Equações diferenciais

Equações diferenciais ordinárias

Aula 18

Sistemas de Equações diferenciais lineares

Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Introdução.
2. Exemplos.
3. Representação matricial de sistemas.
4. Exercício.

Pré-requisitos

- Autovalores e autovetores de uma matriz.

Introdução

Introdução

- Em muitos problemas elementos distintos se associam para compor um todo.

Introdução

- Em muitos problemas elementos distintos se associam para compor um todo.
- Os sistemas de eq. dif. ordinárias podem aparecer em problemas com várias variáveis dependentes, mas com somente uma variável independente.

Introdução

- Em muitos problemas elementos distintos se associam para compor um todo.
- Os sistemas de eq. dif. ordinárias podem aparecer em problemas com várias variáveis dependentes, mas com somente uma variável independente.
- Nesta aula e demais a variável independente será denotada por t e as variáveis dependentes por $x_{1,} x_{2,} \cdots x_n$.

Introdução

- Em muitos problemas elementos distintos se associam para compor um todo.
- Os sistemas de eq. dif. ordinárias podem aparecer em problemas com várias variáveis dependentes, mas com somente uma variável independente.
- Nesta aula e demais a variável independente será denotada por t e as variáveis dependentes por $x_{1,} x_{2,} \cdots x_n$.
- Equações de segunda ordem, ou ordem mais alta são transformados em sistemas com eq. dif. de 1ª ordem.

Exemplo 1: Transformar a equação de 2ª ordem em um sistema de eq. de 1ª ordem.

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

Exemplo 1: Transformar a equação de 2ª ordem em um sistema de eq. de 1ª ordem.

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

- ✓ Define-se duas variáveis auxiliares pela relação:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{cases}$$

Exemplo 1: Transformar a equação de 2ª ordem em um sistema de eq. de 1ª ordem.

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

- ✓ Define-se duas variáveis auxiliares pela relação:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = y' \\ x'_2 = y'' \end{cases}$$

Exemplo 1: Transformar a equação de 2ª ordem em um sistema de eq. de 1ª ordem.

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

✓ Define-se duas variáveis auxiliares pela relação:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = y' \\ x'_2 = y'' \end{cases} \Rightarrow \quad x'_1 = x_2$$

Exemplo 1: Transformar a equação de 2ª ordem em um sistema de eq. de 1ª ordem.

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

- ✓ Define-se duas variáveis auxiliares pela relação:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = y' \\ x'_2 = y'' \end{cases} \Rightarrow \quad x'_1 = x_2$$

- ✓ Substitui-se na eq. dif. original.

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ \end{cases}$$

Exemplo 1: Transformar a equação de 2ª ordem em um sistema de eq. de 1ª ordem.

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

- ✓ Define-se duas variáveis auxiliares pela relação:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = y' \\ x'_2 = y'' \end{cases} \Rightarrow \quad x'_1 = x_2$$

- ✓ Substitui-se na eq. dif. original.

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -\left(\dfrac{b}{a}\right) x_2 - \left(\dfrac{c}{a}\right) x_1 + f(t) \end{cases}$$

Exemplo 1: Transformar a equação de 2ª ordem em um sistema de eq. de 1ª ordem.

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

- ✓ Define-se duas variáveis auxiliares pela relação:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = y' \\ x'_2 = y'' \end{cases} \Rightarrow \quad x'_1 = x_2$$

- ✓ Substitui-se na eq. dif. original.

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -\left(\dfrac{b}{a}\right)x_2 - \left(\dfrac{c}{a}\right)x_1 + f(t) \end{cases}$$

Sistema de eq. dif. de 1ª ordem

Exemplo 1: Transformar a equação de 2ª ordem em um sistema de eq. de 1ª ordem.

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

✓ Define-se duas variáveis auxiliares pela relação:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = y' \\ x'_2 = y'' \end{cases} \Rightarrow \quad x'_1 = x_2$$

✓ Substitui-se na eq. dif. original.

