Equações diferenciais

Equações diferenciais parciais

Aula 02

Método da separação de variáveis

Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Método da separação de variáveis.
2. Exemplo do método na condução de calor.
3. Exemplo numérico.
4. Exercício.

Pré-requisitos

- Integração de funções trigonométricas.
- Séries de Fourier.

Método da separação de variáveis

Método da separação de variáveis

- As eq. dif. parciais (EDPs) de segunda ordem apresentam teoria mais bem desenvolvida.
- O método mais consolidado é chamado de separação de variáveis.

Método da separação de variáveis

- As eq. dif. parciais (EDPs) de segunda ordem apresentam teoria mais bem desenvolvida.
- O método mais consolidado é chamado de separação de variáveis.
- Ele se refere a uma classe de EDPs que permitem a reescrita com duas variáveis hipotéticas.
- Independente da aplicação, se a EDP tem a forma separável o método de resolução será o mesmo.

Método da separação de variáveis

- As eq. dif. parciais (EDPs) de segunda ordem apresentam teoria mais bem desenvolvida.
- O método mais consolidado é chamado de separação de variáveis.
- Ele se refere a uma classe de EDPs que permitem a reescrita com duas variáveis hipotéticas.
- Independente da aplicação, se a EDP tem a forma separável o método de resolução será o mesmo.
- Será esquematizado esse método para o caso da condução de calor em um corpo rígido.

Método da separação de variáveis

- Seja uma barra de material homogêneo de comprimento L, como ilustra a figura.

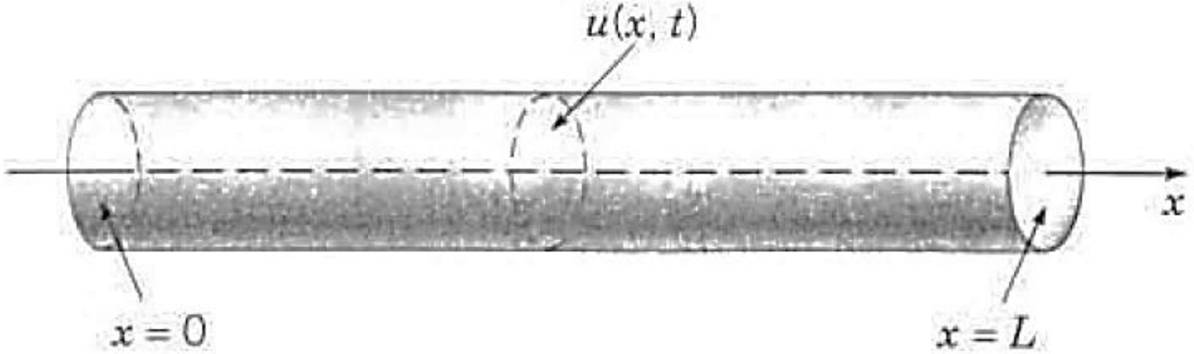
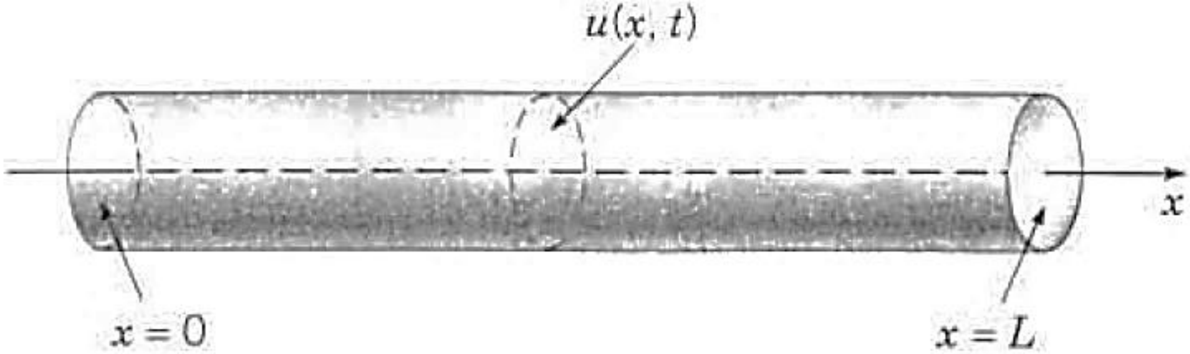


Figura 10.5.1 Uma barra sólida condutora de calor.

