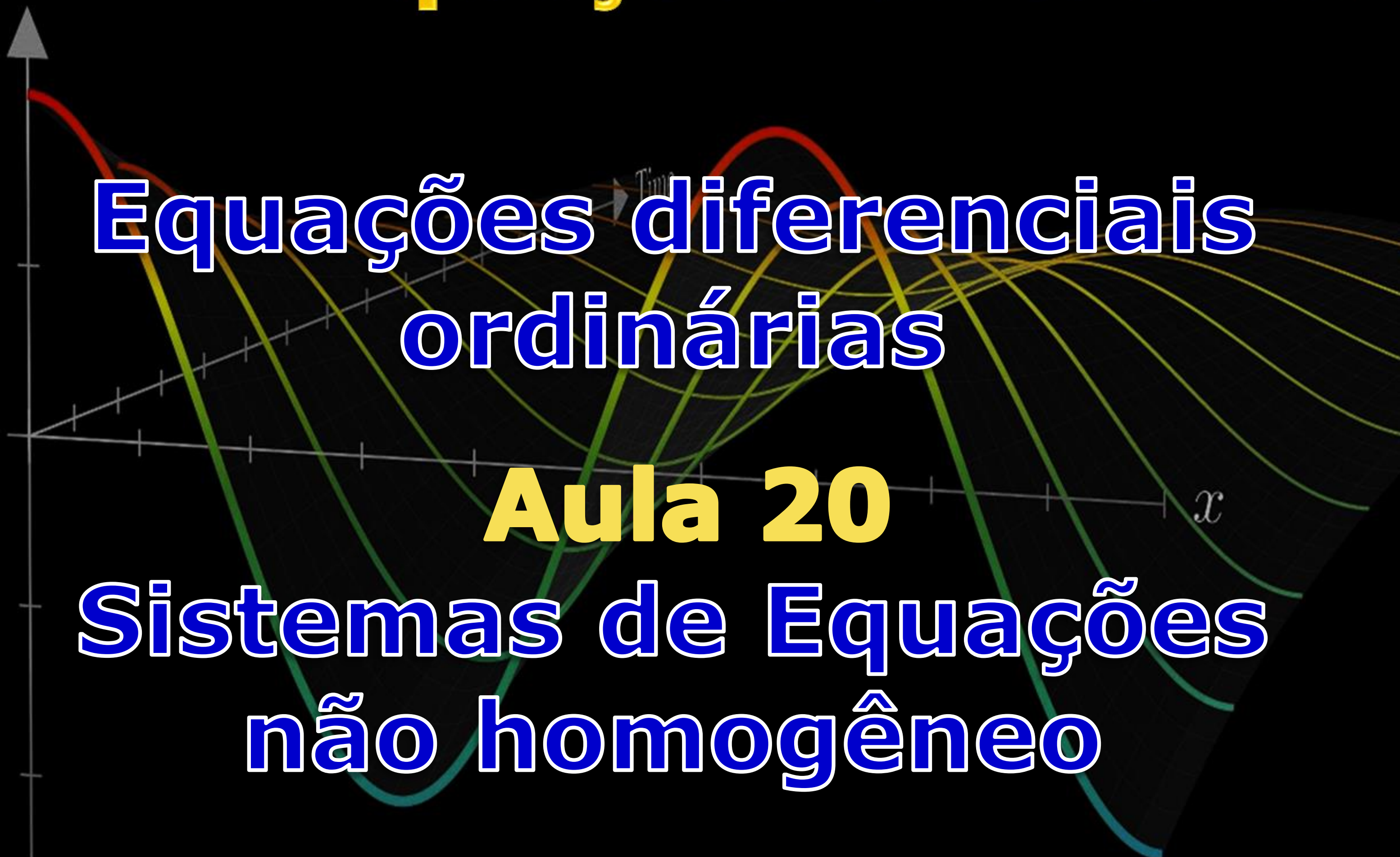
Equações diferenciais



Equações diferenciais ordinárias

Aula 20

Sistemas de Equações não homogêneo

Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Introdução.
2. Resolução por transformada de Laplace.
3. Exemplo.
4. Exercício.

Pré-requisitos

- Transformada de Laplace.
- Matriz inversa.

Introdução

Introdução

- Seja o sistema de eq. dif. não homogêneo:

$$\vec{X}' = P(t)\vec{X} + \vec{g}(t)$$

$P(t)$: matriz $n \times n$

$\vec{g}(t)$: vetor $n \times 1$

Introdução

- Seja o sistema de eq. dif. não homogêneo:

$$\vec{X}' = P(t)\vec{X} + \vec{g}(t)$$

$P(t)$: matriz $n \times n$

$\vec{g}(t)$: vetor $n \times 1$

- A solução geral pode ser expressa por:

$$\vec{X} = c_1\vec{X}^{(1)} + c_2\vec{X}^{(2)} + \cdots + c_n\vec{X}^{(n)} + \vec{v}(t)$$

Introdução

- Seja o sistema de eq. dif. não homogêneo:

$$\vec{X}' = P(t)\vec{X} + \vec{g}(t)$$

$P(t)$: matriz $n \times n$

$\vec{g}(t)$: vetor $n \times 1$

- A solução geral pode ser expressa por:

$$\vec{X} = c_1\vec{X}^{(1)} + c_2\vec{X}^{(2)} + \cdots + c_n\vec{X}^{(n)} + \vec{v}(t)$$

$c_1\vec{X}^{(1)} + \cdots + c_n\vec{X}^{(n)}$: solução do sistema homogêneo.