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -\left(\dfrac{b}{a}\right)x_2 - \left(\dfrac{c}{a}\right)x_1 + f(t) \end{cases}$$

Sistema de eq. dif. de 1ª ordem

Resolvendo o sistema para as variáveis x_1 e x_2 encontra-se a função incógnita y.

Introdução

- A forma mais geral para representar um sistema de eq. dif. é:

$$\begin{cases} x'_1 = p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2, \cdots p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x'_2 = p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2, \cdots p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ \vdots \\ x'_n = p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2, \cdots p_{nn}(t)x_n + g_1(t) \end{cases}$$

Introdução

- A forma mais geral para representar um sistema de eq. dif. é:

$$\begin{cases} x'_1 = p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2, \cdots p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x'_2 = p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2, \cdots p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ \vdots \\ x'_n = p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2, \cdots p_{nn}(t)x_n + g_1(t) \end{cases}$$

- p_{11}, p_{21}, $\cdots p_{nn}$ são funções somente da variável independente t.

Introdução

- A forma mais geral para representar um sistema de eq. dif. é:

$$\begin{cases} x'_1 = p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2, \cdots p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x'_2 = p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2, \cdots p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ \vdots \\ x'_n = p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2, \cdots p_{nn}(t)x_n + g_1(t) \end{cases}$$

- p_{11}, p_{21}, $\cdots p_{nn}$ são funções somente da variável independente t.
- Caso as funções g sejam nulas o sistema é homogêneo.

Introdução

- A forma mais geral para representar um sistema de eq. dif. é:

$$\begin{cases} x'_1 = p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2, \cdots p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x'_2 = p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2, \cdots p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ \vdots \\ x'_n = p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2, \cdots p_{nn}(t)x_n + g_1(t) \end{cases}$$

- p_{11}, p_{21}, $\cdots p_{nn}$ são funções somente da variável independente t.
- Caso as funções g sejam nulas o sistema é homogêneo.
- As equações com condições iniciais constituem um PVI.

Introdução

- Para eq. dif. de ordem n a transformação fica:

$$y^n = f(t, y, y', \cdots y^{n-1})$$

Introdução

- Para eq. dif. de ordem n a transformação fica:

$$y^n = f(t, y, y', \cdots y^{n-1})$$

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y'', \cdots \quad x_n = y^{n-1}$$

Introdução

- Para eq. dif. de ordem n a transformação fica:

$$y^n = f(t, y, y', \cdots y^{n-1})$$

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y'', \cdots \quad x_n = y^{n-1}$$

- O que resulta em um sistema com n equações de 1ª ordem.

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, x_2, \cdots x_n) \\ x'_2 = f_2(t, x_1, x_2, \cdots x_n) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(t, x_1, x_2, \cdots x_n) \end{cases}$$

Introdução

- Para eq. dif. de ordem n a transformação fica:

$$y^n = f(t, y, y', \cdots y^{n-1})$$

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y'', \cdots \quad x_n = y^{n-1}$$

- O que resulta em um sistema com n equações de 1ª ordem.

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, x_2, \cdots x_n) \\ x'_2 = f_2(t, x_1, x_2, \cdots x_n) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(t, x_1, x_2, \cdots x_n) \end{cases}$$

A solução do sistema no intervalo $\alpha < t < \beta$ é um conjunto de funções: $x_1, x_2, \cdots x_n$.

Exemplo 2: Transformar a equação de 2ª ordem em um sistema de eq. de 1ª ordem.

$$y'' + 2y' + 3y = 0$$

Exemplo 2: Transformar a equação de 2ª ordem em um sistema de eq. de 1ª ordem.

$$y'' + 2y' + 3y = 0$$

- ✓ Define-se as duas variáveis auxiliares pela relação:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{cases}$$

Exemplo 2: Transformar a equação de 2ª ordem em um sistema de eq. de 1ª ordem.

$$y'' + 2y' + 3y = 0$$

- ✓ Define-se as duas variáveis auxiliares pela relação:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = y' = x_2 \\ x'_2 = y'' \end{cases}$$

