Equações diferenciais

Equações diferenciais parciais

Aula 01

Problemas de valores de contorno e série de Fourier

Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

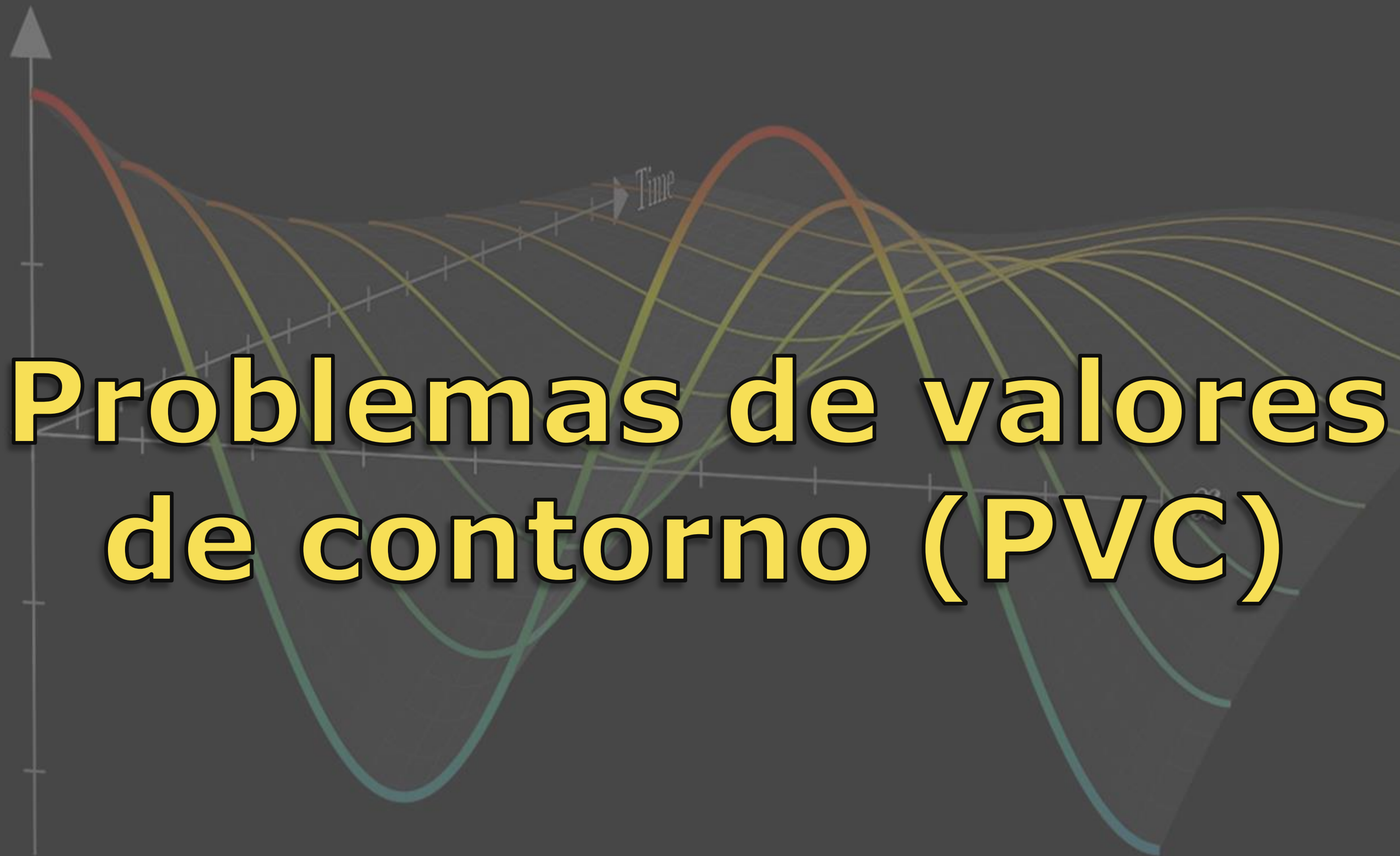
Tópicos desta aula

1. Problemas de valores de contorno (PVC).
2. Exemplo.
3. Séries de Fourier.
4. Exemplo.

Pré-requisitos

- Integração de funções trigonométricas.

Problemas de valores de contorno (PVC)



Problemas de valores de contorno (PVC)

- Inicialmente, serão consideradas as eq. dif. de 2ª ordem.

- Um problema de valor de contorno (PVC) de 2ª ordem contém uma eq. dif. e dois valores no intervalo.

Problemas de valores de contorno (PVC)

- Inicialmente, serão consideradas as eq. dif. de 2ª ordem.

- Um problema de valor de contorno (PVC) de 2ª ordem contém uma eq. dif. e dois valores no intervalo.

- Dois valores da variável independente podem definir dois valores da variável dependente ou dois valores das derivadas. Por exemplo,

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \qquad (1)$$

$$y(\alpha) = y_0 \quad \text{e} \quad y(\beta) = y_1$$

Problemas de valores de contorno

- Para resolver o sistema (1) é necessário encontrar uma função y que satisfaça a eq. dif. no intervalo $\alpha < t < \beta$ e os valores de y_0 e y_1.

Problemas de valores de contorno

- Para resolver o sistema (1) é necessário encontrar uma função y que satisfaça a eq. dif. no intervalo $\alpha < t < \beta$ e os valores de y_0 e y_1.
- Diferença entre um PVI e um PVC:
  - PVI – apresenta solução única.

Problemas de valores de contorno

- Para resolver o sistema (1) é necessário encontrar uma função y que satisfaça a eq. dif. no intervalo $\alpha < t < \beta$ e os valores de y_0 e y_1.
- Diferença entre um PVI e um PVC:
  - PVI – apresenta solução única.
  - PVC – Pode ter: solução única,
    não ter solução,
    ter infinitas soluções.