$\vec{v}(t)$: solução particular do sistema não homogêneo.

Introdução

- Existem alguns métodos para encontrar a solução particular $\vec{v}(t)$.
  - Diagonalização da matriz A.
  - Coeficientes indeterminados.
  - Variação de parâmetros.
  - Transformada de Laplace.

Introdução

- Existem alguns métodos para encontrar a solução particular $\vec{v}(t)$.
  - ✓ Diagonalização da matriz A.
  - ✓ Coeficientes indeterminados.
  - ✓ Variação de parâmetros.
  - ✓ Transformada de Laplace.
- A transformada de Laplace tem como vantagens:
  - Aplicável quando o termo não homogêneo é impulsivo ou descontínuo.
  - Fornece a solução completa do sistema, solução do homogêneo e do não homogêneo.

Transformada de Laplace de Sistemas de equações diferenciais

Transformada de Laplace em sistemas

- A transformada é utilizada de maneira semelhante ao método aplicado em equações diferenciais.
- A transformada de um vetor é calculada em cada componente.

Transformada de Laplace em sistemas

- A transformada é utilizada de maneira semelhante ao método aplicado em equações diferenciais.
- A transformada de um vetor é calculada em cada componente.
- Assim, $\mathcal{L}\{\vec{X}(t)\}$ é o vetor cujas componentes são as transformadas das componentes de $\vec{X}(t)$.

Transformada de Laplace em sistemas

- A transformada é utilizada de maneira semelhante ao método aplicado em equações diferenciais.
- A transformada de um vetor é calculada em cada componente.
- Assim, $\mathcal{L}\{\vec{X}(t)\}$ é o vetor cujas componentes são as transformadas das componentes de $\vec{X}(t)$.
- Analogamente, $\mathcal{L}\{\vec{X}'(t)\}$ é a transformada dos componentes do vetor das derivadas.
- Portanto, valem as mesmas regras e tabelas da transformada de Laplace vistas anteriormente.

Transformada de Laplace em sistemas

- Relações da transformada em vetores.

$\mathcal{L}\{\vec{X}(t)\} = \vec{X}(s)$ $\quad\quad$ $\vec{X}(0)$: vetor condição inicial

$$\mathcal{L}\{\vec{X}'(t)\} = s\vec{X}(s) - \vec{X}(0)$$

Transformada de Laplace em sistemas

- Relações da transformada em vetores.

$$\mathcal{L}\{\vec{X}(t)\} = \vec{X}(s) \qquad \vec{X}(0)\text{: vetor condição inicial}$$

$$\mathcal{L}\{\vec{X}'(t)\} = s\vec{X}(s) - \vec{X}(0)$$

- No processo de resolução será necessário calcular a matriz inversa. Para matriz 2 x 2 o cálculo é:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Transformada de Laplace em sistemas

- Relações da transformada em vetores.

$\mathcal{L}\{\vec{X}(t)\} = \vec{X}(s)$ $\qquad$ $\vec{X}(0)$: vetor condição inicial

$$\mathcal{L}\{\vec{X}'(t)\} = s\vec{X}(s) - \vec{X}(0)$$

- No processo de resolução será necessário calcular a matriz inversa. Para matriz 2 x 2 o cálculo é:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \frac{1}{detB}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Transformada de Laplace em sistemas

- Relações da transformada em vetores.

$$\mathcal{L}\{\vec{X}(t)\} = \vec{X}(s) \qquad \vec{X}(0)\text{: vetor condição inicial}$$

$$\mathcal{L}\{\vec{X}'(t)\} = s\vec{X}(s) - \vec{X}(0)$$

- No processo de resolução será necessário calcular a matriz inversa. Para matriz 2 x 2 o cálculo é:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \frac{1}{detB}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$Ex.:\ B = \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix}$$

Transformada de Laplace em sistemas

- Relações da transformada em vetores.

$$\mathcal{L}\{\vec{X}(t)\} = \vec{X}(s) \qquad \vec{X}(0)\text{: vetor condição inicial}$$