Exemplo 2: Transformar a equação de 2ª ordem em um sistema de eq. de 1ª ordem.

$$y'' + 2y' + 3y = 0$$

- ✓ Define-se as duas variáveis auxiliares pela relação:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = y' = x_2 \\ x'_2 = y'' \end{cases}$$

- ✓ Isolar y'' na equação diferencial.

$$y'' = -2y' - 3y$$

Exemplo 2: Transformar a equação de 2ª ordem em um sistema de eq. de 1ª ordem.

$$y'' + 2y' + 3y = 0$$

- ✓ Define-se as duas variáveis auxiliares pela relação:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = y' = x_2 \\ x'_2 = y'' \end{cases}$$

- ✓ Isolar y'' na equação diferencial.

$$y'' = -2y' - 3y$$

- ✓ Substituir as novas variáveis na eq. dif. original.

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -2x_2 - 3x_1 \end{cases}$$

Exemplo 3: Resolver o sistema de eq. dif.

$$\begin{cases} x'_1 = -3x_1 + 2x_2 & (1) \\ x'_2 = -3x_1 + 4x_2 & (2) \end{cases}$$

Exemplo 3: Resolver o sistema de eq. dif.

$$\begin{cases} x'_1 = -3x_1 + 2x_2 & (1) \\ x'_2 = -3x_1 + 4x_2 & (2) \end{cases}$$

- ✓ Resolução pelo método da eliminação. Da eq. (1):

$$x_2 = \frac{x'_1 + 3x_1}{2}$$

Exemplo 3: Resolver o sistema de eq. dif.

$$\begin{cases} x'_1 = -3x_1 + 2x_2 & (1) \\ x'_2 = -3x_1 + 4x_2 & (2) \end{cases}$$

✓ Resolução pelo método da eliminação. Da eq. (1):

$$x_2 = \frac{x'_1 + 3x_1}{2} \quad \Rightarrow \quad x'_2 = \frac{x''_1 + 3x'_1}{2}$$

Exemplo 3: Resolver o sistema de eq. dif.

$$\begin{cases} x'_1 = -3x_1 + 2x_2 & (1) \\ x'_2 = -3x_1 + 4x_2 & (2) \end{cases}$$

- ✓ Resolução pelo método da eliminação. Da eq. (1):

$$x_2 = \frac{x'_1 + 3x_1}{2} \quad \Rightarrow \quad x'_2 = \frac{x''_1 + 3x'_1}{2}$$

- ✓ Substituir x_2 e x'_2 na equação (2).

$$\frac{x''_1 + 3x'_1}{2} = -3x_1 + 4(\frac{x'_1 + 3x_1}{2})$$

Exemplo 3: Resolver o sistema de eq. dif.

$$\begin{cases} x'_1 = -3x_1 + 2x_2 & (1) \\ x'_2 = -3x_1 + 4x_2 & (2) \end{cases}$$

- ✓ Resolução pelo método da eliminação. Da eq. (1):

$$x_2 = \frac{x'_1 + 3x_1}{2} \quad \Rightarrow \quad x'_2 = \frac{x''_1 + 3x'_1}{2}$$

- ✓ Substituir x_2 e x'_2 na equação (2).

$$\frac{x''_1 + 3x'_1}{2} = -3x_1 + 4\left(\frac{x'_1 + 3x_1}{2}\right)$$

$$x''_1 + 3x'_1 = -6x_1 + 4(x'_1 + 3x_1)$$

Exemplo 3: Resolver o sistema de eq. dif.

$$\begin{cases} x'_1 = -3x_1 + 2x_2 & (1) \\ x'_2 = -3x_1 + 4x_2 & (2) \end{cases}$$

✓ Resolução pelo método da eliminação. Da eq. (1):

$$x_2 = \frac{x'_1 + 3x_1}{2} \quad \Rightarrow \quad x'_2 = \frac{x''_1 + 3x'_1}{2}$$

✓ Substituir x_2 e x'_2 na equação (2).