Problemas de valores de contorno

- Para resolver o sistema (1) é necessário encontrar uma função y que satisfaça a eq. dif. no intervalo $\alpha < t < \beta$ e os valores de y_0 e y_1.
- Diferença entre um PVI e um PVC:
  - PVI – apresenta solução única.
  - PVC – Pode ter: solução única,
não ter solução,
ter infinitas soluções.
- A resolução de PVCs lineares é semelhante à resolução de eq. dif. lineares.

Exemplo de PVC

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVC.

$$y'' + y = 0 \qquad\qquad y(0) = 0 \ \text{ e } \ y(\pi) = 0$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVC.

$$y'' + y = 0 \qquad\qquad y(0) = 0 \ \text{ e } \ y(\pi) = 0$$

✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \ \Rightarrow \quad y' = re^{rt} \quad \Rightarrow \quad y'' = r^2e^{rt}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVC.

$$y'' + y = 0 \qquad\qquad y(0) = 0 \;\; \text{e} \;\; y(\pi) = 0$$

- ✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \;\Rightarrow\; y' = re^{rt} \;\Rightarrow\; y'' = r^2 e^{rt}$$

- ✓ Substituir a proposta na eq. dif. de 2ª ordem.

$$r^2 e^{rt} + e^{rt} = 0$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVC.

$$y'' + y = 0 \qquad\qquad y(0) = 0 \ \text{ e } \ y(\pi) = 0$$

- ✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \ \Rightarrow \quad y' = re^{rt} \quad \Rightarrow \quad y'' = r^2 e^{rt}$$

- ✓ Substituir a proposta na eq. dif. de 2ª ordem.

$$r^2 e^{rt} + e^{rt} = 0 \qquad\qquad \text{mas, } e^{rt} \neq 0 \ \ \forall \ t$$

$$r^2 + 1 = 0$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVC.

$$y'' + y = 0 \qquad\qquad y(0) = 0 \ \text{ e } \ y(\pi) = 0$$

✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \;\Rightarrow\; y' = re^{rt} \;\Rightarrow\; y'' = r^2 e^{rt}$$

✓ Substituir a proposta na eq. dif. de 2ª ordem.

$$r^2 e^{rt} + e^{rt} = 0 \qquad\qquad \text{mas, } e^{rt} \neq 0 \ \ \forall \ t$$

$$r^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; r^2 = -1$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVC.

$$y'' + y = 0 \qquad\qquad y(0) = 0 \ \text{ e } \ y(\pi) = 0$$

✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \ \Rightarrow \ y' = re^{rt} \ \Rightarrow \ y'' = r^2e^{rt}$$

✓ Substituir a proposta na eq. dif. de 2ª ordem.

$$r^2e^{rt} + e^{rt} = 0 \qquad\qquad \text{mas, } e^{rt} \neq 0 \ \ \forall \ t$$

$$r^2 + 1 = 0 \ \Rightarrow \ r^2 = -1 \ \Rightarrow \ r_1 = -i \ \text{ e } \ r_2 = i$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVC.

$$y'' + y = 0 \qquad\qquad y(0) = 0 \;\text{ e }\; y(\pi) = 0$$

✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \;\Rightarrow\; y' = re^{rt} \;\Rightarrow\; y'' = r^2e^{rt}$$

✓ Substituir a proposta na eq. dif. de 2ª ordem.

$$r^2e^{rt} + e^{rt} = 0 \qquad\qquad \text{mas, } e^{rt} \neq 0 \;\;\forall\; t$$

$$r^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; r^2 = -1 \;\Rightarrow\; r_1 = -i \;\text{ e }\; r_2 = i$$

$$y_1 = e^{-it} \;\text{ e }\; y_2 = e^{it}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVC.

$$y'' + y = 0 \qquad\qquad y(0) = 0 \text{ e } y(\pi) = 0$$

- ✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \Rightarrow \quad y' = re^{rt} \quad \Rightarrow \quad y'' = r^2 e^{rt}$$

- ✓ Substituir a proposta na eq. dif. de 2ª ordem.

$$r^2 e^{rt} + e^{rt} = 0 \qquad\qquad \text{mas, } e^{rt} \neq 0 \quad \forall \ t$$

$$r^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 = -1 \Rightarrow \quad r_1 = -i \text{ e } r_2 = i$$

$$y_1 = e^{-it} \text{ e } \quad y_2 = e^{it} \quad \Rightarrow \quad e^{\pm it} = cost \pm isent$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVC.

$$y'' + y = 0 \qquad\qquad y(0) = 0 \ \text{ e } \ y(\pi) = 0$$

✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \;\Rightarrow\; y' = re^{rt} \;\Rightarrow\; y'' = r^2 e^{rt}$$

✓ Substituir a proposta na eq. dif. de 2ª ordem.

$$r^2 e^{rt} + e^{rt} = 0 \qquad\qquad \text{mas, } e^{rt} \neq 0 \ \ \forall \ t$$

$$r^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; r^2 = -1 \;\Rightarrow\; r_1 = -i \ \text{ e } \ r_2 = i$$

$$y_1 = e^{-it} \text{ e } \ y_2 = e^{it} \;\Rightarrow\; e^{\pm it} = cost \pm isent$$

$$\boxed{y = C_1 cost + C_2 sent}$$

Solução geral da eq. dif.

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVC.

- ✓ Inserir as condições de contorno:

p/ $y(0) = 0$ $\quad y(0) = 0 = C_1 cos0 + C_2 sen0$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVC.

✓ Inserir as condições de contorno:

p/ $y(0) = 0$ $\quad y(0) = 0 = C_1 cos0 + C_2 sen0$ $\quad \boxed{C_1 = 0}$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVC.

- ✓ Inserir as condições de contorno:

p/ $y(0) = 0$ $\quad y(0) = 0 = C_1 cos0 + C_2 sen0$ $\quad \boxed{C_1 = 0}$

p/ $y(\pi) = 0$ $\quad y(\pi) = 0 = C_1 cos\pi + C_2 sen\pi$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVC.

