Equações diferenciais

Equações diferenciais ordinárias

Aula 19
Sistemas lineares a coeficientes constantes

Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Introdução.
2. Autovalores distintos.
3. Autovalores complexos.
4. Autovalores repetidos.

Pré-requisitos

- Autovalores e autovetores de uma matriz.

Introdução

Introdução

- Para resolução dos sistemas lineares de eq. dif. os autovalores da matriz dos coeficientes assumem papel preponderante.
- Para sistemas com duas variáveis a equação quadrática é utilizada para determinação desses autovalores.

Introdução

- Para resolução dos sistemas lineares de eq. dif. os autovalores da matriz dos coeficientes assumem papel preponderante.
- Para sistemas com duas variáveis a equação quadrática é utilizada para determinação desses autovalores.
- Portanto, podem ocorrer autovalores distintos, complexos ou repetidos.
- A análise para esses três casos fornece o entendimento fundamental para o comportamento de sistemas com mais vaiáveis.

Autovalores distintos

Autovalores distintos (sinais opostos)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{cases} x'_1 = 1x_1 + 1x_2 \\ x'_2 = 4x_1 + 1x_2 \end{cases}$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{cases} x'_1 = 1x_1 + 1x_2 \\ x'_2 = 4x_1 + 1x_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{cases} x'_1 = 1x_1 + 1x_2 \\ x'_2 = 4x_1 + 1x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{cases} x'_1 = 1x_1 + 1x_2 \\ x'_2 = 4x_1 + 1x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}' = A\vec{X}$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{cases} x'_1 = 1x_1 + 1x_2 \\ x'_2 = 4x_1 + 1x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\vec{X}' = A\vec{X} \quad \Rightarrow \quad$ Proposta de sol.: $\vec{X} = Be^{rt}$

Autovalores distintos (sinais opostos)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{cases} x'_1 = 1x_1 + 1x_2 \\ x'_2 = 4x_1 + 1x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\vec{X}' = A\vec{X} \quad \Rightarrow$ Proposta de sol.: $\vec{X} = Be^{rt}$

$det(A - rI) = 0$ (solução de equilíbrio)

Autovalores distintos (sinais opostos)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{cases} x'_1 = 1x_1 + 1x_2 \\ x'_2 = 4x_1 + 1x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\vec{X}' = A\vec{X} \quad \Rightarrow \quad$ Proposta de sol.: $\vec{X} = Be^{rt}$

$det(A - rI) = 0$ (solução de equilíbrio)

- Determinação dos autovalores associados a A.

$$\begin{vmatrix} 1 - r & 1 \\ 4 & 1 - r \end{vmatrix} = 0$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{cases} x'_1 = 1x_1 + 1x_2 \\ x'_2 = 4x_1 + 1x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\vec{X}' = A\vec{X} \quad \Rightarrow \quad$ Proposta de sol.: $\vec{X} = Be^{rt}$

$det(A - rI) = 0$ (solução de equilíbrio)

- Determinação dos autovalores associados a A.

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-r)^2 - 4 = 0$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

$$(1-r)^2 - 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad r^2 - 2r + 1 - 4 = 0$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

$$(1-r)^2 - 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad r^2 - 2r + 1 - 4 = 0$$

$$(r+1)(r-3) = 0$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

$$(1-r)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 2r + 1 - 4 = 0$$

$$(r+1)(r-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_1 = 3} \text{ e } \boxed{r_2 = -1}$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

$$(1-r)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 2r + 1 - 4 = 0$$

$$(r+1)(r-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 3 \;\text{ e }\; r_2 = -1$$

- Autovetor associado ao autovalor $r_1 = 3$.

$$\begin{bmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

$$(1-r)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 2r + 1 - 4 = 0$$

$$(r+1)(r-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 3 \ \text{ e } \ r_2 = -1$$

- Autovetor associado ao autovalor $r_1 = 3$.

$$\begin{bmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1-3 & 1 \\ 4 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

$$(1-r)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 2r + 1 - 4 = 0$$

$$(r+1)(r-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 3 \quad \text{e} \quad r_2 = -1$$

- Autovetor associado ao autovalor $r_1 = 3$.

$$\begin{bmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1-3 & 1 \\ 4 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

$$(1-r)^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad r^2-2r+1-4=0$$

$$(r+1)(r-3)=0 \quad \Rightarrow \quad r_1=3 \quad \text{e} \quad r_2=-1$$

- Autovetor associado ao autovalor $r_1=3$.

$$\begin{bmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1-3 & 1 \\ 4 & 1-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2x_1+x_2=0 \\ 4x_1-2x_2=0 \end{cases}$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

$$(1-r)^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad r^2-2r+1-4=0$$

$$(r+1)(r-3)=0 \quad \Rightarrow \quad r_1=3 \quad \text{e} \quad r_2=-1$$

- Autovetor associado ao autovalor $r_1 = 3$.

$$\begin{bmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1-3 & 1 \\ 4 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 = x_2 \\ 4x_1 = 2x_2 \end{cases}$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

$$(1-r)^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad r^2-2r+1-4=0$$

$$(r+1)(r-3)=0 \quad \Rightarrow \quad r_1=3 \text{ e } r_2=-1$$

- Autovetor associado ao autovalor $r_1 = 3$.

$$\begin{bmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1-3 & 1 \\ 4 & 1-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2x_1+x_2=0 \\ 4x_1-2x_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1=x_2 \\ 4x_1=2x_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{Se } x_1=1, \quad x_2=2$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

$$(1-r)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 2r + 1 - 4 = 0$$

$$(r+1)(r-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 3 \quad \text{e} \quad r_2 = -1$$

- Autovetor associado ao autovalor $r_1 = 3$.

$$\begin{bmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1-3 & 1 \\ 4 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 = x_2 \\ 4x_1 = 2x_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Se } x_1 = 1, \; x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Autovetor de $r_1 = 3$

Autovalores distintos (sinais opostos)

- Autovetor associado ao autovalor $r_2 = -1$.

$$\begin{bmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

- Autovetor associado ao autovalor $r_2 = -1$.

$$\begin{bmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1+1 & 1 \\ 4 & 1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

- Autovetor associado ao autovalor $r_2 = -1$.

$$\begin{bmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1+1 & 1 \\ 4 & 1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

- Autovetor associado ao autovalor $r_2 = -1$.

$$\begin{bmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1+1 & 1 \\ 4 & 1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

- Autovetor associado ao autovalor $r_2 = -1$.

$$\begin{bmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1+1 & 1 \\ 4 & 1+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 = -x_2 \\ 4x_1 = -2x_2 \end{cases}$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

- Autovetor associado ao autovalor $r_2 = -1$.

$$\begin{bmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1+1 & 1 \\ 4 & 1+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 = -x_2 \\ 4x_1 = -2x_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{Se } x_1 = 1 \quad x_2 = -2$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

- Autovetor associado ao autovalor $r_2 = -1$.

$$\begin{bmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1+1 & 1 \\ 4 & 1+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 = -x_2 \\ 4x_1 = -2x_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{Se } x_1 = 1 \quad x_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Autovetor de $r_1 = -1$

Autovalores distintos (sinais opostos)

- Autovetor associado ao autovalor $r_2 = -1$.

$$\begin{bmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1+1 & 1 \\ 4 & 1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 = -x_2 \\ 4x_1 = -2x_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{Se } x_1 = 1 \quad x_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Autovetor de $r_1 = -1$

- Soluções do sistema de equações diferenciais.

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} \qquad \vec{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

- Conjunto fundamental de soluções dos sistema.

$$\vec{X} = c_1\vec{X}^{(1)} + c_2\vec{X}^{(2)}$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

- Conjunto fundamental de soluções dos sistema.

$$\vec{X} = c_1\vec{X}^{(1)} + c_2\vec{X}^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-t}}$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

- Conjunto fundamental de soluções dos sistema.

$$\vec{X} = c_1\vec{X}^{(1)} + c_2\vec{X}^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \vec{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

- O gráfico x_2 versus x_1 é chamado de plano de fase e muito útil para analisar a estabilidade do sistema.

Autovalores distintos (sinais opostos)

- Conjunto fundamental de soluções dos sistema.

$$\vec{X} = c_1\vec{X}^{(1)} + c_2\vec{X}^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \vec{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-t}$$

- O gráfico x_2 versus x_1 é chamado de plano de fase e muito útil para analisar a estabilidade do sistema.