Método da separação de variáveis

- Seja uma barra de material homogêneo de comprimento L, como ilustra a figura.

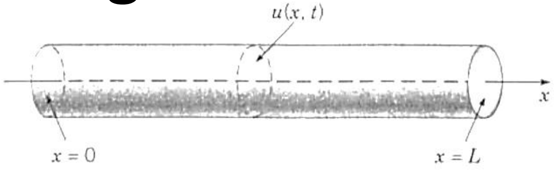


- Suposições:
  - ✓ As laterais da barra estão completamente isoladas.
  - ✓ A temperatura u em cada seção reta é constante.
  - ✓ A função u só depende de x e do instante t.

Figura 10.5.1 Uma barra sólida condutora de calor.

Método da separação de variáveis

- O mecanismo de condução do calor segue a lei do fluxo térmico de Fourier.



$$J = kA\frac{\partial u}{\partial x}$$

$\boldsymbol{J}$: fluxo de calor.

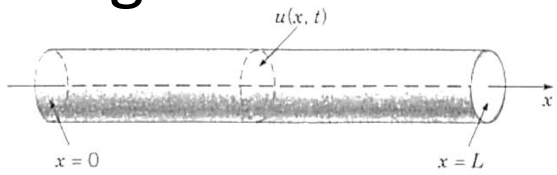
$\boldsymbol{k}$: condutividade térmica.

$\boldsymbol{A}$: área da seção.

$\boldsymbol{\partial u/\partial x}$: gradiente de temperatura na direção x.

Método da separação de variáveis

- O mecanismo de condução do calor segue a lei do fluxo térmico de Fourier.



$$J = kA\frac{\partial u}{\partial x}$$

$\boldsymbol{J}$: fluxo de calor.

$\boldsymbol{k}$: condutividade térmica.

$\boldsymbol{A}$: área da seção.

$\boldsymbol{\partial u/\partial x}$: gradiente de temperatura na direção x.

- A análise do fluxo de calor na barra (Apêndice A, p.505) resulta na seguinte equação dinâmica.

$$\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$\boldsymbol{\alpha} = \sqrt{\frac{k}{\rho s}}\ [\frac{m^2}{s}]^{1/2}$: difusividade térmica.

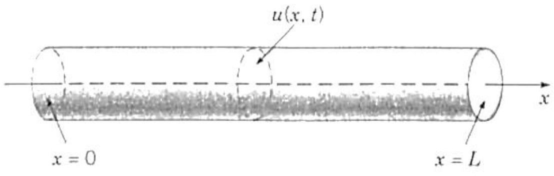
$\boldsymbol{k}$: condutividade térmica.

$\boldsymbol{\rho}$: densidade do material.

$\boldsymbol{s}$: calor específico do material.

Método da separação de variáveis

- O problema matemático consiste de uma EDP de 2ª ordem uma condição inicial e condições de contorno.



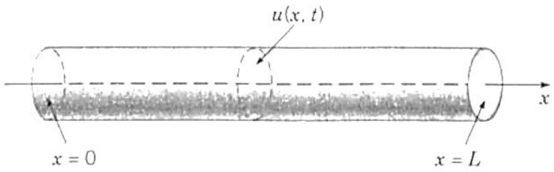
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

Condição inicial: $u(x,0) = f(x) \quad (2)$ $\boldsymbol{u}$: temperatura

Condições de contorno: $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases} \quad (3)$ $\boldsymbol{u}$ é sempre zero quando $x = 0$ e $x = L$

Método da separação de variáveis

- O problema matemático consiste de uma EDP de 2ª ordem uma condição inicial e condições de contorno.