- ✓ Inserir as condições de contorno:

p/ $y(0) = 0$ $\quad y(0) = 0 = C_1 cos0 + C_2 sen0$ $\quad \boxed{C_1 = 0}$

p/ $y(\pi) = 0$ $\quad y(\pi) = 0 = C_1 cos\pi + C_2 sen\pi$ $\quad \boxed{sen\pi = 0}$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVC.

- ✓ Inserir as condições de contorno:

p/ $y(0) = 0$ $\qquad y(0) = 0 = C_1 cos0 + C_2 sen0$ $\qquad \boxed{C_1 = 0}$

p/ $y(\pi) = 0$ $\qquad y(\pi) = 0 = C_1 cos\pi + C_2 sen\pi$ $\qquad \boxed{sen\pi = 0}$

- ✓ A segunda condição implica que o seno de π deverá ser nulo, independentemente de C_2.

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVC.

- ✓ Inserir as condições de contorno:

p/ $y(0) = 0$ $\quad y(0) = 0 = C_1 cos0 + C_2 sen0$ $\quad \boxed{C_1 = 0}$

p/ $y(\pi) = 0$ $\quad y(\pi) = 0 = C_1 cos\pi + C_2 sen\pi$ $\quad \boxed{sen\pi = 0}$

- ✓ A segunda condição implica que o seno de π deverá ser nulo, independentemente de C_2.

- ✓ Logo, a solução sistema é: $\boxed{y = C_2 sent}$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVC.

- ✓ Inserir as condições de contorno:

p/ $y(0) = 0$ $\quad y(0) = 0 = C_1 cos0 + C_2 sen0$ $\quad C_1 = 0$

p/ $y(\pi) = 0$ $\quad y(\pi) = 0 = C_1 cos\pi + C_2 sen\pi$ $\quad sen\pi = 0$

- ✓ A segunda condição implica que o seno de π deverá ser nulo, independentemente de C_2.
- ✓ Logo, a solução sistema é: $y = C_2 sent$
- ✓ A constante C_2 permanecerá arbitrária.

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVC.

- ✓ Inserir as condições de contorno:

p/ $y(0) = 0$ $\quad y(0) = 0 = C_1 cos0 + C_2 sen0$ $\quad C_1 = 0$

p/ $y(\pi) = 0$ $\quad y(\pi) = 0 = C_1 cos\pi + C_2 sen\pi$ $\quad sen\pi = 0$

- ✓ A segunda condição implica que o seno de π deverá ser nulo, independentemente de C_2.
- ✓ Logo, a solução sistema é: $y = C_2 sent$
- ✓ A constante C_2 permanecerá arbitrária.
- ✓ Este caso chama atenção pois apresenta infinitas soluções.

Problemas de valores de contorno

- A forma mais geral do PVC do exemplo 1 é:

$$y'' + \mu^2 y = 0 \qquad y(0) = 0 \text{ e } y(L) = 0$$

Problemas de valores de contorno

- A forma mais geral do PVC do exemplo 1 é:

$$y'' + \mu^2 y = 0 \qquad y(0) = 0 \ \text{ e } \ y(L) = 0$$

- A segunda condição de contorno é imposta em um ponto arbitrário $t = L$.

Problemas de valores de contorno

- A forma mais geral do PVC do exemplo 1 é:

$$y'' + \mu^2 y = 0 \qquad y(0) = 0 \text{ e } y(L) = 0$$

- A segunda condição de contorno é imposta em um ponto arbitrário $t = L$.
- Para esse caso mais geral, a segunda condição requer que:

$$C_2 sen\mu L = 0$$

Problemas de valores de contorno

- A forma mais geral do PVC do exemplo 1 é:

$$y'' + \mu^2 y = 0 \qquad y(0) = 0 \ \text{ e } \ y(L) = 0$$

- A segunda condição de contorno é imposta em um ponto arbitrário $t = L$.
- Para esse caso mais geral, a segunda condição requer que:

$$C_2 sen\mu L = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu L = n\pi$$

Problemas de valores de contorno

- A forma mais geral do PVC do exemplo 1 é:

$$y'' + \mu^2 y = 0 \qquad y(0) = 0 \text{ e } y(L) = 0$$

- A segunda condição de contorno é imposta em um ponto arbitrário $t = L$.
- Para esse caso mais geral, a segunda condição requer que:

$$C_2 sen\mu L = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu L = n\pi \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{n\pi}{L} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

Problemas de valores de contorno

- A forma mais geral do PVC do exemplo 1 é:

$$y'' + \mu^2 y = 0 \qquad y(0) = 0 \ \text{ e } \ y(L) = 0$$

- A segunda condição de contorno é imposta em um ponto arbitrário $t = L$.
- Para esse caso mais geral, a segunda condição requer que:

$$C_2 sen\mu L = 0 \ \Rightarrow \ \mu L = n\pi \ \Rightarrow \ \mu = \frac{n\pi}{L} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

- Assim, a solução do PVC é dada por:

$$y_n(t) = sen\frac{n\pi}{L}t$$

Problemas de valores de contorno

- Será necessário formar uma combinação linear de funções.
- Porém, existe uma infinidade de funções.