- Para a solução $\vec{X}^{(1)}$ tem-se:

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

- Conjunto fundamental de soluções dos sistema.

$$\vec{X} = c_1\vec{X}^{(1)} + c_2\vec{X}^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \vec{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-t}$$

- O gráfico x_2 versus x_1 é chamado de plano de fase e muito útil para analisar a estabilidade do sistema.

- Para a solução $\vec{X}^{(1)}$ tem-se:

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = c_1e^{3t} \quad \text{e} \quad x_2 = 2c_1e^{3t}$$

Autovalores distintos (sinais opostos)

- Conjunto fundamental de soluções dos sistema.

$$\vec{X} = c_1\vec{X}^{(1)} + c_2\vec{X}^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \vec{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-t}$$

- O gráfico x_2 versus x_1 é chamado de plano de fase e muito útil para analisar a estabilidade do sistema.

- Para a solução $\vec{X}^{(1)}$ tem-se:

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = c_1e^{3t} \quad \text{e} \quad x_2 = 2c_1e^{3t}$$

- Eliminando o termo em t das equações resulta em:

$$x_2 = 2x_1$$

(Equação de uma reta no plano x_2x_1)

Autovalores distintos (sinais opostos)

- $\vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Autovalores distintos (sinais opostos)

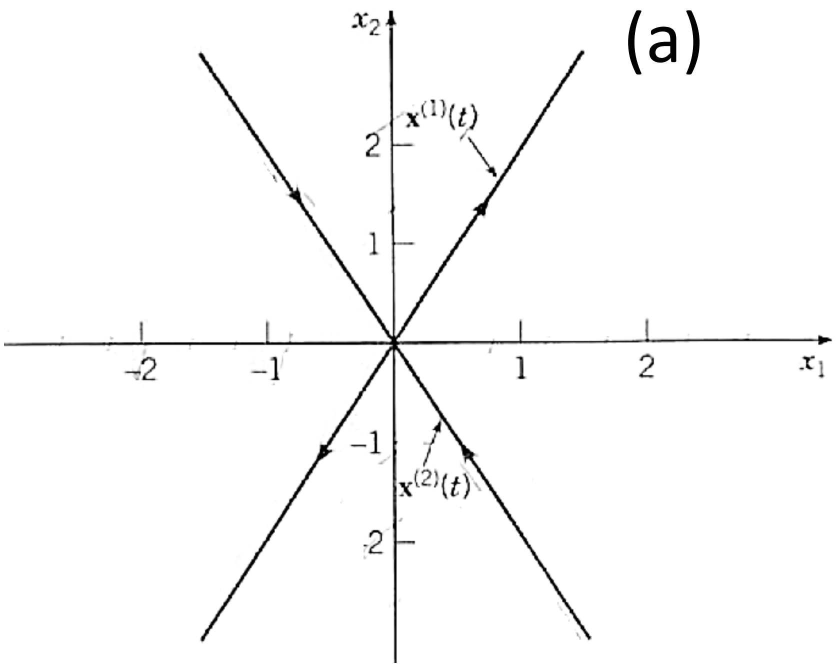
- $\vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $x_1 = c_2 e^{-t}$ e $x_2 = -2c_2 e^{-t}$

Autovalores distintos (sinais opostos)

- $\vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = c_2 e^{-t}$ e $x_2 = -2c_2 e^{-t}$
- Eliminando o termo em t: $\boxed{x_2 = -2x_1}$

Autovalores distintos (sinais opostos)

- $\vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = c_2 e^{-t}$ e $x_2 = -2c_2 e^{-t}$
- Eliminando o termo em t: $\boxed{x_2 = -2x_1}$



(a)

FIGURA 7.5.2: **(a)** Retas formadas para o sistema;

Autovalores distintos (sinais opostos)

- $\vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = c_2 e^{-t}$ e $x_2 = -2c_2 e^{-t}$
- Eliminando o termo em t: $x_2 = -2x_1$

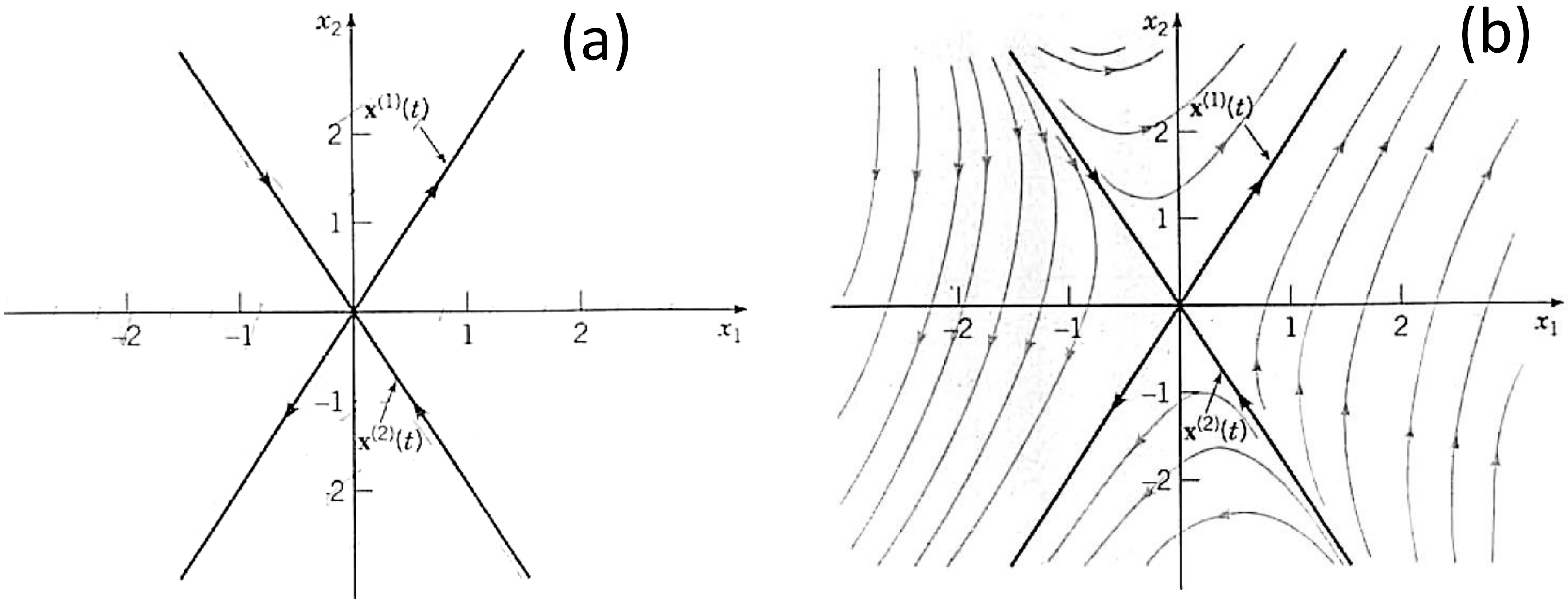


FIGURA 7.5.2: **(a)** Retas formadas para o sistema; **(b)** Trajetórias do sistema.

A origem é um ponto de sela (as soluções se afastam dela).

Padrão típico de um sistema 2×2 com autovalores de sinais opostos.

Autovalores distintos (sinais opostos)

Conjunto solução do sistema: $\vec{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-t}$

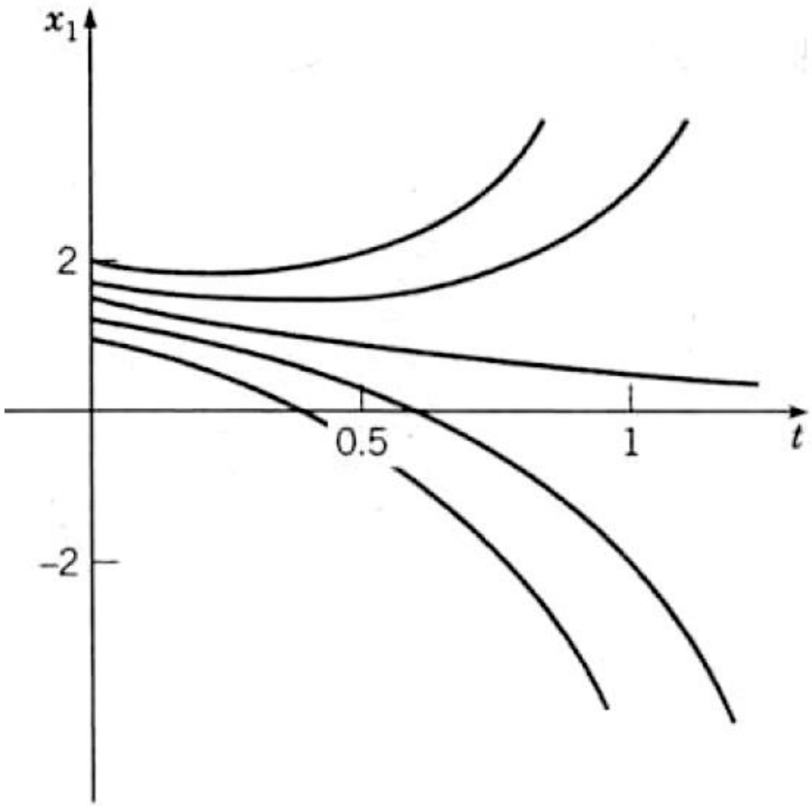


FIGURA 7.5.2 Variável $x_1 versus\ t$ para valores das constantes c_1 e c_2.