$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

Condição inicial: $u(x,0) = f(x)$ (2) — $\boldsymbol{u}$: temperatura

Condições de contorno: $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$ (3) — $\boldsymbol{u}$ é sempre zero quando $x = 0$ e $x = L$

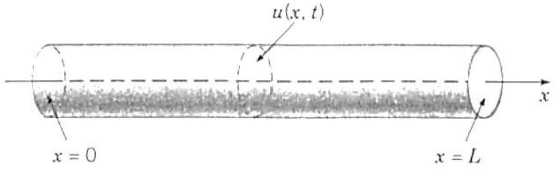
- O objetivo é procurar soluções não nulas da equação diferencial e das condições de contorno.

Método da separação de variáveis

- O método da separação de variáveis supõe que $u(x,t)$ é o produto de duas funções.

Método da separação de variáveis

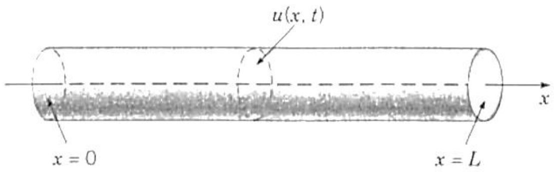
- O método da separação de variáveis supõe que $u(x,t)$ é o produto de duas funções.
- Uma das funções dependerá somente de $\boldsymbol{x}$ e a outra somente de $\boldsymbol{t}$.



$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad (4)$$

Método da separação de variáveis

- O método da separação de variáveis supõe que $u(x,t)$ é o produto de duas funções.
- Uma das funções dependerá somente de $\boldsymbol{x}$ e a outra somente de $\boldsymbol{t}$.



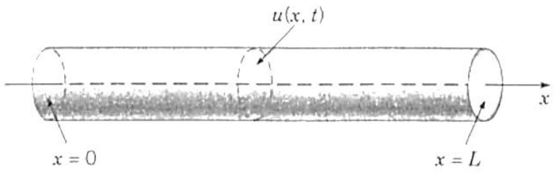
$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad (4)$$

- Substituir a proposta (4) na EDP (1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Método da separação de variáveis

- O método da separação de variáveis supõe que $u(x,t)$ é o produto de duas funções.
- Uma das funções dependerá somente de $\boldsymbol{x}$ e a outra somente de $\boldsymbol{t}$.



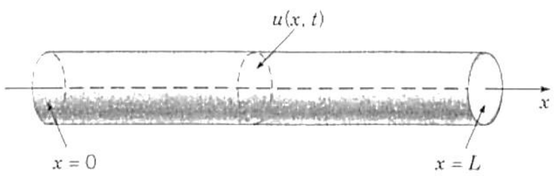
$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad (4)$$

- Substituir a proposta (4) na EDP (1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial XT}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 XT}{\partial x^2}$$

Método da separação de variáveis

- O método da separação de variáveis supõe que $u(x,t)$ é o produto de duas funções.
- Uma das funções dependerá somente de $\boldsymbol{x}$ e a outra somente de $\boldsymbol{t}$.



$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad (4)$$

- Substituir a proposta (4) na EDP (1):

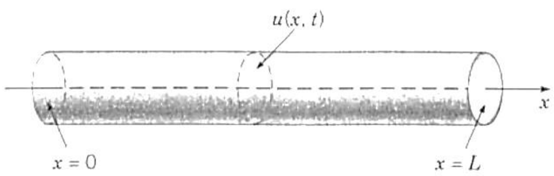
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial XT}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 XT}{\partial x^2}$$

$$X\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 T\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

Método da separação de variáveis

- O método da separação de variáveis supõe que $u(x,t)$ é o produto de duas funções.
- Uma das funções dependerá somente de $\boldsymbol{x}$ e a outra somente de $\boldsymbol{t}$.