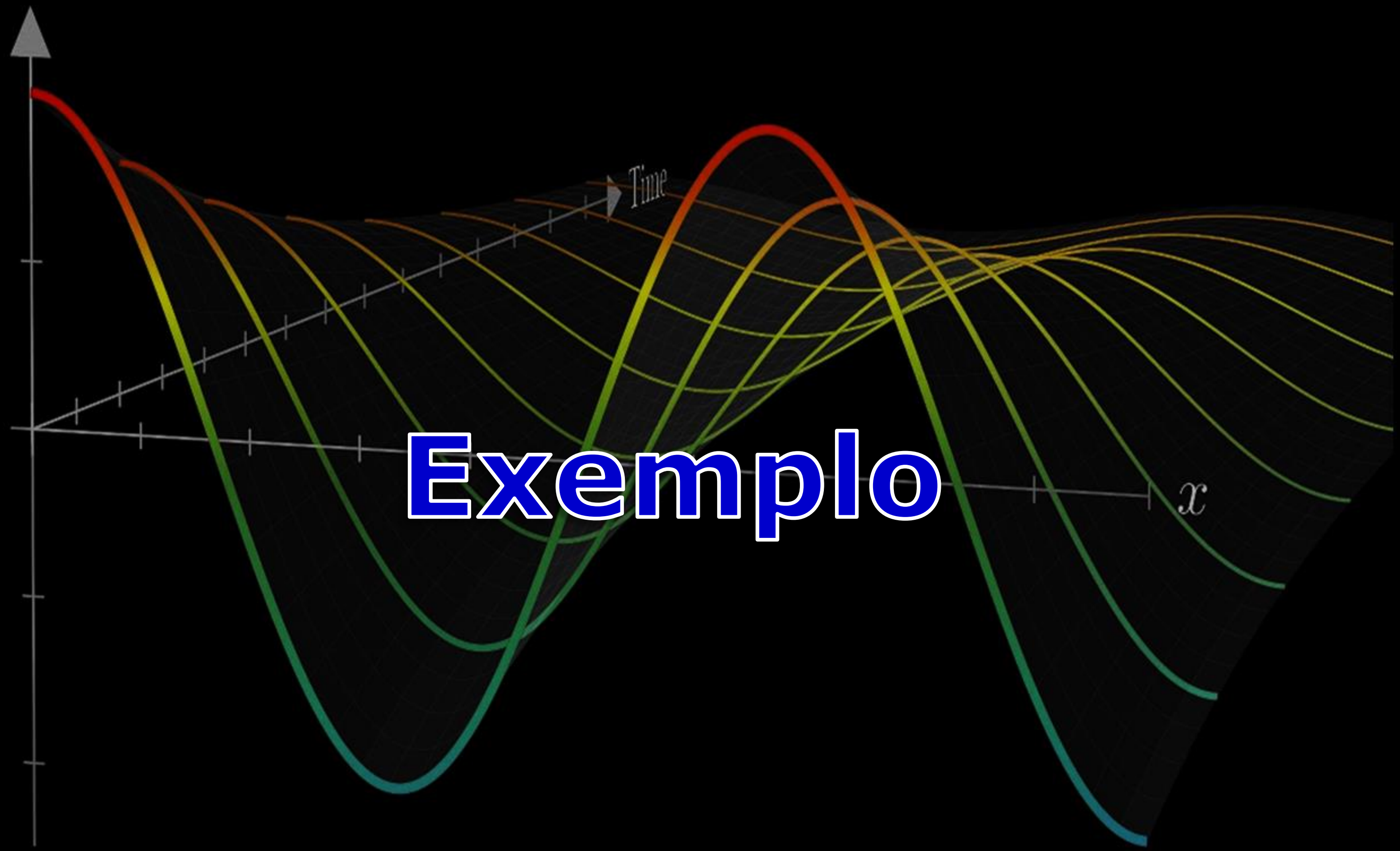
$$\mathcal{L}\{\vec{X}'(t)\} = s\vec{X}(s) - \vec{X}(0)$$

- No processo de resolução será necessário calcular a matriz inversa. Para matriz 2 x 2 o cálculo é:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \frac{1}{detB}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$Ex.: \; B = \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{s(s-2)}\begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix}$$

Exemplo



Exemplo 1: Resolver o PVI de eq. dif. pelo método da Transformada de Laplace.

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} \quad e \quad \vec{X}(0) = 0$$

Exemplo 1: Resolver o PVI de eq. dif. pelo método da Transformada de Laplace.

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} \quad e \quad \vec{X}(0) = 0$$

✓ Aplicar a transformada de Laplace em cada termo.

$$\vec{X}'(t) = A\vec{X}(t) + \vec{g}(t)$$

Exemplo 1: Resolver o PVI de eq. dif. pelo método da Transformada de Laplace.

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} \quad e \quad \vec{X}(0) = 0$$

- ✓ Aplicar a transformada de Laplace em cada termo.

$$\vec{X}'(t) = A\vec{X}(t) + \vec{g}(t)$$

$$\mathcal{L}\{\vec{X}'(t)\} = A\mathcal{L}\{\vec{X}(t)\} + \mathcal{L}\{\vec{g}(t)\}$$

Exemplo 1: Resolver o PVI de eq. dif. pelo método da Transformada de Laplace.

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} \quad e \quad \vec{X}(0) = 0$$

✓ Aplicar a transformada de Laplace em cada termo.

$$\vec{X}'(t) = A\vec{X}(t) + \vec{g}(t)$$

$$\mathcal{L}\{\vec{X}'(t)\} = A\mathcal{L}\{\vec{X}(t)\} + \mathcal{L}\{\vec{g}(t)\}$$

$$s\vec{X}(s) - \vec{X}(0) = A\vec{X}(s) + G(s)$$

Exemplo 1: Resolver o PVI de eq. dif. pelo método da Transformada de Laplace.