Autovalores distintos (sinais opostos)

Conjunto solução do sistema: $\vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$

$$x_1 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$$

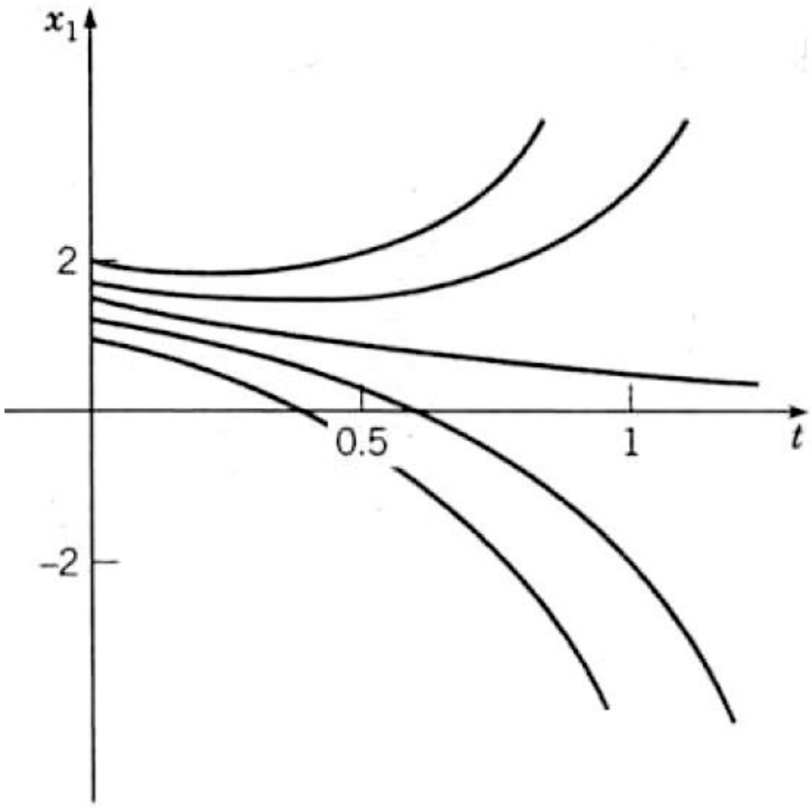
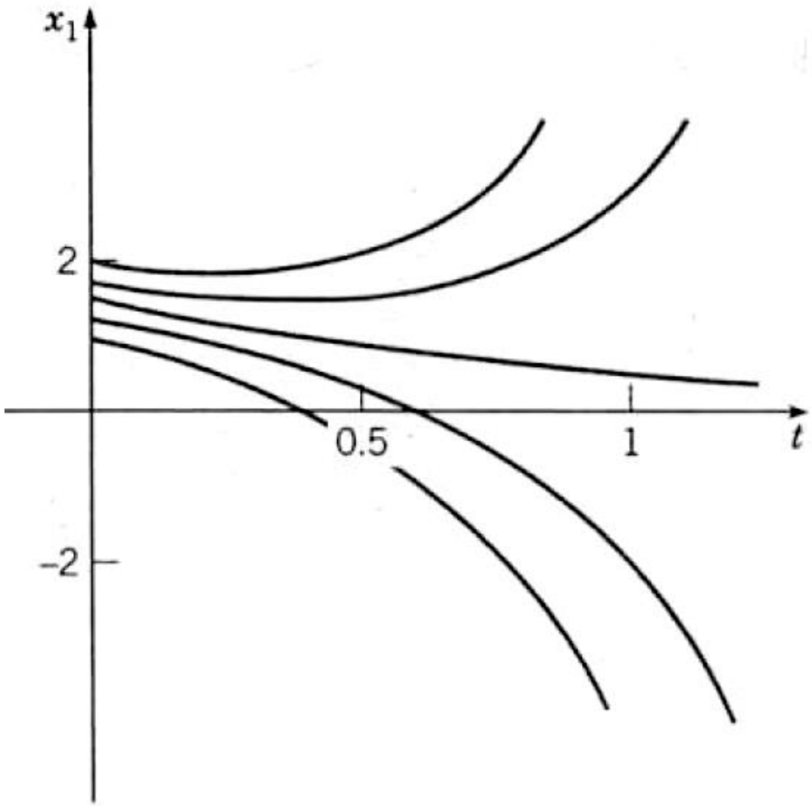


FIGURA 7.5.2 Variável $x_1 versus\ t$ para valores das constantes c_1 e c_2.

Autovalores distintos (sinais opostos)

Conjunto solução do sistema: $\vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$



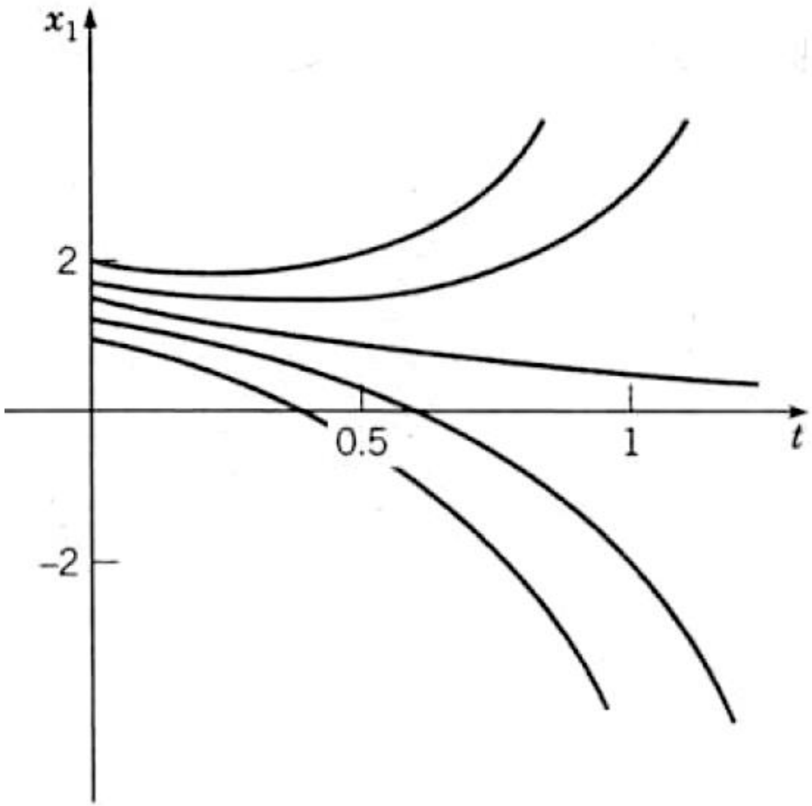
$$x_1 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$$

- Para $c_1 \gg c_2$: e^{3t} prevalece e x_1 cresce.

FIGURA 7.5.2 Variável $x_1 versus\ t$ para valores das constantes c_1 e c_2.

Autovalores distintos (sinais opostos)

Conjunto solução do sistema: $\vec{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-t}$



$$x_1 = c_1e^{3t} + c_2e^{-t}$$

- Para $c_1 \gg c_2$: e^{3t} prevalece e x_1 cresce.

- Para $c_1 \ll c_2$: e^{-t} prevalece e x_1 decresce.

FIGURA 7.5.2 Variável $x_1 versus\ t$ para valores das constantes c_1 e c_2.