Problemas de valores de contorno

- Será necessário formar uma combinação linear de funções.
- Porém, existe uma infinidade de funções.
- Assim, a combinação é uma série infinita de funções trigonométricas da forma:

$$y_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \, sen \frac{n\pi}{L} t$$

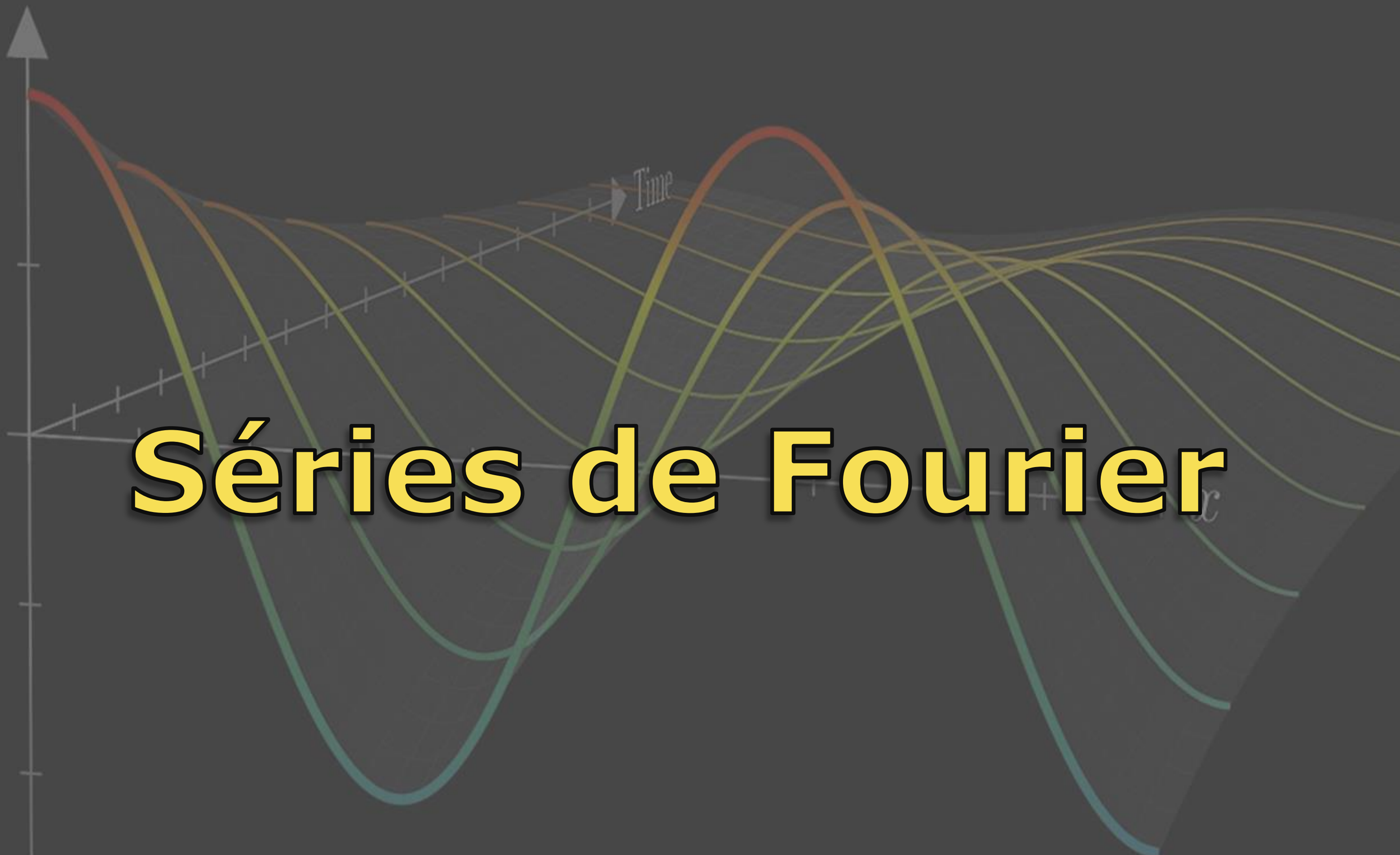
Problemas de valores de contorno

- Será necessário formar uma combinação linear de funções.
- Porém, existe uma infinidade de funções.
- Assim, a combinação é uma série infinita de funções trigonométricas da forma:

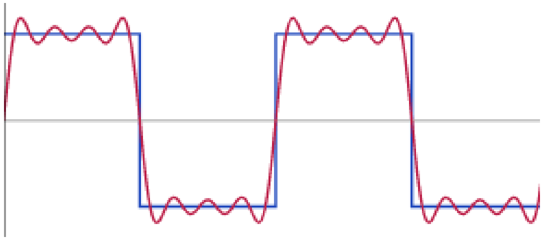
$$y_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \, sen \frac{n\pi}{L} t$$

- Esta série é conhecida como série de Fourier da função seno cujas características serão estudadas a seguir.

Séries de Fourier

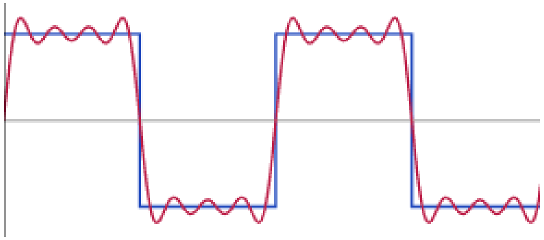


Séries de Fourier



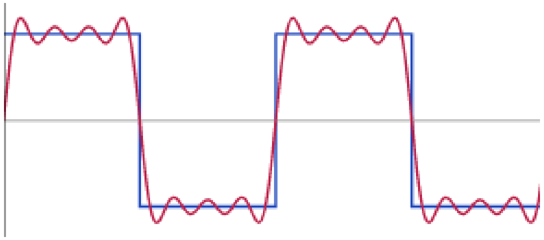
- Séries de Fourier expressam muitas funções como uma série de senos e cossenos.

Séries de Fourier



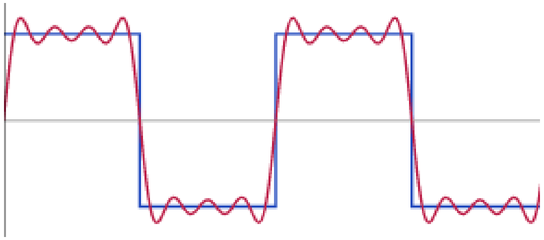
- Séries de Fourier expressam muitas funções como uma série de senos e cossenos.
- Algumas propriedades com periodicidade e ortogonalidade são relevantes para defini-la.