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} \quad e \quad \vec{X}(0) = 0$$

✓ Aplicar a transformada de Laplace em cada termo.

$$\vec{X}'(t) = A\vec{X}(t) + \vec{g}(t)$$

$$\mathcal{L}\{\vec{X}'(t)\} = A\mathcal{L}\{\vec{X}(t)\} + \mathcal{L}\{\vec{g}(t)\}$$

$$s\vec{X}(s) - \cancel{\vec{X}(0)}^{\,= 0} = A\vec{X}(s) + G(s)$$

Exemplo 1: Resolver o PVI de eq. dif. pelo método da Transformada de Laplace.

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} \quad e \quad \vec{X}(0) = 0$$

✓ Aplicar a transformada de Laplace em cada termo.

$$\vec{X}'(t) = A\vec{X}(t) + \vec{g}(t)$$

$$\mathcal{L}\{\vec{X}'(t)\} = A\mathcal{L}\{\vec{X}(t)\} + \mathcal{L}\{\vec{g}(t)\}$$

$$s\vec{X}(s) - \cancel{\vec{X}(0)}^{=0} = A\vec{X}(s) + G(s)$$

$$s\vec{X}(s) - A\vec{X}(s) = G(s)$$

Exemplo 1: Resolver o PVI de eq. dif. pelo método da Transformada de Laplace.

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} \quad e \quad \vec{X}(0) = 0$$

✓ Aplicar a transformada de Laplace em cada termo.

$$\vec{X}'(t) = A\vec{X}(t) + \vec{g}(t)$$

$$\mathcal{L}\{\vec{X}'(t)\} = A\mathcal{L}\{\vec{X}(t)\} + \mathcal{L}\{\vec{g}(t)\}$$

$$s\vec{X}(s) - \cancel{\vec{X}(0)}^{\,= 0} = A\vec{X}(s) + G(s)$$

$$s\vec{X}(s) - A\vec{X}(s) = G(s) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{X}(s)(sI - A) = G(s)$$

Exemplo 1: Resolver o PVI de eq. dif. pelo método da Transformada de Laplace.

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} \quad e \quad \vec{X}(0) = 0$$

✓ Aplicar a transformada de Laplace em cada termo.

$$\vec{X}'(t) = A\vec{X}(t) + \vec{g}(t)$$

$$\mathcal{L}\{\vec{X}'(t)\} = A\mathcal{L}\{\vec{X}(t)\} + \mathcal{L}\{\vec{g}(t)\}$$

$$s\vec{X}(s) - \underbrace{\cancel{\vec{X}(0)}}_{=0} = A\vec{X}(s) + G(s)$$

$$s\vec{X}(s) - A\vec{X}(s) = G(s) \quad \Rightarrow \quad \vec{X}(s)(sI - A) = G(s)$$

I: matriz identidade 2×2

Exemplo 1:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} \qquad \vec{X}(0) = 0$$

$$(matriz\ A)$$

- ✓ Cálculo de $G(s)$.

$$G(s) = \mathcal{L}\{\vec{g}(t)\} = \mathcal{L}\begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix}$$

Exemplo 1:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} \qquad \vec{X}(0) = 0$$

$(matriz\ A)$

- ✓ Cálculo de $G(s)$.

$$G(s) = \mathcal{L}\{\vec{g}(t)\} = \mathcal{L}\begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\{2e^{-t}\} \\ \mathcal{L}\{3t\} \end{bmatrix}$$

Exemplo 1:

$$\vec{X}' = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{(matriz\ A)} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} \qquad \vec{X}(0) = 0$$

- ✓ Cálculo de $G(s)$.

$$G(s) = \mathcal{L}\{\vec{g}(t)\} = \mathcal{L}\begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{L}\{2e^{-t}\} \\ \mathcal{L}\{3t\} \end{bmatrix}}_{(tabela)} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1} \\ \dfrac{3}{s^2} \end{bmatrix}$$

Exemplo 1:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} \qquad \vec{X}(0) = 0$$

$(matriz\ A)$

- ✓ Cálculo de $G(s)$.

$$G(s) = \mathcal{L}\{\vec{g}(t)\} = \mathcal{L}\begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\{2e^{-t}\} \\ \mathcal{L}\{3t\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1} \\ \dfrac{3}{s^2} \end{bmatrix}$$

$(tabela)$

- ✓ Inserindo este resultado na expressão de $\vec{X}(s)$.

$$\vec{X}(s)(sI - A) = G(s)$$

Exemplo 1:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} \qquad \vec{X}(0) = 0$$

$(matriz\ A)$

- ✓ Cálculo de $G(s)$.

$$G(s) = \mathcal{L}\{\vec{g}(t)\} = \mathcal{L}\begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\{2e^{-t}\} \\ \mathcal{L}\{3t\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1} \\ \dfrac{3}{s^2} \end{bmatrix}$$