Autovalores distintos (sinais iguais)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Autovalores distintos (sinais iguais)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$$

Autovalores distintos (sinais iguais)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a A.

$$\begin{vmatrix} -3 - r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 - r \end{vmatrix} = 0$$

Autovalores distintos (sinais iguais)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a A.

$$\begin{vmatrix} -3-r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (-3-r)(-2-r) - 2 = 0$$

Autovalores distintos (sinais iguais)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a A.

$$\begin{vmatrix} -3-r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (-3-r)(-2-r) - 2 = 0$$

$$(r+1)(r+4) = 0$$

Autovalores distintos (sinais iguais)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a A.

$$\begin{vmatrix} -3-r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (-3-r)(-2-r) - 2 = 0$$

$$(r+1)(r+4) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{r_1 = -1} \qquad \boxed{r_2 = -4}$$

Autovalores distintos (sinais iguais)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a A.

$$\begin{vmatrix} -3-r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (-3-r)(-2-r) - 2 = 0$$

$$(r+1)(r+4) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = -1 \qquad r_2 = -4$$

- Autovetores associados.

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Autovetor de $r_1 = -1$

Autovalores distintos (sinais iguais)

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a A.

$$\begin{vmatrix} -3-r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (-3-r)(-2-r) - 2 = 0$$

$$(r+1)(r+4) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad r_1 = -1 \qquad r_2 = -4$$

- Autovetores associados.

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$ Autovetor de $r_1 = -1$

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$ Autovetor de $r_2 = -4$

Autovalores distintos (sinais iguais)

- Conjunto fundamental de soluções do sistema.

$$\vec{X} = c_1\vec{X}^{(1)} + c_2\vec{X}^{(2)}$$

Autovalores distintos (sinais iguais)

- Conjunto fundamental de soluções do sistema.

$$\vec{X} = c_1\vec{X}^{(1)} + c_2\vec{X}^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}}$$

Autovalores distintos (sinais iguais)

- Conjunto fundamental de soluções do sistema.

$$\vec{X} = c_1\vec{X}^{(1)} + c_2\vec{X}^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \vec{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}$$

- Para as soluções $\vec{X}$ no gráfico x_2 versus x_1 tem-se:

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Autovalores distintos (sinais iguais)

- Conjunto fundamental de soluções do sistema.

$$\vec{X} = c_1\vec{X}^{(1)} + c_2\vec{X}^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}}$$

- Para as soluções $\vec{X}$ no gráfico x_2 versus x_1 tem-se:

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = c_1 e^{-t} \quad \text{e} \quad x_2 = \sqrt{2}c_1 e^{-t}$$

Autovalores distintos (sinais iguais)

- Conjunto fundamental de soluções do sistema.

$$\vec{X} = c_1\vec{X}^{(1)} + c_2\vec{X}^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}e^{-4t}}$$

- Para as soluções $\vec{X}$ no gráfico x_2 versus x_1 tem-se:

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = c_1 e^{-t} \quad \text{e} \quad x_2 = \sqrt{2}c_1 e^{-t}$$

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Autovalores distintos (sinais iguais)

- Conjunto fundamental de soluções do sistema.

$$\vec{X} = c_1\vec{X}^{(1)} + c_2\vec{X}^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \vec{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}$$

- Para as soluções $\vec{X}$ no gráfico x_2 versus x_1 tem-se:

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = c_1 e^{-t} \;\text{ e }\; x_2 = \sqrt{2} c_1 e^{-t}$$

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -c_2\sqrt{2} e^{-4t} \;\text{ e }\; x_2 = c_2 e^{-4t}$$

Autovalores distintos (sinais iguais)

- Conjunto fundamental de soluções do sistema.

$$\vec{X} = c_1\vec{X}^{(1)} + c_2\vec{X}^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \vec{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}$$

- Para as soluções $\vec{X}$ no gráfico x_2 versus x_1 tem-se:

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = c_1 e^{-t} \quad \text{e} \quad x_2 = \sqrt{2} c_1 e^{-t}$$

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -c_2\sqrt{2} e^{-4t} \quad \text{e} \quad x_2 = c_2 e^{-4t}$$

- Eliminando o termo em t das equações fica:

$$x_2 = \sqrt{2} x_1$$

$$x_2 = -\sqrt{2} x_1$$

(Equações de reta no plano $x_2 x_1$)

Autovalores distintos (sinais iguais)

(a)

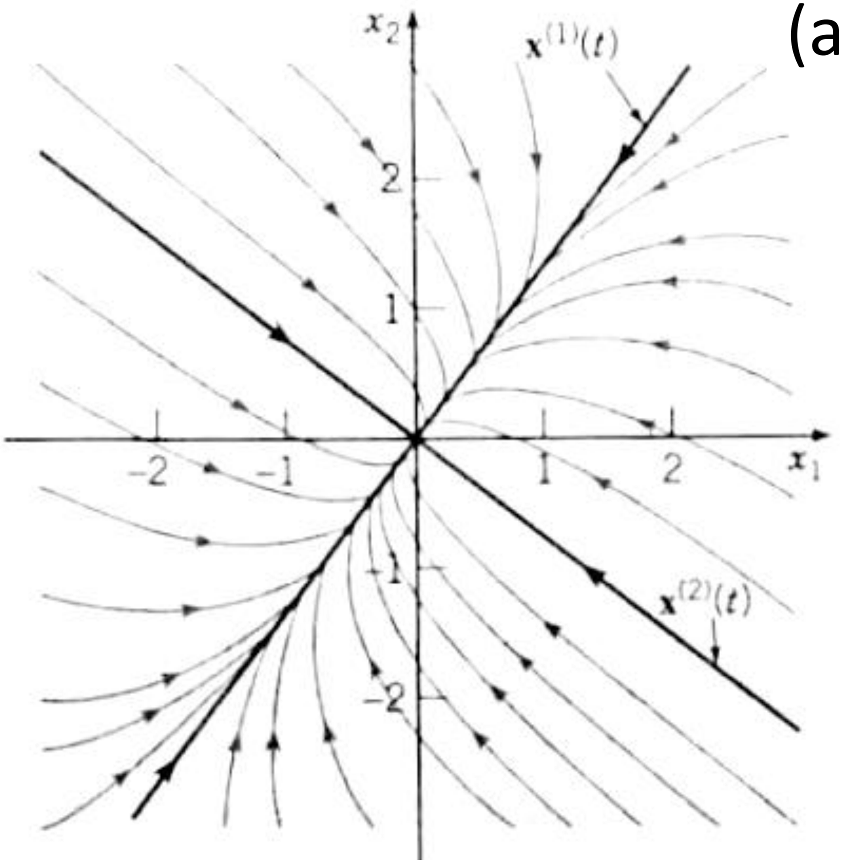
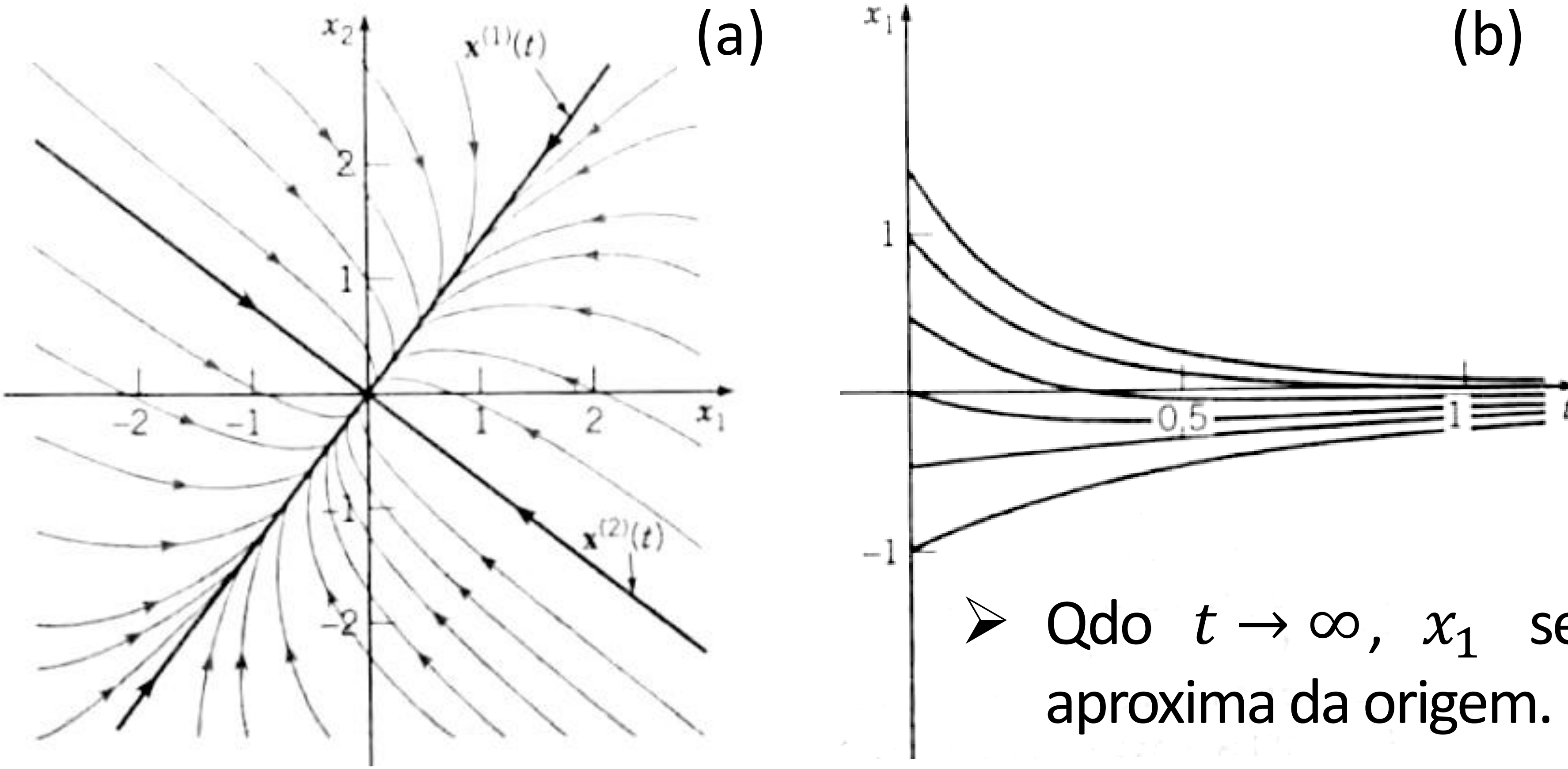