Séries de Fourier



- Séries de Fourier expressam muitas funções como uma série de senos e cossenos.
- Algumas propriedades com periodicidade e ortogonalidade são relevantes para defini-la.
- As séries de Fourier foram criadas em 1807 por Jean Fourier para o estudo de transferência de calor.

Séries de Fourier



- Séries de Fourier expressam muitas funções como uma série de senos e cossenos.
- Algumas propriedades com periodicidade e ortogonalidade são relevantes para defini-la.
- As séries de Fourier foram criadas em 1807 por Jean Fourier para o estudo de transferência de calor.
- Atualmente, elas são usadas em análise de vibrações, acústica, óptica, processamento de sinais, processamento de imagens e econometria.

1- Periodicidade de funções

- Uma função f é periódica, com período $T > 0$, se $f(x+T) = f(x)$.
- Qualquer múltiplo de T também será o período.

1- Periodicidade de funções

- Uma função f é periódica, com período $T > 0$, se $f(x+T) = f(x)$.
- Qualquer múltiplo de T também será o período.
- Se f e g são funções periódicas de período T, então:

  fg é periódica; $C_1 f + C_2 g$ também é periódica.

1- Periodicidade de funções

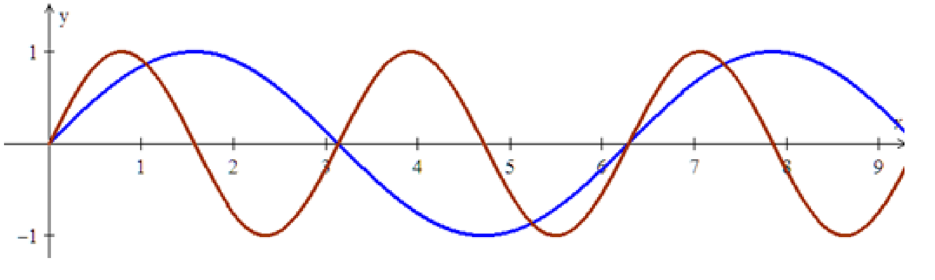
- Uma função f é periódica, com período $T > 0$, se $f(x+T) = f(x)$.
- Qualquer múltiplo de T também será o período.
- Se f e g são funções periódicas de período T, então:

  fg é periódica; $C_1 f + C_2 g$ também é periódica.

Exemplos

$f = senx$

$g = sen2x$



1- Periodicidade de funções

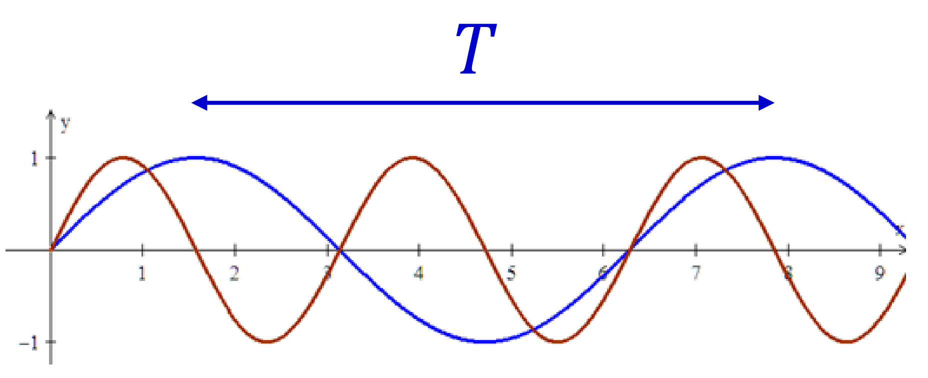
- Uma função f é periódica, com período $T > 0$, se $f(x+T) = f(x)$.
- Qualquer múltiplo de T também será o período.
- Se f e g são funções periódicas de período T, então:

  fg é periódica; $C_1 f + C_2 g$ também é periódica.

Exemplos

$f = senx \quad T = 2\pi$

$g = sen2x$



1- Periodicidade de funções

- Uma função f é periódica, com período $T > 0$, se $f(x+T) = f(x)$.

- Qualquer múltiplo de T também será o período.

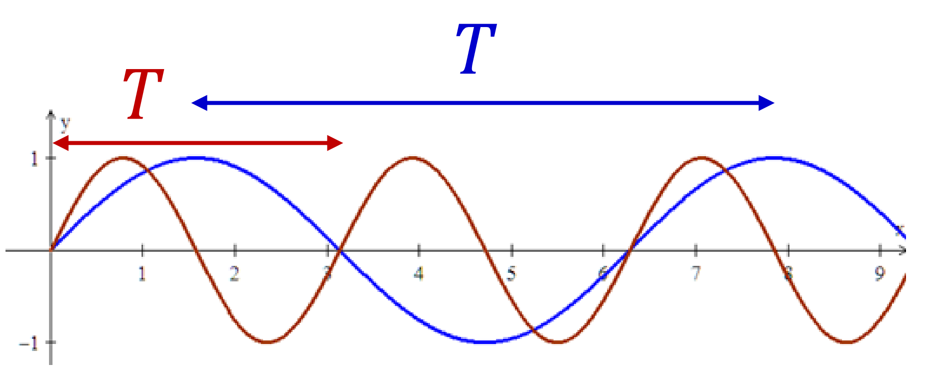
- Se f e g são funções periódicas de período T, então:

  fg é periódica; $C_1 f + C_2 g$ também é periódica.

Exemplos

$f = senx \quad T = 2\pi$

$g = sen2x \quad T = \pi$



2- Ortogonalidade de funções

- Duas funções f e g são ortogonais se o produto interno entre elas $< f, g > = 0$.
- O produto escalar da geometria é um caso particular do produto interno de funções.