$(tabela)$

- ✓ Inserindo este resultado na expressão de $\vec{X}(s)$.

$$\vec{X}(s)(sI - A) = G(s) \quad \Rightarrow \quad \vec{X}(s) = (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1} \\ \dfrac{3}{s^2} \end{bmatrix}$$

Exemplo 1:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} \qquad \vec{X}(0) = 0$$

$$(matriz\ A)$$

- ✓ Cálculo de $G(s)$.

$$G(s) = \mathcal{L}\{\vec{g}(t)\} = \mathcal{L}\begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\{2e^{-t}\} \\ \mathcal{L}\{3t\} \end{bmatrix} \xrightarrow{(tabela)} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1} \\ \dfrac{3}{s^2} \end{bmatrix}$$

- ✓ Inserindo este resultado na expressão de $\vec{X}(s)$.

$$\vec{X}(s)(sI - A) = G(s) \quad \Rightarrow \quad \vec{X}(s) = (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1} \\ \dfrac{3}{s^2} \end{bmatrix}$$

- ✓ Cálculo da matriz inversa $(sI - A)^{-1}$.

$$(sI - A) = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} \qquad \vec{X}(0) = 0$$

$(matriz\ A)$

- ✓ Continuação da inversa.

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} \qquad \vec{X}(0) = 0$$

$(matriz\ A)$

- ✓ Continuação da inversa.

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} \Rightarrow (sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Exemplo 1:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} \qquad \vec{X}(0) = 0$$

$(matriz\ A)$

- ✓ Continuação da inversa.

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} \Rightarrow (sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+2)^2 - 1} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} \qquad \vec{X}(0) = 0$$

$(matriz\ A)$

- ✓ Continuação da inversa.

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+2)^2 - 1} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} \qquad \vec{X}(0) = 0$$

$(matriz\ A)$

- ✓ Continuação da inversa.

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} \Rightarrow (sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+2)^2 - 1} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{(s+1)(s+3)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+3)} & \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix}$$

chamada matriz de transferência

Exemplo 1:

- ✓ Inserir a inversa em $\vec{X}(s) = (sI - A)^{-1}\begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} \\ \frac{3}{s^2} \end{bmatrix}$.

Exemplo 1:

- ✓ Inserir a inversa em $\vec{X}(s) = (sI - A)^{-1}\begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} \\ \frac{3}{s^2} \end{bmatrix}$.

$$\vec{X}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+3)} \\ \dfrac{1}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{s+2}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1} \\ \dfrac{3}{s^2} \end{bmatrix}$$

Exemplo 1:

- ✓ Inserir a inversa em $\vec{X}(s) = (sI - A)^{-1}\begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} \\ \frac{3}{s^2} \end{bmatrix}$.

$$\vec{X}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+3)} \\ \dfrac{1}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{s+2}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1} \\ \dfrac{3}{s^2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{2(s+2)}{(s+1)^2(s+3)} + \dfrac{3}{s^2(s+1)(s+3)} \\ \dfrac{2}{(s+1)^2(s+3)} + \dfrac{3(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)} \end{bmatrix}$$

Exemplo 1:

- ✓ Inserir a inversa em $\vec{X}(s) = (sI - A)^{-1}\begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} \\ \frac{3}{s^2} \end{bmatrix}$.

$$\vec{X}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{(s+1)(s+3)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+3)} & \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} \\ \frac{3}{s^2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2(s+2)}{(s+1)^2(s+3)} + \frac{3}{s^2(s+1)(s+3)} \\ \frac{2}{(s+1)^2(s+3)} + \frac{3(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)} \end{bmatrix}$$

- ✓ Será necessário expandir os termos de $\vec{X}(s)$ em frações parciais.

Exemplo 1:

- ✓ Expansão em frações parciais do primeiro termo.

$$\frac{2(s+2)}{(s+1)^2\,(s+3)}=\frac{A}{(s+3)}+\frac{B}{(s+1)}+\frac{C}{(s+1)^2}$$

Exemplo 1:

- ✓ Expansão em frações parciais do **primeiro termo.**

$$\frac{2(s+2)}{(s+1)^2\,(s+3)} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

$$\frac{2(s+2)}{(s+1)^2\,(s+3)} = \frac{A(s+1)^2 + B(s+1)(s+3) + C(s+3)}{(s+3)(s+1)^2}$$

Exemplo 1:

- ✓ Expansão em frações parciais do **primeiro termo.**

$$\frac{2(s+2)}{(s+1)^2\,(s+3)} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

$$\frac{2(s+2)}{(s+1)^2\,(s+3)} = \frac{A(s+1)^2 + B(s+1)(s+3) + C(s+3)}{(s+3)(s+1)^2}$$

$$2(s+2) = A(s^2+2s+1) + B(s^2+4s+3) + C(s+3)$$

Exemplo 1:

- ✓ Expansão em frações parciais do primeiro termo.