FIGURA 7.5.4: **(a)** Trajetórias do sistema;

A origem é um nó (as soluções se aproximam dela).

Padrão típico de um sistema 2×2 com autovalores de **sinais iguais**.

Autovalores distintos (sinais iguais)



- Qdo $t \to \infty$, x_1 se aproxima da origem.

FIGURA 7.5.4: **(a)** Trajetórias do sistema; **(b)** Gráfico x_1 versus t.

A origem é um nó (as soluções se aproximam dela).

Padrão típico de um sistema 2×2 com autovalores de **sinais iguais**.

Autovalores complexos

Autovalores complexos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Autovalores complexos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Autovalores complexos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a A.

$$\begin{vmatrix} -1/2 - r & 1 \\ -1 & -1/2 - r \end{vmatrix} = 0$$

Autovalores complexos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a A.

$$\begin{vmatrix} -1/2 - r & 1 \\ -1 & -1/2 - r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + r + 5/4 = 0$$

Autovalores complexos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a A.

$$\begin{vmatrix} -1/2 - r & 1 \\ -1 & -1/2 - r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + r + 5/4 = 0$$

$$r_1 = -\frac{1}{2} + i \qquad r_2 = -\frac{1}{2} - i$$

Autovalores complexos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a A.

$$\begin{vmatrix} -1/2 - r & 1 \\ -1 & -1/2 - r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + r + 5/4 = 0$$

$$r_1 = -\frac{1}{2} + i \qquad r_2 = -\frac{1}{2} - i$$

- Autovetores associados.

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Autovetor de r_1

Autovalores complexos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a A.

$$\begin{vmatrix} -1/2 - r & 1 \\ -1 & -1/2 - r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + r + 5/4 = 0$$

$$r_1 = -\frac{1}{2} + i \qquad r_2 = -\frac{1}{2} - i$$

- Autovetores associados.

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$ Autovetor de r_1

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$ Autovetor de r_2

Autovalores complexos

- Conjunto fundamental de soluções dos sistema.

$$\vec{X} = c_1\vec{X}^{(1)} + c_2\vec{X}^{(2)}$$

Autovalores complexos

- Conjunto fundamental de soluções dos sistema.

$$\vec{X} = c_1\vec{X}^{(1)} + c_2\vec{X}^{(2)} \Rightarrow \vec{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{\left(-\frac{1}{2}+i\right)t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{\left(-\frac{1}{2}-i\right)t}$$

Autovalores complexos

- Conjunto fundamental de soluções dos sistema.

$$\vec{X} = c_1\vec{X}^{(1)} + c_2\vec{X}^{(2)} \Rightarrow \vec{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}e^{(-\frac{1}{2}+i)t} + c_2\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}e^{(-\frac{1}{2}-i)t}$$

- Utilizando a relação de Euler na parte complexa:

$$e^{it} = (cost + i\,sent) \qquad e^{-it} = (cost - i\,sent)$$

Autovalores complexos

- Conjunto fundamental de soluções dos sistema.

$$\vec{X} = c_1\vec{X}^{(1)} + c_2\vec{X}^{(2)} \Rightarrow \vec{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}e^{(-\frac{1}{2}+i)t} + c_2\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}e^{(-\frac{1}{2}-i)t}$$

- Utilizando a relação de Euler na parte complexa:

$$e^{it} = (cost + i\,sent) \qquad e^{-it} = (cost - i\,sent)$$

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Autovalores complexos

- Conjunto fundamental de soluções dos sistema.

$$\vec{X} = c_1\vec{X}^{(1)} + c_2\vec{X}^{(2)} \Rightarrow \vec{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}e^{\left(-\frac{1}{2}+i\right)t} + c_2\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}e^{\left(-\frac{1}{2}-i\right)t}$$

- Utilizando a relação de Euler na parte complexa:

$$e^{it} = (cost + i\,sent) \qquad e^{-it} = (cost - i\,sent)$$

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{X}^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}e^{-\frac{t}{2}}(cost + i\,sent)$$

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

Autovalores complexos

- Conjunto fundamental de soluções dos sistema.

$$\vec{X} = c_1\vec{X}^{(1)} + c_2\vec{X}^{(2)} \Rightarrow \vec{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}e^{\left(-\frac{1}{2}+i\right)t} + c_2\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}e^{\left(-\frac{1}{2}-i\right)t}$$

- Utilizando a relação de Euler na parte complexa:

$$e^{it} = (cost + i\,sent) \qquad e^{-it} = (cost - i\,sent)$$

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{X}^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}e^{-\frac{t}{2}}(cost + i\,sent)$$

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{X}^{(2)} = \begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}e^{-\frac{t}{2}}(cost - i\,sent)$$

Autovalores complexos

- Separação da parte real e imaginária das soluções:

$$\vec{X}^{(1)} = e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}(cost + i\,sent)$$

Autovalores complexos

- Separação da parte real e imaginária das soluções:

$$\vec{X}^{(1)} = e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}(cost + i\,sent) = e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}cost\\ -sent\end{pmatrix} + ie^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}sent\\ cost\end{pmatrix}$$

Autovalores complexos

- Separação da parte real e imaginária das soluções:

$$\vec{X}^{(1)} = e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}(cost + i\,sent) = e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}cost\\ -sent\end{pmatrix} + ie^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}sent\\ cost\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}^{(2)} = e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}(cost - i\,sent)$$

Autovalores complexos

- Separação da parte real e imaginária das soluções:

$$\vec{X}^{(1)} = e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}(cost + i\,sent) = e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}cost\\ -sent\end{pmatrix} + ie^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}sent\\ cost\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}^{(2)} = e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}(cost - i\,sent) = e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}cost\\ -sent\end{pmatrix} - ie^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}sent\\ cost\end{pmatrix}$$

Autovalores complexos

- Separação da parte real e imaginária das soluções:

$$\vec{X}^{(1)} = e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}(cost + i\,sent) = e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} cost \\ -sent \end{pmatrix} + ie^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} sent \\ cost \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}^{(2)} = e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}(cost - i\,sent) = e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} cost \\ -sent \end{pmatrix} - ie^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} sent \\ cost \end{pmatrix}$$

- Duas soluções linearmente independentes (LI) são:

$$u(t) = e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} cost \\ -sent \end{pmatrix} \qquad v(t) = e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} cost \\ sent \end{pmatrix}$$

Autovalores complexos

- Separação da parte real e imaginária das soluções:

$$\vec{X}^{(1)} = e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}(cost + i\,sent) = e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}cost\\ -sent\end{pmatrix} + ie^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}sent\\ cost\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}^{(2)} = e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}(cost - i\,sent) = e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}cost\\ -sent\end{pmatrix} - ie^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}sent\\ cost\end{pmatrix}$$

- Duas soluções linearmente independentes (LI) são:

$$u(t) = e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}cost\\ -sent\end{pmatrix} \qquad v(t) = e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}cost\\ sent\end{pmatrix}$$

- O gráfico de fase de x_2 versus x_1 mostra trajetórias espirais que se aproximam da origem.