2- Ortogonalidade de funções

- Duas funções f e g são ortogonais se o produto interno entre elas $< f, g > = 0$.
- O produto escalar da geometria é um caso particular do produto interno de funções.
- O produto interno de funções é representado por uma integral:

$$< f, g > = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

2- Ortogonalidade de funções

- Duas funções f e g são ortogonais se o produto interno entre elas $< f, g > = 0$.
- O produto escalar da geometria é um caso particular do produto interno de funções.
- O produto interno de funções é representado por uma integral:

$$< f, g > = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

- Caso o resultado da integral seja nulo, as funções f e g serão ortogonais entre si (seus vetores aproximação são ortogonais).

2- Ortogonalidade de funções

- Propriedades de ortogonalidade do seno e cosseno.

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)\cos(mx)dx = 0 \qquad \forall\ n,m > 0\ \ inteiros$$

2- Ortogonalidade de funções

- Propriedades de ortogonalidade do seno e cosseno.

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)\cos(mx)dx = 0 \qquad \forall\ n,m > 0\ \ inteiros$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)\cos(mx)dx = \begin{cases} 0 & se\,n \neq m \\ \pi & se\,n = m \end{cases}$$

2- Ortogonalidade de funções

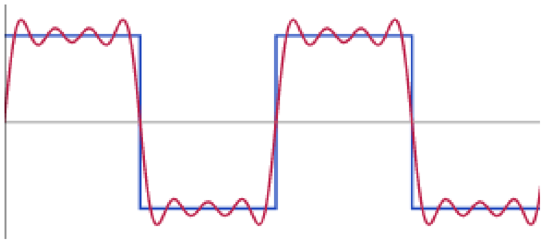
- Propriedades de ortogonalidade do seno e cosseno.

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)\cos(mx)dx = 0 \qquad \forall\ n, m > 0\ \ inteiros$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)\cos(mx)dx = \begin{cases} 0 & se\, n \neq m \\ \pi & se\, n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)\mathrm{sen}(mx)dx = \begin{cases} 0 & se\, n \neq m \\ \pi & se\, n = m \end{cases}$$

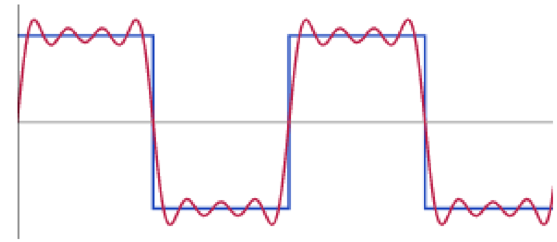
Séries de Fourier



- A maiorias das funções podem ser representadas por uma série de Fourier da forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

Séries de Fourier

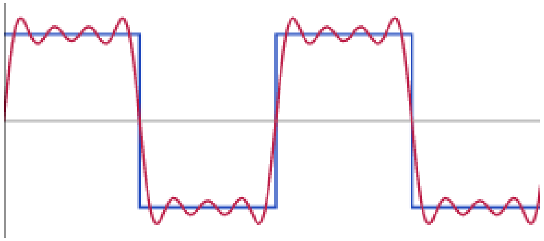


- A maiorias das funções podem ser representadas por uma série de Fourier da forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

- Esta série converge no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$.

Séries de Fourier



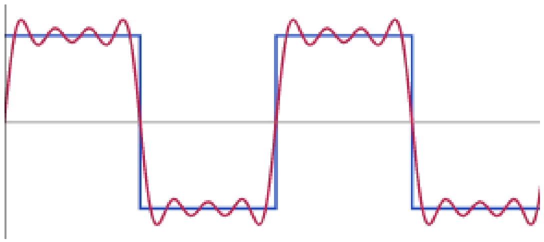
- A maiorias das funções podem ser representadas por uma série de Fourier da forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

- Esta série converge no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$.

- Como as funções seno e cosseno são periódicas a série irá convergir para todo x.

Séries de Fourier



- A maiorias das funções podem ser representadas por uma série de Fourier da forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

- Esta série converge no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$.

- Como as funções seno e cosseno são periódicas a série irá convergir para todo x.

- A propriedade da ortogonalidade permite o cálculo dos coeficientes a_0, a_n e b_n.

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_0

- ✓ Integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx\right)$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_0

- ✓ Integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx}_{=\,0} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx}_{=\,0}\right)$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_0

✓ Integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx}_{=0} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx}_{=0}\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_0

✓ Integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \overbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx}}^{=\,0} + b_n \overbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\, dx}}^{=\,0}\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx \quad \Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\,2\pi$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_0

✓ Integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx}_{=0} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx}_{=0}\Big)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx \quad \Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_0

✓ Integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \underbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx}}_{=0} + b_n \underbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\, dx}}_{=0}\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx \quad \Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_n

- ✓ Multiplica-se a série por $cosmx$ (m inteiro) e integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosmx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_o}{2} cosmxdx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} cosmx \cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} cosmx \operatorname{sen} nx\, dx\right)$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_n

✓ Multiplica-se a série por $cosmx$ (m inteiro) e integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosmx\, dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_o}{2} cosmxdx}_{=0} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} cosmx \cos nxdx + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} cosmx \operatorname{sen} nx\, dx}_{=0}\right)$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_n

- ✓ Multiplica-se a série por $cosmx$ (m inteiro) e integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, cosmx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_o}{2} \underbrace{\cancel{cosmxdx}}_{=0} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} cosmx \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cancel{cosmx \operatorname{sen} nx\, dx}}_{=0}\right)$$

- ✓ O inteiro m é fixo, e o inteiro n varia na série.
- ✓ Então, a única integral que não se anula do lado direito é a do duplo cosseno quando $m = n$.

