e^t \\ g(t) = t \end{cases}$$

Exemplo 3: Encontrar a transformada de Laplace de $h(t)$.

$$h(t) = \int_0^t (t-\tau)e^t d\tau$$

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t (t-\tau)e^\tau d\tau \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(t) = e^t \\ g(t) = t \end{cases}$$

$$F(s) = \mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\{e^t\} =$$

Exemplo 3: Encontrar a transformada de Laplace de $h(t)$.

$$h(t) = \int_0^t (t-\tau)e^t d\tau$$

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t (t-\tau)e^\tau d\tau \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(t) = e^t \\ g(t) = t \end{cases}$$

$$F(s) = \mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$$

Exemplo 3: Encontrar a transformada de Laplace de $h(t)$.

$$h(t) = \int_0^t (t-\tau)e^t d\tau$$

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t (t-\tau)e^\tau d\tau \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(t) = e^t \\ g(t) = t \end{cases}$$

$$F(s) = \mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$$

$$G(s) = \mathcal{L}^{-1}\{g(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\{t\} =$$

Exemplo 3: Encontrar a transformada de Laplace de $h(t)$.

$$h(t) = \int_0^t (t-\tau)e^t d\tau$$

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t (t-\tau)e^\tau d\tau \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(t) = e^t \\ g(t) = t \end{cases}$$

$$F(s) = \mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$$

$$G(s) = \mathcal{L}^{-1}\{g(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

Exemplo 3: Encontrar a transformada de Laplace de $h(t)$.

$$h(t) = \int_0^t (t - \tau)e^t d\tau$$

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t (t - \tau)e^\tau d\tau \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(t) = e^t \\ g(t) = t \end{cases}$$

$$F(s) = \mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$$

$$G(s) = \mathcal{L}^{-1}\{g(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\boldsymbol{H(s) = \frac{1}{s^2(s-1)}}$$

Exemplo 4: Encontrar a transformada inversa, utilizando o teorema da convolução.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)}\cdot\frac{1}{(s+2)}\right]$$

Exemplo 4: Encontrar a transformada inversa, utilizando o teorema da convolução.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)}\cdot\frac{1}{(s+2)}\right] \Rightarrow \quad F(s)=\frac{1}{(s-1)} \quad G(s)=\frac{1}{(s+2)}$$

Exemplo 4: Encontrar a transformada inversa, utilizando o teorema da convolução.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)}\cdot\frac{1}{(s+2)}\right] \Rightarrow \quad F(s)=\frac{1}{(s-1)} \quad G(s)=\frac{1}{(s+2)}$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=e^{t}$$

Exemplo 4: Encontrar a transformada inversa, utilizando o teorema da convolução.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)}\cdot\frac{1}{(s+2)}\right] \Rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{(s-1)} \quad G(s) = \frac{1}{(s+2)}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{t} \quad | \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = e^{-2t}$$

Exemplo 4: Encontrar a transformada inversa, utilizando o teorema da convolução.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)}\cdot\frac{1}{(s+2)}\right] \Rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{(s-1)} \quad G(s) = \frac{1}{(s+2)}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{t} \quad | \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = h(t) = f(\mathrm{t}) * g(\mathrm{t})$$

Exemplo 4: Encontrar a transformada inversa, utilizando o teorema da convolução.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)}\cdot\frac{1}{(s+2)}\right] \Rightarrow \quad F(s)=\frac{1}{(s-1)} \quad G(s)=\frac{1}{(s+2)}$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=e^{t} \quad | \quad g(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}=e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(\mathrm{s})\}=h(t)=f(\mathrm{t})*g(\mathrm{t})$$

$$h(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=$$

Exemplo 4: Encontrar a transformada inversa, utilizando o teorema da convolução.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)}\cdot\frac{1}{(s+2)}\right] \Rightarrow \quad F(s)=\frac{1}{(s-1)} \quad G(s)=\frac{1}{(s+2)}$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=e^{t} \quad | \quad g(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}=e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(\mathrm{s})\}=h(t)=f(\mathrm{t})*g(\mathrm{t})$$

$$h(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^t e^{\tau}.e^{-2(t-\tau)}d\tau$$

Exemplo 4: Encontrar a transformada inversa, utilizando o teorema da convolução.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)}\cdot\frac{1}{(s+2)}\right] \Rightarrow \quad F(s)=\frac{1}{(s-1)} \quad G(s)=\frac{1}{(s+2)}$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=e^{t} \quad | \quad g(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}=e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(\mathrm{s})\}=h(t)=f(\mathrm{t})*g(\mathrm{t})$$

$$h(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^t e^{\tau}.e^{-2(t-\tau)}d\tau$$

$$h(t)=\int_0^t e^{\tau}.e^{-2t}.e^{2\tau}d\tau=$$

Exemplo 4: Encontrar a transformada inversa, utilizando o teorema da convolução.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)}\cdot\frac{1}{(s+2)}\right] \Rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{(s-1)} \quad G(s) = \frac{1}{(s+2)}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{t} \quad | \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(\mathrm{s})\} = h(t) = f(\mathrm{t}) * g(\mathrm{t})$$