Autovalores complexos

(a)

(b)

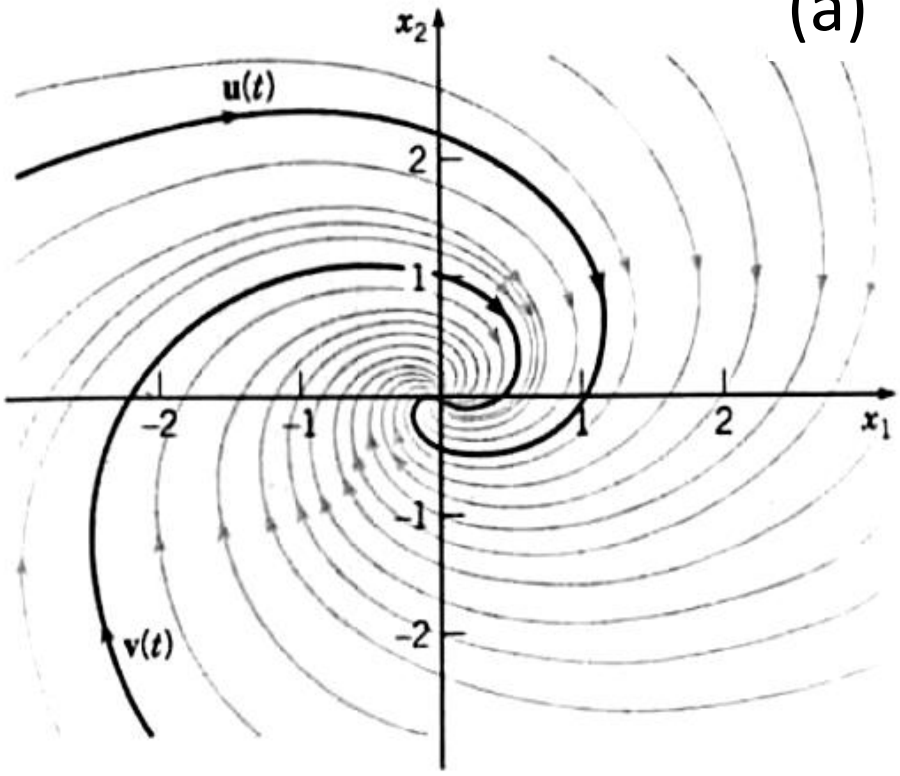
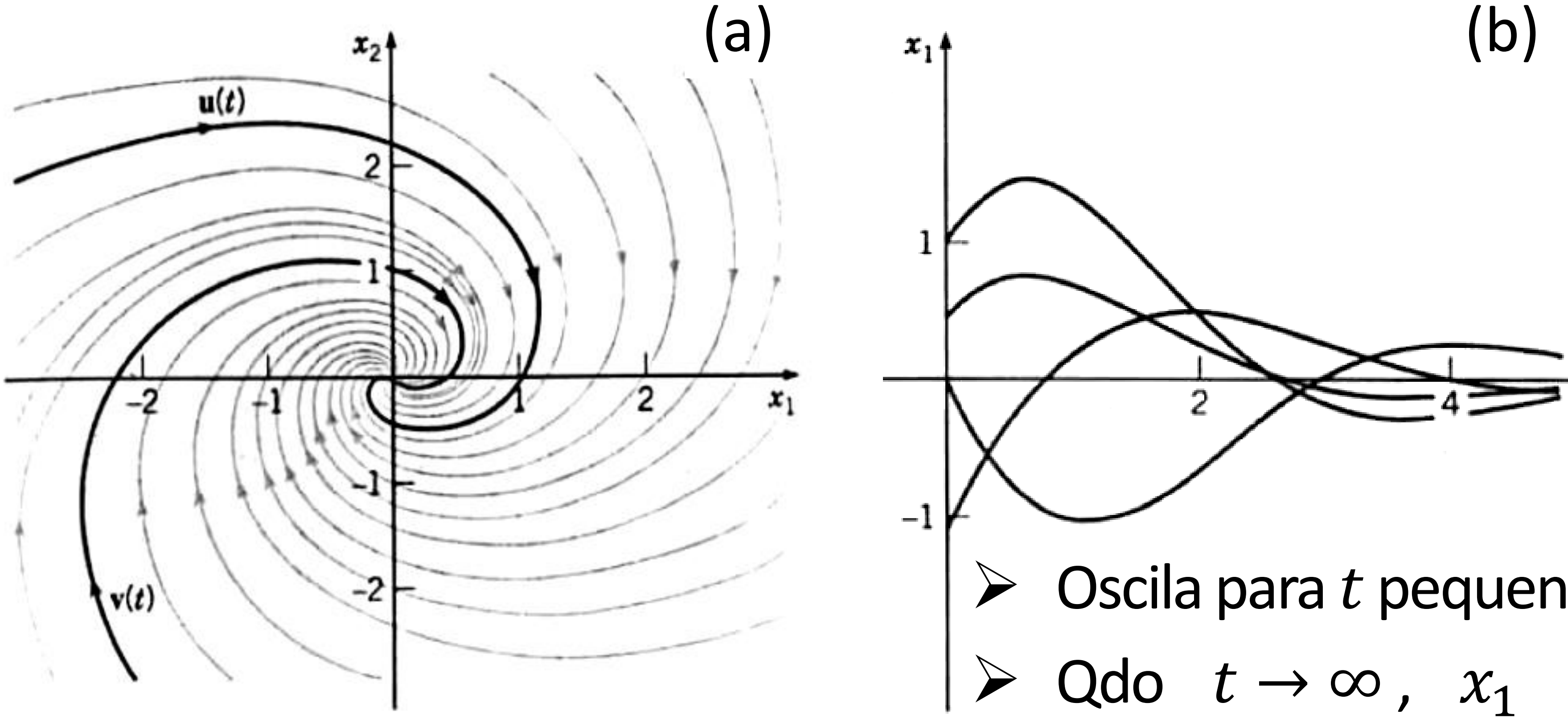


FIGURA 7.6.2: **(a)** Trajetórias do sistema; **(b)** Gráfico x_1 versus t .

A origem é um ponto espiral (as soluções se aproximam dela).

Padrão típico de um sistema 2×2 com autovalores complexos.

Autovalores complexos



- Oscila para t pequeno.
- Qdo $t \to \infty$, x_1 se aproxima da origem.

FIGURA 7.6.2: **(a)** Trajetórias do sistema; **(b)** Gráfico x_1 versus t .

A origem é um ponto espiral (as soluções se aproximam dela).

Padrão típico de um sistema 2×2 com autovalores complexos.

Autovalores repetidos

Autovalores repetidos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Autovalores repetidos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a A.

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{vmatrix} = 0$$

Autovalores repetidos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a A.

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-r)(3-r)+1=0$$

Autovalores repetidos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a A.

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-r)(3-r)+1=0$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

Autovalores repetidos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a A.

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-r)(3-r) + 1 = 0$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_1 = r_2 = 2}$$

Autovalores repetidos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a A.

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-r)(3-r)+1=0$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_1 = r_2 = 2}$$

- Autovetor associado ao autovalor 2.

$$\boxed{v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$ Autovetor de r_1

Autovalores repetidos

- Seja o sistema de eq. dif. a coeficientes constantes.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Autovalores associados a A.

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-r)(3-r)+1=0$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 = 2$$

- Autovetor associado ao autovalor 2.

$$1^a \; Solução$$

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ Autovetor de r_1 $$\Rightarrow \quad \vec{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Autovalores repetidos

- Para construir a solução geral é necessário encontrar outro autovetor.