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_n $(m = n)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos nx \, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} cos^2 nx \, dx$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_n $(m = n)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos nx \, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} cos^2 nx \, dx$$

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos 2nx) \, dx$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_n $(m = n)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnx\,dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} cos^2nx\,dx$$

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2nx)\,dx$$

$$= a_n \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} cos2nxdx\right]$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_n $(m = n)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx$$

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2nx\right) dx$$

$$= a_n \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cancel{\cos 2nx dx}^{\,= 0}\right]$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_n $(m = n)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx$$

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2nx\right) dx$$

$$= a_n \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\,dx + \frac{1}{2}\underbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx\,dx}}_{=0}\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \pi a_n$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_n $(m = n)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos nx\, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} cos^2 nx\, dx$$

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos 2nx)\, dx$$

$$= a_n \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\, dx + \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cancel{cos 2nx dx}}_{= 0} \right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos nx\, dx = \pi a_n \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos nx\, dx}$$

Séries de Fourier

Cálculo do coeficiente a_n $(m = n)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosnx\, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} cos^2nx\, dx$$

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos2nx\right) dx$$

$$= a_n \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\, dx + \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cancel{cos2nxdx}}_{= 0} \right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosnx\, dx = \pi a_n \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosnx\, dx}$$

- ✓ O b_n é obtido multiplicando-se a série por $senmx$.

Série de Fourier de uma função

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen\, nx\, dx$$

Série de Fourier de uma função

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen\, nx\, dx$$

- Para um intervalo mais geral L.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) sen \frac{n\pi x}{L} dx$$

Exemplo

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \qquad\qquad x \in [-\pi, \pi]$$

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \qquad\qquad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes a_o e a_n.

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes a_o e a_n.

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \qquad\qquad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes a_o e a_n.

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} \Rightarrow \quad \boxed{a_o = 0}$$

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes a_o e a_n.

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_o = 0}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$

✓ Cálculo dos coeficientes a_o e a_n.

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_o = 0}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx$$

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes a_o e a_n.

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_o = 0}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx\,dx$$

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes a_o e a_n.

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \Rightarrow a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} \Rightarrow \boxed{a_o = 0}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n} sen\,nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}\,nx\,dx$$

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes a_o e a_n.

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \;\Rightarrow\; a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} \;\Rightarrow\; \boxed{a_o = 0}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \;\Rightarrow\; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx \;\Rightarrow\; a_n = \frac{1}{\pi}\overbrace{\left[\cancel{\frac{x}{n}\,\text{sen}\,nx}\right]_{-\pi}^{\pi}}^{=\,0} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\,nx\,dx$$

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes a_o e a_n.

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_o = 0}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx\,dx \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi}\overbrace{\cancel{\left[\frac{x}{n}\operatorname{sen} nx\right]_{-\pi}^{\pi}}}^{=\,0} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx$$

$$a_n = -\frac{1}{n\pi}\left[\frac{1}{n} cos\, nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes a_o e a_n.

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_o = 0}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi}\underbrace{\cancel{\left[\frac{x}{n}\operatorname{sen} nx\right]_{-\pi}^{\pi}}}_{=0} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx$$

$$a_n = -\frac{1}{n\pi}\underbrace{\cancel{\left[\frac{1}{n} cos\, nx\right]_{-\pi}^{\pi}}}_{=0}$$

Exemplo 2: Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes a_o e a_n.

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_o = 0}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx\,dx \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi}\underbrace{\cancel{\left[\frac{x}{n}\operatorname{sen} nx\right]_{-\pi}^{\pi}}}_{=0} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx$$

$$a_n = -\frac{1}{n\pi}\underbrace{\cancel{\left[\frac{1}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi}}}_{=0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_n = 0}$$

Exemplo 2: $f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$

- ✓ Cálculo dos coeficientes b_n.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen \frac{n\pi x}{L} dx$$

Exemplo 2: $f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$

✓ Cálculo dos coeficientes b_n.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen \frac{n\pi x}{L} dx \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \, sen \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

Exemplo 2: $f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$

- ✓ Cálculo dos coeficientes b_n.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen \frac{n\pi x}{L} dx \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, sen \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx$$

Exemplo 2: $f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$

- ✓ Cálculo dos coeficientes b_n.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen \frac{n\pi x}{L} dx \qquad \Rightarrow \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, sen \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx \;\Rightarrow\; b_n = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n} cos\, nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -\cos nx\, dx$$

Exemplo 2: $f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$

✓ Cálculo dos coeficientes b_n.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen \frac{n\pi x}{L} dx \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, sen \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx \;\Rightarrow\; b_n = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n} cos\, nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} - \overset{=0}{\cancel{\cos nx\, dx}}$$

Exemplo 2: $f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$

✓ Cálculo dos coeficientes b_n.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen\frac{n\pi x}{L}dx \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, sen\frac{n\pi x}{\pi}dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{sen}\,nx\,dx \Rightarrow b_n = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}cos\,nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} -\cancel{\cos nx\,dx}}_{=0}$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}[\pi cos n\pi - (-\pi) cos n(-\pi)]$$

Exemplo 2: $f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$

- ✓ Cálculo dos coeficientes b_n.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen \frac{n\pi x}{L} dx \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \, sen \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx \Rightarrow b_n = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n} cos \, nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} - \cancel{\cos nx \, dx}}_{=0}$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}[\pi cos n\pi - (-\pi) cos n(-\pi)] = -\frac{\pi}{n\pi} 2\cos n\pi$$

Exemplo 2: $f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$

- ✓ Cálculo dos coeficientes b_n.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen\frac{n\pi x}{L}dx \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, sen\frac{n\pi x}{\pi}dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx \Rightarrow b_n = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}cos\, nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -\cancel{\cos nx\, dx} = 0$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}[\pi cos n\pi - (-\pi) cos n(-\pi)] = -\frac{\pi}{n\pi} 2\cos n\pi \qquad \boxed{b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n}$$