$$\frac{x''_1 + 3x'_1}{2} = -3x_1 + 4\left(\frac{x'_1 + 3x_1}{2}\right)$$

$$x''_1 + 3x'_1 = -6x_1 + 4(x'_1 + 3x_1)$$

$$x''_1 - x'_1 - 6x_1 = 0$$

Exemplo 3: Resolver o sistema.

$$\begin{cases} x'_1 = -3x_1 + 2x_2 & (1) \\ x'_2 = -3x_1 + 4x_2 & (2) \end{cases}$$

- ✓ Resolver a eq. em x_1 pela eq. característica:

$$x''_1 - x'_1 - 6x_1 = 0$$

Exemplo 3: Resolver o sistema.

$$\begin{cases} x'_1 = -3x_1 + 2x_2 & (1) \\ x'_2 = -3x_1 + 4x_2 & (2) \end{cases}$$

✓ Resolver a eq. em x_1 pela eq. característica:

$$x''_1 - x'_1 - 6x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - r - 6 = 0$$

Exemplo 3: Resolver o sistema.

$$\begin{cases} x'_1 = -3x_1 + 2x_2 & (1) \\ x'_2 = -3x_1 + 4x_2 & (2) \end{cases}$$

- ✓ Resolver a eq. em x_1 pela eq. característica:

$$x''_1 - x'_1 - 6x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - r - 6 = 0$$

$$(r-3)(r+2) = 0$$

Exemplo 3: Resolver o sistema. $\begin{cases} x'_1 = -3x_1 + 2x_2 & (1) \\ x'_2 = -3x_1 + 4x_2 & (2) \end{cases}$

- ✓ Resolver a eq. em x_1 pela eq. característica:

$$x''_1 - x'_1 - 6x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - r - 6 = 0$$

$$(r-3)(r+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 3 \quad \text{e} \quad r_2 = -2$$

Exemplo 3: Resolver o sistema. $\begin{cases} x'_1 = -3x_1 + 2x_2 & (1) \\ x'_2 = -3x_1 + 4x_2 & (2) \end{cases}$

- ✓ Resolver a eq. em x_1 pela eq. característica:

$$x''_1 - x'_1 - 6x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - r - 6 = 0$$

$$(r-3)(r+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 3 \quad \text{e} \quad r_2 = -2$$

- ✓ A solução geral da eq. em x_1 fica:

$$x_1 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t}$$

Exemplo 3: Resolver o sistema. $\begin{cases} x'_1 = -3x_1 + 2x_2 & (1) \\ x'_2 = -3x_1 + 4x_2 & (2) \end{cases}$

- ✓ Resolver a eq. em x_1 pela eq. característica:

$$x''_1 - x'_1 - 6x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - r - 6 = 0$$

$$(r-3)(r+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 3 \quad \text{e} \quad r_2 = -2$$

- ✓ A solução geral da eq. em x_1 fica:

$$x_1 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t}$$

- ✓ Como o sistema original é uma eq. em y:

$$x_1 = y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t}$$

Exemplo 3: Resolver o sistema. $\begin{cases} x'_1 = -3x_1 + 2x_2 & (1) \\ x'_2 = -3x_1 + 4x_2 & (2) \end{cases}$

✓ Resolver a eq. em x_1 pela eq. característica:

$$x''_1 - x'_1 - 6x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - r - 6 = 0$$

$$(r-3)(r+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 3 \quad \text{e} \quad r_2 = -2$$

✓ A solução geral da eq. em x_1 fica:

$$x_1 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t}$$

✓ Como o sistema original é uma eq. em y:

$$x_1 = y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t}$$

Solução geral da equação diferencial em y

Introdução

- A estratégia de resolução de sistemas de eq. dif. por substituição não foi muito útil.
- A substituição originou novamente uma equação de segunda ordem.

Introdução

- A estratégia de resolução de sistemas de eq. dif. por substituição não foi muito útil.
- A substituição originou novamente uma equação de segunda ordem.
- Muitas vezes, esse método não trará simplificação para o problema com equação de segunda ordem.