Autovalores repetidos

- Para construir a solução geral é necessário encontrar outro autovetor.
- Em analogia ao estudo das eq. dif. de 2ª ordem devemos propor uma solução LI de $\vec{X}^{(1)}$:

$\vec{X}^{(2)} = Cte^{2t} + De^{2t}$ C e D: autovetores constantes

Autovalores repetidos

- Para construir a solução geral é necessário encontrar outro autovetor.
- Em analogia ao estudo das eq. dif. de 2ª ordem devemos propor uma solução LI de $\vec{X}^{(1)}$:

$$\vec{X}^{(2)} = Cte^{2t} + De^{2t}$$ C e D: autovetores constantes

- Substituindo a proposta no sistema de equações:

$$\vec{X}' = A\vec{X} \quad \Rightarrow \quad 2Cte^{2t} + (C + 2D)e^{2t} = A(Cte^{2t} + De^{2t})$$

Autovalores repetidos

- Para construir a solução geral é necessário encontrar outro autovetor.
- Em analogia ao estudo das eq. dif. de 2ª ordem devemos propor uma solução LI de $\vec{X}^{(1)}$:

$$\vec{X}^{(2)} = Cte^{2t} + De^{2t}$$

C e D: autovetores constantes

- Substituindo a proposta no sistema de equações:

$$\vec{X}' = A\vec{X} \quad \Rightarrow \quad 2Cte^{2t} + (C + 2D)e^{2t} = A(Cte^{2t} + De^{2t})$$

$$(2C)te^{2t} + (C + 2D)e^{2t} = (AC)te^{2t} + (AD)e^{2t}$$

Autovalores repetidos

- Para construir a solução geral é necessário encontrar outro autovetor.
- Em analogia ao estudo das eq. dif. de 2ª ordem devemos propor uma solução LI de $\vec{X}^{(1)}$:

$$\vec{X}^{(2)} = Cte^{2t} + De^{2t}$$ C e D: autovetores constantes

- Substituindo a proposta no sistema de equações:

$$\vec{X}' = A\vec{X} \quad \Rightarrow \quad 2Cte^{2t} + (C + 2D)e^{2t} = A(Cte^{2t} + De^{2t})$$

$$(2C)te^{2t} + (C + 2D)e^{2t} = (AC)te^{2t} + (AD)e^{2t}$$

- Igualando os coeficientes de te^{2t} e e^{2t} .

$$2C = AC \qquad C + 2D = AD$$

Autovalores repetidos

- Condições para o segundo autovetor:

$$2C = AC$$

$$C + 2D = AD$$

Autovalores repetidos

- Condições para o segundo autovetor:

$$2C = AC \qquad \Rightarrow \qquad (A - 2I)C = 0 \qquad (1)$$

$$C + 2D = AD \qquad\qquad (A + 2I)D = C \qquad (2)$$

Autovalores repetidos

- Condições para o segundo autovetor:

$$2C = AC \qquad \Rightarrow \qquad (A - 2I)C = 0 \qquad (1)$$

$$C + 2D = AD \qquad \qquad (A + 2I)D = C \qquad (2)$$

- A equação (1) é satisfeita se C for um autovetor de A associado ao autovalor $r = 2$.

$$\begin{bmatrix} 1-2 & -1 \\ 1 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Autovalores repetidos

- Condições para o segundo autovetor:

$$2C = AC \qquad\qquad \Rightarrow \qquad (A - 2I)C = 0 \qquad (1)$$

$$C + 2D = AD \qquad\qquad (A + 2I)D = C \qquad (2)$$

- A equação (1) é satisfeita se C for um autovetor de A associado ao autovalor $r = 2$.

$$\begin{bmatrix} 1-2 & -1 \\ 1 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Autovalores repetidos

- Condições para o segundo autovetor:

$$2C = AC \qquad \Rightarrow \qquad (A - 2I)C = 0 \qquad (1)$$

$$C + 2D = AD \qquad\qquad (A + 2I)D = C \qquad (2)$$

- A equação (1) é satisfeita se C for um autovetor de A associado ao autovalor $r = 2$.

$$\begin{bmatrix} 1-2 & -1 \\ 1 & 3-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$$

Autovalores repetidos

- Condições para o segundo autovetor:

$$2C = AC \qquad \Rightarrow \qquad (A - 2I)C = 0 \qquad (1)$$

$$C + 2D = AD \qquad\qquad (A + 2I)D = C \qquad (2)$$

- A equação (1) é satisfeita se C for um autovetor de A associado ao autovalor $r = 2$.

$$\begin{bmatrix} 1-2 & -1 \\ 1 & 3-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Se } x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$

Autovalores repetidos

- Condições para o segundo autovetor:

$$2C = AC \qquad\qquad C + 2D = AD \quad \Rightarrow \quad (A-2I)C = 0 \quad (1) \qquad (A+2I)D = C \quad (2)$$

- A equação (1) é satisfeita se C for um autovetor de A associado ao autovalor $r = 2$.

$$\begin{bmatrix} 1-2 & -1 \\ 1 & 3-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Se } x_1 = 1, \; x_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Autovetor

Autovalores repetidos

$$(A + 2I)D = C \qquad (2)$$

- Para equação (2) o autovetor D de A associado ao autovalor $r = 2$ depende de C.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Autovalores repetidos

$$(A + 2I)D = C \qquad (2)$$

- Para equação (2) o autovetor D de A associado ao autovalor $r = 2$ depende de C.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$$

Autovalores repetidos

$$(A+2I)D = C \qquad (2)$$

- Para equação (2) o autovetor D de A associado ao autovalor $r=2$ depende de C.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -1 - x_1 \\ x_2 = -1 - x_1 \end{cases}$$

Autovalores repetidos

$$(A+2I)D = C \qquad (2)$$

- Para equação (2) o autovetor D de A associado ao autovalor $r = 2$ depende de C.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -1 - x_1 \\ x_2 = -1 - x_1 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

Se $x_1 = 0$

$$x_2 = -1$$

Autovalores repetidos

$$(A + 2I)D = C \qquad (2)$$

- Para equação (2) o autovetor D de A associado ao autovalor $r = 2$ depende de C.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -1 - x_1 \\ x_2 = -1 - x_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \text{Se } x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Autovalores repetidos

$$(A+2I)D = C \qquad (2)$$

- Para equação (2) o autovetor D de A associado ao autovalor $r = 2$ depende de C.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -1 - x_1 \\ x_2 = -1 - x_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Se } x_1 = 0 \quad x_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

- Substituindo os autovetores C e D na proposta $\vec{X}^{(2)}$:

$$\vec{X}^{(2)} = Cte^{2t} + De^{2t} \quad \Rightarrow \quad \vec{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Autovalores repetidos

$$(A+2I)D = C \qquad (2)$$

- Para equação (2) o autovetor D de A associado ao autovalor $r=2$ depende de C.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -1 - x_1 \\ x_2 = -1 - x_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Se } x_1 = 0 \quad x_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Substituindo os autovetores C e D na proposta $\vec{X}^{(2)}$:

$$\vec{X}^{(2)} = Cte^{2t} + De^{2t} \quad \Rightarrow \quad \vec{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\vec{X} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \right]$$