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t e^{\tau}.e^{-2(t-\tau)}d\tau$$

$$h(t) = \int_0^t e^{\tau}.e^{-2t}.e^{2\tau}d\tau = e^{-2t}\int_0^t e^{3\tau}d\tau =$$

Exemplo 4: Encontrar a transformada inversa, utilizando o teorema da convolução.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)}\cdot\frac{1}{(s+2)}\right] \Rightarrow \quad F(s)=\frac{1}{(s-1)} \quad G(s)=\frac{1}{(s+2)}$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=e^{t} \quad | \quad g(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}=e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}=h(t)=f(\mathrm{t})*g(\mathrm{t})$$

$$h(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^t e^{\tau}.e^{-2(t-\tau)}d\tau$$

$$h(t)=\int_0^t e^{\tau}.e^{-2t}.e^{2\tau}d\tau=e^{-2t}\int_0^t e^{3\tau}d\tau=e^{-2t}\left[\frac{e^{3\tau}}{3}\right]_0^t=$$

Exemplo 4: Encontrar a transformada inversa, utilizando o teorema da convolução.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)}\cdot\frac{1}{(s+2)}\right] \Rightarrow \quad F(s)=\frac{1}{(s-1)} \quad G(s)=\frac{1}{(s+2)}$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=e^{t} \quad | \quad g(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}=e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}=h(t)=f(\mathrm{t})*g(\mathrm{t})$$

$$h(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^t e^{\tau}.e^{-2(t-\tau)}d\tau$$

$$h(t)=\int_0^t e^{\tau}.e^{-2t}.e^{2\tau}d\tau=e^{-2t}\int_0^t e^{3\tau}d\tau=e^{-2t}\left[\frac{e^{3\tau}}{3}\right]_0^t=\frac{e^{t}-e^{-2t}}{3}$$

Exemplo 4: Encontrar a transformada inversa, utilizando o teorema da convolução.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)}\cdot\frac{1}{(s+2)}\right] \Rightarrow \quad F(s)=\frac{1}{(s-1)} \quad G(s)=\frac{1}{(s+2)}$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=e^{t} \quad | \quad g(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}=e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}=h(t)=f(\mathrm{t})*g(\mathrm{t})$$

$$h(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^t e^{\tau}.e^{-2(t-\tau)}d\tau$$

$$h(t)=\int_0^t e^{\tau}.e^{-2t}.e^{2\tau}d\tau=e^{-2t}\int_0^t e^{3\tau}d\tau=e^{-2t}\left[\frac{e^{3\tau}}{3}\right]_0^t=\frac{e^{t}-e^{-2t}}{3}$$

$$\boldsymbol{h(t)=\frac{e^{t}-e^{-2t}}{3}}$$

Exercícios

Exercícios: Encontrar a transformada inversa, utilizando o teorema da convolução.

a) $H(s) = \frac{2}{s^2(s^2+4)}$

b) $H(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+4)}$

Exercícios: Encontrar a transformada inversa, utilizando o teorema da convolução.

a) $H(s) = \frac{2}{s^2(s^2+4)}$ Resp. $h(t) = \frac{2t - sen2t}{4}$

b) $H(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+4)}$ $h(t) = \frac{2}{5}sen2t + \frac{1}{5}cos2t - \frac{1}{5}e^{-t}$

Para depois desta aula:

- Estudar seção 6.6 do livro texto (Boyce).
- Resolver os exemplos da aula.
- Praticar: exercícios da seção 6.6 do Boyce.

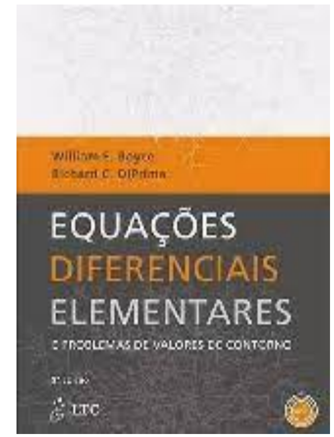
Próxima aula:

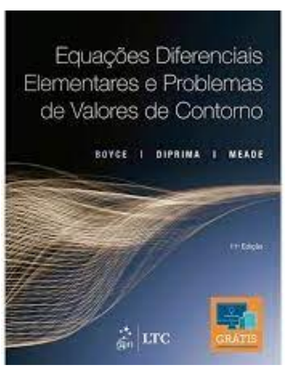
- Sistemas de equações diferenciais.

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Numeração dos exercícios com base na 9ª ed.





BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2020.