$$\frac{2(s+2)}{(s+1)^2\,(s+3)} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

$$\frac{2(s+2)}{(s+1)^2\,(s+3)} = \frac{A(s+1)^2 + B(s+1)(s+3) + C(s+3)}{(s+3)(s+1)^2}$$

$$2(s+2) = A(s^2+2s+1) + B(s^2+4s+3) + C(s+3)$$

$$2s+4 = (A+B)s^2 + (2A+4B+C)s + (A+3B+3C)$$

Exemplo 1:

- ✓ Expansão em frações parciais do primeiro termo.

$$\frac{2(s+2)}{(s+1)^2\,(s+3)} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

$$\frac{2(s+2)}{(s+1)^2\,(s+3)} = \frac{A(s+1)^2 + B(s+1)(s+3) + C(s+3)}{(s+3)(s+1)^2}$$

$$2(s+2) = A(s^2+2s+1) + B(s^2+4s+3) + C(s+3)$$

$$2s+4 = (A+B)s^2 + (2A+4B+C)s + (A+3B+3C)$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+4B+C=2 \\ A+3B+3C=4 \end{cases}$$

Exemplo 1:

✓ Expansão em frações parciais do primeiro termo.

$$\frac{2(s+2)}{(s+1)^2(s+3)} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

$$\frac{2(s+2)}{(s+1)^2(s+3)} = \frac{A(s+1)^2 + B(s+1)(s+3) + C(s+3)}{(s+3)(s+1)^2}$$

$$2(s+2) = A(s^2+2s+1) + B(s^2+4s+3) + C(s+3)$$

$$2s+4 = (A+B)s^2 + (2A+4B+C)s + (A+3B+3C)$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{cases} A+B=0 \\ 2A+4B+C=2 \\ A+3B+3C=4 \end{cases}$$

Exemplo 1:

- ✓ Expansão em frações parciais do primeiro termo.

$$\frac{2(s+2)}{(s+1)^2\,(s+3)} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

$$\frac{2(s+2)}{(s+1)^2\,(s+3)} = \frac{A(s+1)^2 + B(s+1)(s+3) + C(s+3)}{(s+3)(s+1)^2}$$

$$2(s+2) = A(s^2+2s+1) + B(s^2+4s+3) + C(s+3)$$

$$2s+4 = (A+B)s^2 + (2A+4B+C)s + (A+3B+3C)$$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \begin{cases} A+B=0 \\ 2A+4B+C=2 \\ A+3B+3C=4 \end{cases}$$

$$eq.(2)-(3)$$

$$A+B-2C=-2$$

Exemplo 1:

- ✓ Expansão em frações parciais do primeiro termo.

$$\frac{2(s+2)}{(s+1)^2\,(s+3)} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

$$\frac{2(s+2)}{(s+1)^2\,(s+3)} = \frac{A(s+1)^2 + B(s+1)(s+3) + C(s+3)}{(s+3)(s+1)^2}$$

$$2(s+2) = A(s^2+2s+1) + B(s^2+4s+3) + C(s+3)$$

$$2s+4 = (A+B)s^2 + (2A+4B+C)s + (A+3B+3C)$$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \begin{cases} A+B=0 \\ 2A+4B+C=2 \\ A+3B+3C=4 \end{cases}$$

$eq.\,(2)-(3)$

$$\cancel{A+B}^{=0} - 2C = -2$$

$$\boxed{C=1}$$

Exemplo 1:

- ✓ Expansão em frações parciais do primeiro termo.

$$\frac{2(s+2)}{(s+1)^2\,(s+3)} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

$$\frac{2(s+2)}{(s+1)^2\,(s+3)} = \frac{A(s+1)^2 + B(s+1)(s+3) + C(s+3)}{(s+3)(s+1)^2}$$

$$2(s+2) = A(s^2+2s+1) + B(s^2+4s+3) + C(s+3)$$

$$2s+4 = (A+B)s^2 + (2A+4B+C)s + (A+3B+3C)$$

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\begin{cases}A+B=0\\2A+4B+C=2\\A+3B+3C=4\end{cases}$$

$eq.(2)-(3)$

$$\underbrace{\cancel{A+B}}_{=0} - 2C = -2$$

$\boxed{C=1}$ $\quad A=-B$

Exemplo 1:

- ✓ Expansão em frações parciais do primeiro termo.

$$\frac{2(s+2)}{(s+1)^2\,(s+3)} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

$$\frac{2(s+2)}{(s+1)^2\,(s+3)} = \frac{A(s+1)^2 + B(s+1)(s+3) + C(s+3)}{(s+3)(s+1)^2}$$

$$2(s+2) = A(s^2+2s+1) + B(s^2+4s+3) + C(s+3)$$

$$2s+4 = (A+B)s^2 + (2A+4B+C)s + (A+3B+3C)$$

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\begin{cases}A+B=0\\2A+4B+C=2\\A+3B+3C=4\end{cases}$$

$eq.(2)-(3)$

$$\underbrace{\cancel{A+B}}_{=0} - 2C = -2$$

$$\boxed{C=1} \qquad A=-B$$

$na\ eq.(2)$

$$-2B+4B+1=2$$

$$2B=1 \qquad \boxed{B=1/2}$$

Exemplo 1:

- ✓ Expansão em frações parciais do primeiro termo.

$$\frac{2(s+2)}{(s+1)^2\,(s+3)} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

$$\frac{2(s+2)}{(s+1)^2\,(s+3)} = \frac{A(s+1)^2 + B(s+1)(s+3) + C(s+3)}{(s+3)(s+1)^2}$$

$$2(s+2) = A(s^2+2s+1) + B(s^2+4s+3) + C(s+3)$$

$$2s+4 = (A+B)s^2 + (2A+4B+C)s + (A+3B+3C)$$

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\begin{cases}A+B=0\\2A+4B+C=2\\A+3B+3C=4\end{cases}$$

$eq.(2)-(3)$

$$\cancel{A+B}^{=0} - 2C = -2$$

$$\boxed{C=1} \quad A=-B$$

$na\ eq.(2)$

$$-2B+4B+1=2$$

$$2B=1 \quad \boxed{B=1/2}$$

$$\boxed{A=-1/2}$$

Exemplo 1:

- ✓ A expansão para o primeiro termo fica.

$$\frac{2(s+2)}{(s+1)^2(s+3)} = -\frac{1}{2(s+3)} + \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

Exemplo 1:

- ✓ A expansão para o primeiro termo fica.

$$\frac{2(s+2)}{(s+1)^2(s+3)} = -\frac{1}{2(s+3)} + \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

- ✓ As demais expansões seguem o mesmo processo, resultando em:

$$\frac{2}{(s+1)^2(s+3)} = \frac{1}{2(s+3)} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\frac{3}{s^2(s+1)(s+3)} = -\frac{1}{6(s+3)} + \frac{3}{2(s+1)} - \frac{4}{3s} + \frac{1}{s^2}$$

$$\frac{3(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)} = \frac{1}{6(s+3)} + \frac{3}{2(s+1)} - \frac{5}{3s} + \frac{2}{s^2}$$

✓ Somando os termos comuns na expressão de $\vec{X}(s)$.

$$\vec{X}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{2(s+2)}{(s+1)^2(s+3)} + \dfrac{3}{s^2(s+1)(s+3)} \\ \dfrac{2}{(s+1)^2(s+3)} + \dfrac{3(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)} \end{bmatrix}$$

✓ Somando os termos comuns na expressão de $\vec{X}(s)$.

$$\vec{X}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{2(s+2)}{(s+1)^2(s+3)} + \dfrac{3}{s^2(s+1)(s+3)} \\ \dfrac{2}{(s+1)^2(s+3)} + \dfrac{3(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}(s) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2(s+3)} + \dfrac{1}{2(s+1)} + \dfrac{1}{(s+1)^2} - \dfrac{1}{6(s+3)} + \dfrac{3}{2(s+1)} - \dfrac{4}{3s} + \dfrac{1}{s^2} \\ \dfrac{1}{2(s+3)} - \dfrac{1}{2(s+1)} + \dfrac{1}{(s+1)^2} + \dfrac{1}{6(s+3)} + \dfrac{3}{2(s+1)} - \dfrac{5}{3s} + \dfrac{2}{s^2} \end{bmatrix}$$

✓ Somando os termos comuns na expressão de $\vec{X}(s)$.

$$\vec{X}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{2(s+2)}{(s+1)^2(s+3)} + \dfrac{3}{s^2(s+1)(s+3)} \\ \dfrac{2}{(s+1)^2(s+3)} + \dfrac{3(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}(s) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2(s+3)} + \dfrac{1}{2(s+1)} + \dfrac{1}{(s+1)^2} - \dfrac{1}{6(s+3)} + \dfrac{3}{2(s+1)} - \dfrac{4}{3s} + \dfrac{1}{s^2} \\ \dfrac{1}{2(s+3)} - \dfrac{1}{2(s+1)} + \dfrac{1}{(s+1)^2} + \dfrac{1}{6(s+3)} + \dfrac{3}{2(s+1)} - \dfrac{5}{3s} + \dfrac{2}{s^2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}(s) = \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{3(s+3)} + \dfrac{2}{(s+1)} + \dfrac{1}{(s+1)^2} - \dfrac{4}{3s} + \dfrac{1}{s^2} \\ \dfrac{2}{3(s+3)} + \dfrac{1}{(s+1)} + \dfrac{1}{(s+1)^2} - \dfrac{5}{3s} + \dfrac{2}{s^2} \end{bmatrix}$$

✓ Separando $\vec{X}(s)$ em uma soma de matrizes.

$$\vec{X}(s) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3(s+3)} + \frac{2}{(s+1)} + \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{4}{3s} + \frac{1}{s^2} \\ \frac{2}{3(s+3)} + \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{5}{3s} + \frac{2}{s^2} \end{bmatrix}$$

✓ Separando $\vec{X}(s)$ em uma soma de matrizes.