Solução geral

Autovalores repetidos

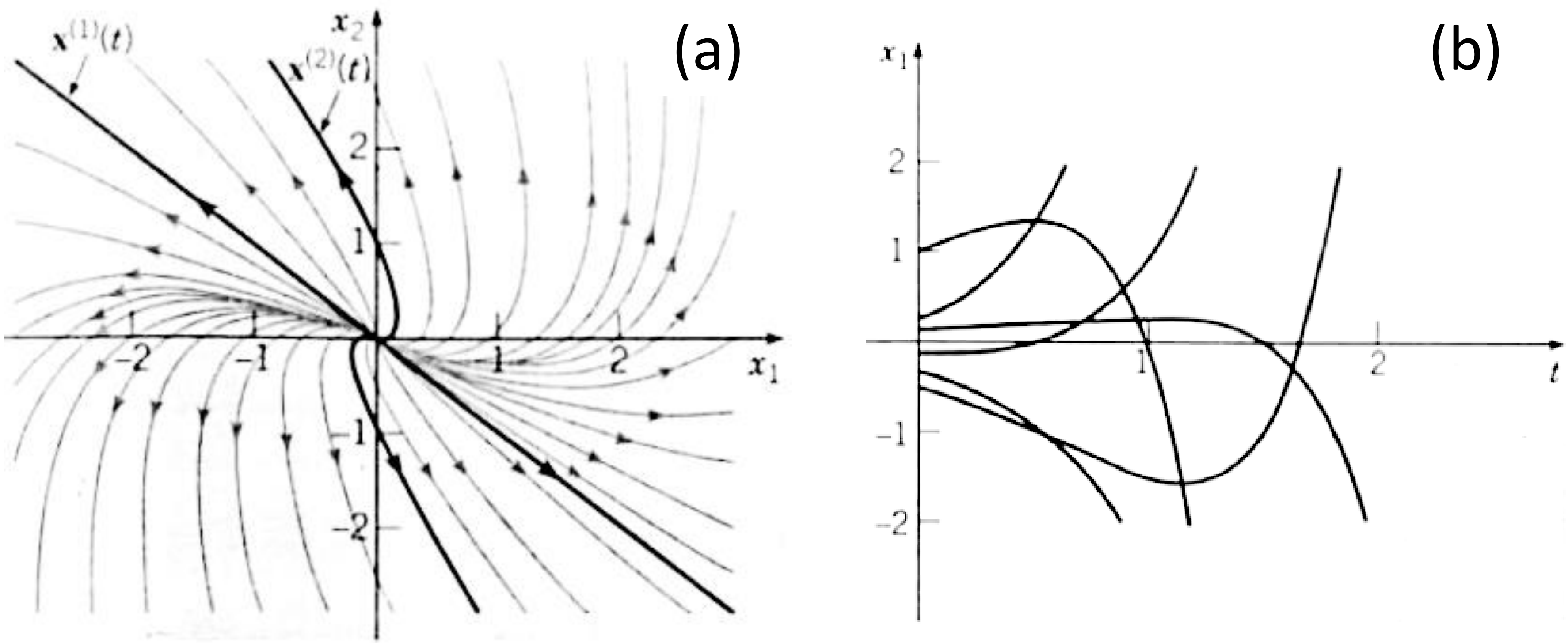


FIGURA 7.8.2: **(a)** Trajetórias do sistema; **(b)** Gráfico x_1 versus t .

A origem é nó impróprio (as soluções se afastam dela).

Padrão típico de um sistema 2×2 com autovalores repetidos.

Resumo

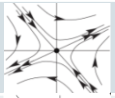
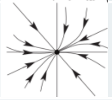
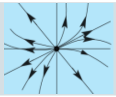
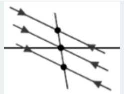
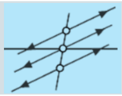
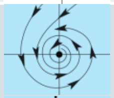
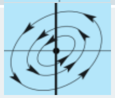
Resumo

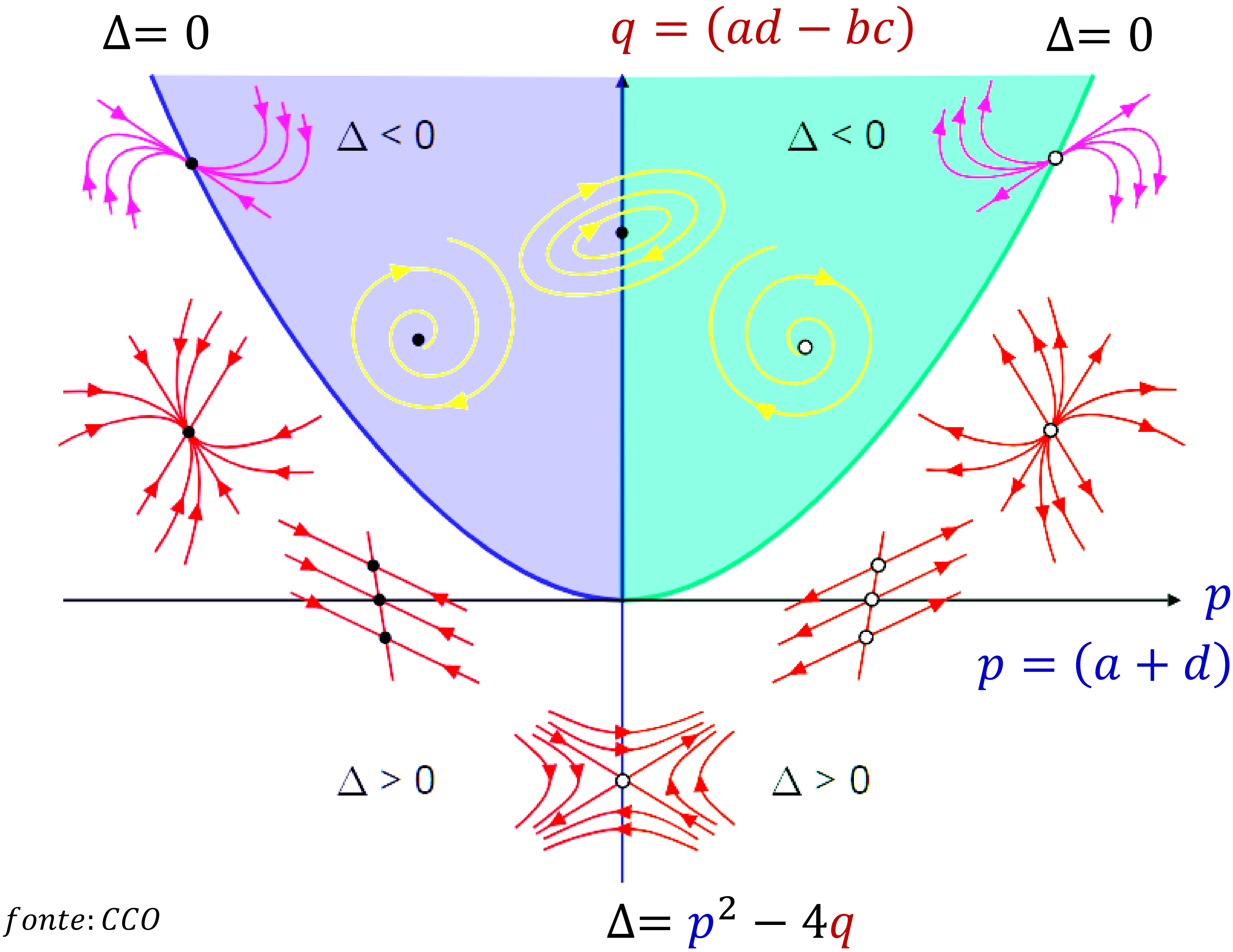
- Para sistemas 2×2 com coeficientes constante, há quatro casos principais:
  1. Autovalores reais com sinais opostos,
     $\vec{X} = \mathbf{0}$ é um ponto de sela.
  2. Autovalores reais com o mesmo sinal,
     $\vec{X} = \mathbf{0}$ é um nó.
  3. Autovalores complexos com parte real $\neq$ zero,
     $\vec{X} = \mathbf{0}$ é um ponto espiral.
  4. Autovalores repetidos,
     $\vec{X} = \mathbf{0}$ é um nó impróprio.

$$\begin{cases} x'_1 = ax_1 + bx_2 \\ x'_2 = cx_1 + dx_2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow det(A - rI) = 0$$

$$\begin{vmatrix} a - r & b \\ c & d - r \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r^2 - (a + d)r + (ad - bc) = 0$$

p Traço de A $\qquad q$ det A

Autovalores	Sinais	Tipo	Estabilidade	
Distintos	Opostos	Sela	Instável	
	positivos	Nó	Instável	
	negativos	Nó	Assint. estável	
Repetidos	positivos	Nó	Instável	
	negativos	Nó	Estável	
Complexo $r = \lambda \pm i\mu$	$\lambda > 0$	Espiral	Instável	
	$\lambda < 0$	Espiral	Assint. estável	
	$\lambda = 0$	Centro	Estável	



Δ= 0
q = (ad − bc)
Δ= 0
Δ < 0
Δ < 0
p
p = (a + d)
Δ > 0
Δ > 0
Δ= p² − 4q
fonte: CCO

Para depois desta aula:

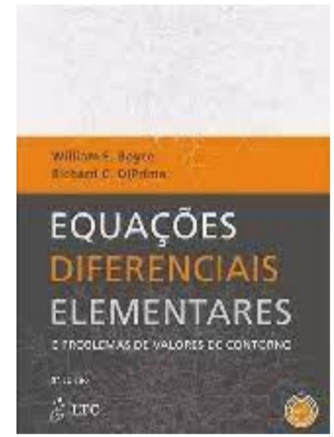
- Estudar seções 7.5, 7.6 e 7.8 do livro texto.
- Resolver o exercício proposto.
- Praticar: exercícios da seções 7.5, 7.6 e 7.8.

Próxima aula:

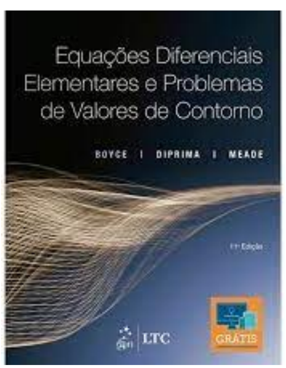
- Resolução de sistemas não homogêneos.

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.



Numeração dos exercícios com base na 9ª ed.



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2020.