Exemplo 2: $f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$

- ✓ Cálculo dos coeficientes b_n.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen\frac{n\pi x}{L}dx \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, sen\frac{n\pi x}{\pi}dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{sen}\,nx\,dx \;\Rightarrow\; b_n = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}cos\,nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} -\cos nx\,dx}_{=0}$$

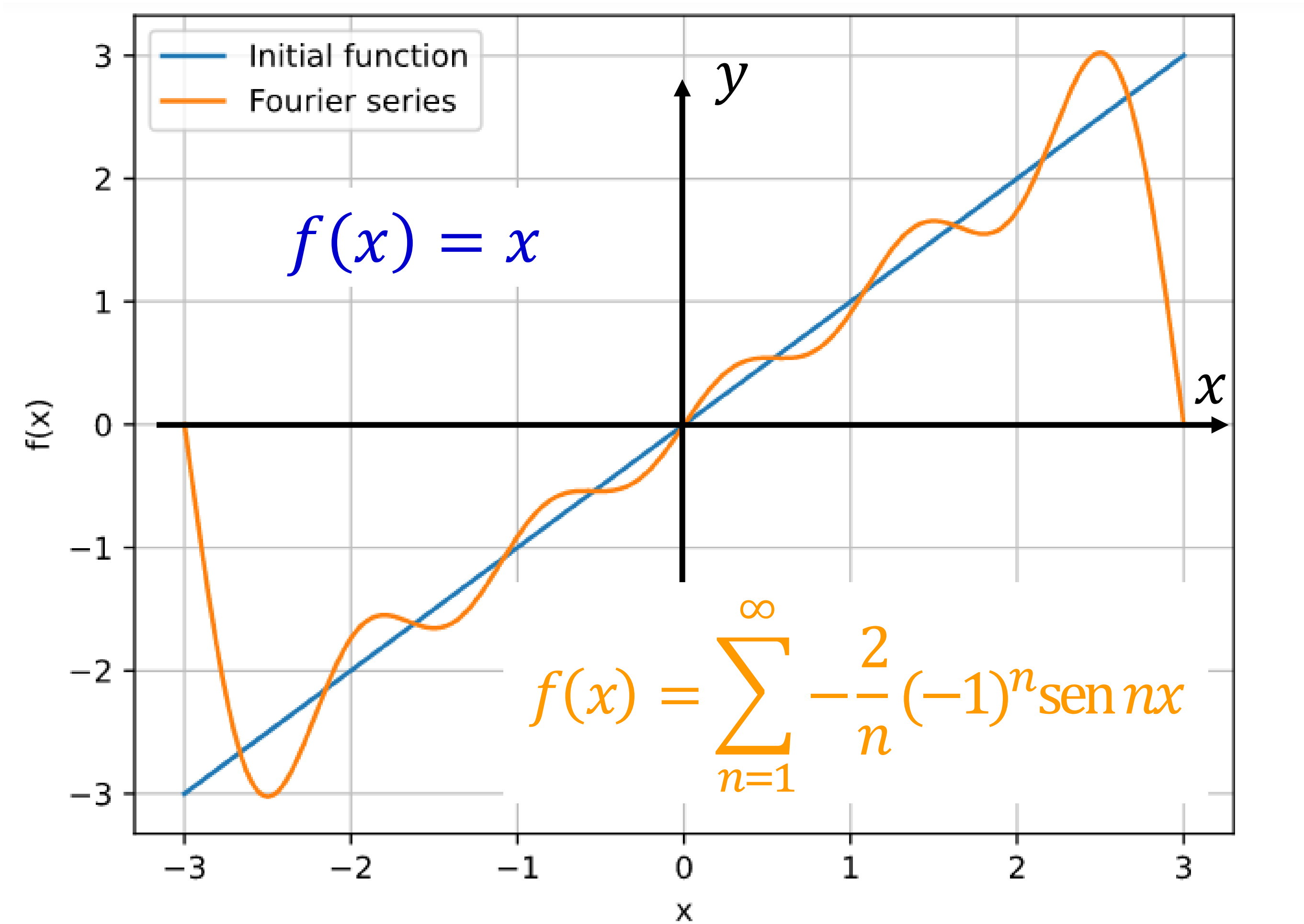
$$b_n = -\frac{1}{n\pi}[\pi cos n\pi - (-\pi)cos n(-\pi)] = -\frac{\pi}{n\pi}2\cos n\pi \qquad \boxed{b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n}$$

- ✓ Série de fourier de $f(x) = x$.

$$\boxed{f(x) = x \cong \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \,\mathrm{sen}\, nx}$$

Exemplo 2: $f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$

✓ Gráfico da série de Fourier de $f(x) = x$ com 5 termos.



https://mathforyou.net/en/online/calculus/series/fourier/

Para depois desta aula:

- Estudar seções 10.1 e 10.2 do livro texto.
- Resolver os exemplos.
- Praticar: exercícios da seções 10.1 e 10.2.

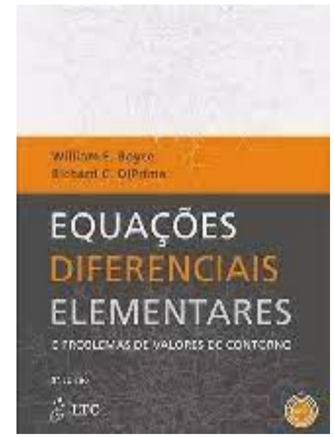
Próxima aula:

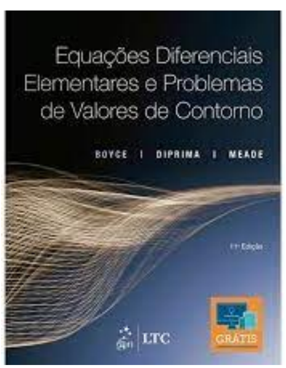
- Equações diferenciais parciais (EDPs).

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Numeração dos exercícios com base na 9ª ed.





BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2020.