$$\vec{X}(s)=\begin{bmatrix} -\dfrac{2}{3(s+3)}+\dfrac{2}{(s+1)}+\dfrac{1}{(s+1)^2}-\dfrac{4}{3s}+\dfrac{1}{s^2} \\ \dfrac{2}{3(s+3)}+\dfrac{1}{(s+1)}+\dfrac{1}{(s+1)^2}-\dfrac{5}{3s}+\dfrac{2}{s^2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}(s)=\frac{2}{3}\begin{bmatrix} \dfrac{-1}{s+3} \\ \dfrac{1}{s+3} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1} \\ \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)^2} \\ \dfrac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} \dfrac{4}{s} \\ \dfrac{5}{s} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s^2} \\ \dfrac{2}{s^2} \end{bmatrix}$$

✓ Separando $\vec{X}(s)$ em uma soma de matrizes.

$$\vec{X}(s)=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3(s+3)}+\frac{2}{(s+1)}+\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{4}{3s}+\frac{1}{s^2}\\ \frac{2}{3(s+3)}+\frac{1}{(s+1)}+\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{5}{3s}+\frac{2}{s^2}\end{bmatrix}$$

$$\vec{X}(s)=\frac{2}{3}\begin{bmatrix}\frac{-1}{s+3}\\ \frac{1}{s+3}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{2}{s+1}\\ \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)^2}\\ \frac{1}{(s+1)^2}\end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}\frac{4}{s}\\ \frac{5}{s}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{s^2}\\ \frac{2}{s^2}\end{bmatrix}$$

$$\vec{X}(s)=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\frac{1}{s+3}+\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\frac{1}{s+1}+\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}\frac{1}{s}+\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\frac{1}{s^2}$$

✓ Separando $\vec{X}(s)$ em uma soma de matrizes.

$$\vec{X}(s) = \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{3(s+3)} + \dfrac{2}{(s+1)} + \dfrac{1}{(s+1)^2} - \dfrac{4}{3s} + \dfrac{1}{s^2} \\ \dfrac{2}{3(s+3)} + \dfrac{1}{(s+1)} + \dfrac{1}{(s+1)^2} - \dfrac{5}{3s} + \dfrac{2}{s^2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}(s) = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} \dfrac{-1}{s+3} \\ \dfrac{1}{s+3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1} \\ \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)^2} \\ \dfrac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \dfrac{4}{s} \\ \dfrac{5}{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s^2} \\ \dfrac{2}{s^2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}(s) = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{s+3} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{s+1} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}\frac{1}{s} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\frac{1}{s^2}$$

✓ Aplica-se $\mathcal{L}^{-1}\{\vec{X}(s)\}$ termo a termo e por meio de uma tabela de transformadas obtém-se $\vec{X}(t)$.

Exemplo 1:

- ✓ Solução final do PVI.

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}(0) = 0$$

Exemplo 1:

- ✓ Solução final do PVI.

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}(0) = 0$$

$$\vec{X}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\vec{X}(s)\}$$

Exemplo 1:

- ✓ Solução final do PVI.

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}(0) = 0$$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$ $\quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ $\quad s > a$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $\quad s > 0$
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ $\quad s > a$

$$\vec{X}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\vec{X}(s)\}$$

$$\vec{X}(s) = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{s+3} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{s+1} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}\frac{1}{s} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\frac{1}{s^2}$$

Exemplo 1:

- ✓ Solução final do PVI.

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}(0) = 0$$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$ $\quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ $\quad s > a$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $\quad s > 0$
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ $\quad s > a$

$$\vec{X}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\vec{X}(s)\}$$

$$\vec{X}(s) = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{s+3} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{s+1} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \frac{1}{s} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{s^2}$$

$$\vec{X}(t) = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t$$

Exercício

Exercício: Resolver o PVI de eq. dif. pelo método da Transformada de Laplace.

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t} \qquad \vec{X}(0) = 0$$

- ✓ Utilizar um software para encontrar frações parciais.

Para depois desta aula:

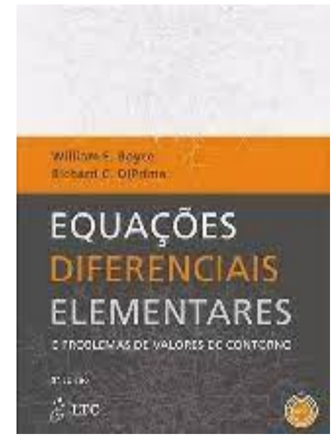
- Estudar seções 7.9 do livro texto (Boyce).
- Resolver o exercício proposto.
- Praticar: exercícios da seções 7.9 do Boyce.

Próxima aula:

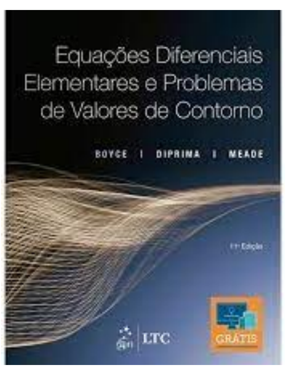
- Equações diferenciais parciais.

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.



Numeração dos exercícios com base na 9ª ed.



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2020.