Introdução

- A estratégia de resolução de sistemas de eq. dif. por substituição não foi muito útil.
- A substituição originou novamente uma equação de segunda ordem.
- Muitas vezes, esse método não trará simplificação para o problema com equação de segunda ordem.
- Para resolução de equações com grau maior do que dois o método pode ser útil.

Introdução

- A estratégia de resolução de sistemas de eq. dif. por substituição não foi muito útil.
- A substituição originou novamente uma equação de segunda ordem.
- Muitas vezes, esse método não trará simplificação para o problema com equação de segunda ordem.
- Para resolução de equações com grau maior do que dois o método pode ser útil.
- No entanto, o método mais eficaz consiste em representar o sistema por matrizes.

Representação matricial de um sistema de equações

Representação matricial de sistemas

- As equações do exemplo 3 podem ser organizadas na forma matricial.

$$\begin{cases} x'_1 = -3x_1 + 2x_2 \\ x'_2 = -3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

Representação matricial de sistemas

- As equações do exemplo 3 podem ser organizadas na forma matricial.

$$\begin{cases} x'_1 = -3x_1 + 2x_2 \\ x'_2 = -3x_1 + 4x_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Representação matricial de sistemas

- As equações do exemplo 3 podem ser organizadas na forma matricial.

$$\begin{cases} x'_1 = -3x_1 + 2x_2 \\ x'_2 = -3x_1 + 4x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Denominando cada matriz por:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$$

Representação matricial de sistemas

- As equações do exemplo 3 podem ser organizadas na forma matricial.

$$\begin{cases} x'_1 = -3x_1 + 2x_2 \\ x'_2 = -3x_1 + 4x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Denominando cada matriz por:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Representação matricial de sistemas

- As equações do exemplo 3 podem ser organizadas na forma matricial.

$$\begin{cases} x'_1 = -3x_1 + 2x_2 \\ x'_2 = -3x_1 + 4x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Denominando cada matriz por:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Representação matricial de sistemas

- As equações do exemplo 3 podem ser organizadas na forma matricial.

$$\begin{cases} x'_1 = -3x_1 + 2x_2 \\ x'_2 = -3x_1 + 4x_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Denominando cada matriz por:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- A representação matricial do sistema fica escrita:

$$\boxed{\vec{X}' = A\vec{X}}$$

Representação matricial de sistemas

- A equação $\vec{X}' = A\vec{X}$ representa um sistema de equações lineares homogêneas com coeficientes constantes.

- Esta representação pode ser generalizada para sistemas com coeficientes de funções.

Representação matricial de sistemas

- A equação $\vec{X}' = A\vec{X}$ representa um sistema de equações lineares homogêneas com coeficientes constantes.
- Esta representação pode ser generalizada para sistemas com coeficientes de funções.
- O número de colunas da matriz A dos coeficientes define o número de equações do sistema.

Representação matricial de sistemas

- A equação $\vec{X}' = A\vec{X}$ representa um sistema de equações lineares homogêneas com coeficientes constantes.

- Esta representação pode ser generalizada para sistemas com coeficientes de funções.

- O número de colunas da matriz A dos coeficientes define o número de equações do sistema.

- Iniciaremos com o caso em que a equação é única ($n = 1$). Em seguida, a metodologia poderá ser ampliada para sistemas maiores.

Representação matricial de sistemas

- Seja o sistema de equações na forma matricial:

$$\vec{X}' = A\vec{X}$$

Representação matricial de sistemas

- Seja o sistema de equações na forma matricial:

$\vec{X}' = A\vec{X}$ A: matriz $m \times n$ dos coeficientes

Representação matricial de sistemas

- Seja o sistema de equações na forma matricial:

$$\vec{X}' = A\vec{X}$$

A: matriz $m \times n$ dos coeficientes

- Se $n = 1$ a equação é única, escrita por:

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

Representação matricial de sistemas

- Seja o sistema de equações na forma matricial:

  $\vec{X}' = A\vec{X}$ A: matriz $m \times n$ dos coeficientes

- Se $n = 1$ a equação é única, escrita por:

  $\frac{dx}{dt} = ax$ cuja solução é: $x = ce^{at}$

Representação matricial de sistemas

- Seja o sistema de equações na forma matricial:

$\vec{X}' = A\vec{X}$ $\qquad$ A: matriz $m \times n$ dos coeficientes

- Se $n = 1$ a equação é única, escrita por:

$\dfrac{dx}{dt} = ax$ $\qquad$ cuja solução é: $\quad x = ce^{at}$

✓ Se a constante $a < 0$ a solução tende para $x = 0$. Chamada solução de equilíbrio assintóticamente estável.

Representação matricial de sistemas

- Seja o sistema de equações na forma matricial:

$$\vec{X}' = A\vec{X}$$

A: matriz $m \times n$ dos coeficientes

- Se $n = 1$ a equação é única, escrita por:

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

cuja solução é: $x = ce^{at}$

  - ✓ Se a constante $a < 0$ a solução tende para $x = 0$. Chamada solução de equilíbrio assintóticamente estável.
  - ✓ Se a constante $a > 0$ a solução se afasta do equilíbrio.

Representação matricial de sistemas

- O maior interesse são pelas soluções de equilíbrio.

Representação matricial de sistemas

- O maior interesse são pelas soluções de equilíbrio.
- Para o sistema $\vec{X}' = A\vec{X}$ essas soluções de equilíbrio são encontradas resolvendo:

$$A\vec{X} = 0$$

Representação matricial de sistemas

- O maior interesse são pelas soluções de equilíbrio.
- Para o sistema $\vec{X}' = A\vec{X}$ essas soluções de equilíbrio são encontradas resolvendo:

$A\vec{X} = 0$ Supondo que: $detA \neq 0$

Representação matricial de sistemas

- O maior interesse são pelas soluções de equilíbrio.
- Para o sistema $\vec{X}' = A\vec{X}$ essas soluções de equilíbrio são encontradas resolvendo:

  $A\vec{X} = 0$ Supondo que: $detA \neq 0$

- Supondo uma solução do tipo exponencial $\vec{X} = e^{rt}$.

Representação matricial de sistemas

- O maior interesse são pelas soluções de equilíbrio.
- Para o sistema $\vec{X}' = A\vec{X}$ essas soluções de equilíbrio são encontradas resolvendo:

  $A\vec{X} = 0$ Supondo que: $detA \neq 0$

- Supondo uma solução do tipo exponencial $\vec{X} = e^{rt}$.
- Multiplica-se a proposta por um vetor constante B.

  $\vec{X} = Be^{rt}$

Representação matricial de sistemas

- O maior interesse são pelas soluções de equilíbrio.
- Para o sistema $\vec{X}' = A\vec{X}$ essas soluções de equilíbrio são encontradas resolvendo:

  $A\vec{X} = 0$ Supondo que: $detA \neq 0$

- Supondo uma solução do tipo exponencial $\vec{X} = e^{rt}$.
- Multiplica-se a proposta por um vetor constante B.

  $$\vec{X} = Be^{rt} \quad \Rightarrow \quad \vec{X}' = rBe^{rt}$$

Representação matricial de sistemas

- O maior interesse são pelas soluções de equilíbrio.
- Para o sistema $\vec{X}' = A\vec{X}$ essas soluções de equilíbrio são encontradas resolvendo:

$A\vec{X} = 0$ Supondo que: $detA \neq 0$

- Supondo uma solução do tipo exponencial $\vec{X} = e^{rt}$.
- Multiplica-se a proposta por um vetor constante B.

$$\vec{X} = Be^{rt} \quad \Rightarrow \quad \vec{X}' = rBe^{rt}$$

- Substituir a proposta e derivada no sistema:

$$rBe^{rt} = ABe^{rt}$$

Representação matricial de sistemas

- O maior interesse são pelas soluções de equilíbrio.
- Para o sistema $\vec{X}' = A\vec{X}$ essas soluções de equilíbrio são encontradas resolvendo:

$A\vec{X} = 0$ Supondo que: $detA \neq 0$

- Supondo uma solução do tipo exponencial $\vec{X} = e^{rt}$.
- Multiplica-se a proposta por um vetor constante B.

$$\vec{X} = Be^{rt} \quad \Rightarrow \quad \vec{X}' = rBe^{rt}$$

- Substituir a proposta e derivada no sistema:

$$rB\cancel{e^{rt}} = AB\cancel{e^{rt}}$$

Representação matricial de sistemas

- O maior interesse são pelas soluções de equilíbrio.
- Para o sistema $\vec{X}' = A\vec{X}$ essas soluções de equilíbrio são encontradas resolvendo:

$A\vec{X} = 0$ Supondo que: $detA \neq 0$

- Supondo uma solução do tipo exponencial $\vec{X} = e^{rt}$.
- Multiplica-se a proposta por um vetor constante B.

$$\vec{X} = Be^{rt} \quad \Rightarrow \quad \vec{X}' = rBe^{rt}$$

- Substituir a proposta e derivada no sistema:

$$rB\cancel{e^{rt}} = AB\cancel{e^{rt}} \quad \Rightarrow \quad rB = AB$$

Representação matricial de sistemas

- Isolar o vetor B, utilizando as regras matriciais:

$$AB - rB = 0$$

Representação matricial de sistemas

- Isolar o vetor B, utilizando as regras matriciais:

$$AB - rB = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - rI)B = 0$$

Representação matricial de sistemas

- Isolar o vetor B, utilizando as regras matriciais:

$$AB - rB = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - rI)B = 0$$

I: matriz identidade

Representação matricial de sistemas

- Isolar o vetor B, utilizando as regras matriciais:

$$AB - rB = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - rI)B = 0$$

I: matriz identidade

- B é constante, então, para que a última expressão seja verdadeira é necessário que:

$$det(A - rI) = 0$$

Representação matricial de sistemas

- Isolar o vetor B, utilizando as regras matriciais:

$$AB - rB = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - rI)B = 0$$

I: matriz identidade

- B é constante, então, para que a última expressão seja verdadeira é necessário que:

$$det(A - rI) = 0$$

- Para resolver esse determinante calcula-se os autovalores e autovetores associados a matriz A.

Representação matricial de sistemas

- Isolar o vetor B, utilizando as regras matriciais:

$$AB - rB = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - rI)B = 0$$

I: matriz identidade

- B é constante, então, para que a última expressão seja verdadeira é necessário que:

$$det(A - rI) = 0$$

- Para resolver esse determinante calcula-se os autovalores e autovetores associados a matriz A.
- Então, o vetor $\vec{X}$ é uma solução do sistema se r for um autovalor e B for um autovetor associado à matriz A.

Exercício: Encontrar os autovalores e autovetores da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Exercício: Encontrar os autovalores e autovetores da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$Resp.$ Autovalores: $r_1 = -2$ e $r_2 = 3$

Autovetores: $x_1 = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $x_2 = c_2 \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Para depois desta aula:

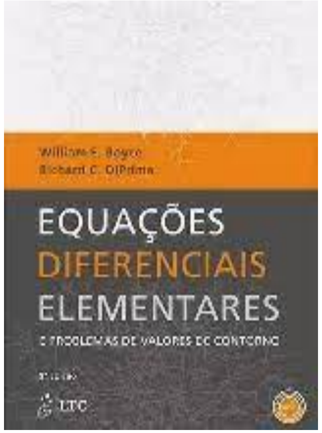
- Estudar seções 7.1 e 7.5 do livro texto (Boyce).
- Resolver o exercício proposto.
- Praticar: exercícios da seções 3.1 e 3.2 do Boyce.

Próxima aula:

- Resolução de sistemas lineares de eq. dif.

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.



Numeração dos exercícios com base na 9ª ed.

BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2020.