$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad (4)$$



- Substituir a proposta (4) na EDP (1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial XT}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 XT}{\partial x^2}$$

$$X\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 T \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T / \partial t}{\alpha^2 T} = \frac{\partial^2 X / \partial x^2}{X}$$

Método da separação de variáveis

- Expressar as derivadas na notação linha.

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} \quad (5)$$

Método da separação de variáveis

- Expressar as derivadas na notação linha.

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} \quad (5)$$

- Para que a eq. (5) seja verdadeira para $0 < x < L$ e $t > 0$ ambos os lados serão iguais a uma constante $-\lambda$.

Método da separação de variáveis

- Expressar as derivadas na notação linha.

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} \quad (5) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

- Para que a eq. (5) seja verdadeira para $0 < x < L$ e $t > 0$ ambos os lados serão iguais a uma constante $-\lambda$.

Método da separação de variáveis

- Expressar as derivadas na notação linha.

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} \quad (5) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

- Para que a eq. (5) seja verdadeira para $0 < x < L$ e $t > 0$ ambos os lados serão iguais a uma constante $-\lambda$.
- Obtém-se duas eq. dif. ordinárias:

$$\frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = -\lambda$$

Método da separação de variáveis

- Expressar as derivadas na notação linha.

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} \qquad (5) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

- Para que a eq. (5) seja verdadeira para $0 < x < L$ e $t > 0$ ambos os lados serão iguais a uma constante $-\lambda$.
- Obtém-se duas eq. dif. ordinárias:

$$\frac{X''}{X} = -\lambda \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda X = 0 \qquad (6.1)$$

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = -\lambda$$

Método da separação de variáveis

- Expressar as derivadas na notação linha.

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} \quad (5) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

- Para que a eq. (5) seja verdadeira para $0 < x < L$ e $t > 0$ ambos os lados serão iguais a uma constante $-\lambda$.
- Obtém-se duas eq. dif. ordinárias:

$$\frac{X''}{X} = -\lambda \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda X = 0 \qquad (6.1)$$

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = -\lambda \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial T}{\partial t} + \alpha^2 \lambda T = 0 \qquad (6.2)$$

Método da separação de variáveis

- As equações (6.1) e (6.2) podem ser resolvidas pelos métodos estudados anteriormente.

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda \mathrm{X} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \alpha^2 \lambda T = 0$$

Método da separação de variáveis

- As equações (6.1) e (6.2) podem ser resolvidas pelos métodos estudados anteriormente.

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda \mathrm{X} = 0 \quad \Rightarrow \quad X = B cos\sqrt{\lambda}\, x + C sen\sqrt{\lambda}\, x$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \alpha^2 \lambda T = 0$$

Método da separação de variáveis

- As equações (6.1) e (6.2) podem ser resolvidas pelos métodos estudados anteriormente.

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda \mathrm{X} = 0 \quad \Rightarrow \quad X = B cos\sqrt{\lambda}\, x + C sen\sqrt{\lambda}\, x$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \alpha^2 \lambda T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = Ae^{-\alpha^2 \lambda t}$$

Método da separação de variáveis

- As equações (6.1) e (6.2) podem ser resolvidas pelos métodos estudados anteriormente.

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda X = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{X = B\cos\sqrt{\lambda}\,x + C sen\sqrt{\lambda}\,x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \alpha^2 \lambda T = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = A e^{-\alpha^2 \lambda t}}$$

Onde A, B e C são constantes

Método da separação de variáveis

- As equações (6.1) e (6.2) podem ser resolvidas pelos métodos estudados anteriormente.

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda X = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{X = B cos\sqrt{\lambda}\, x + C sen\sqrt{\lambda}\, x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \alpha^2 \lambda T = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = A e^{-\alpha^2 \lambda t}}$$

Onde A, B e C são constantes

- O produto das soluções $u(x,t) = X(x) \times T(t)$ fornece a solução da EDP:

$$u(x,t) = A e^{-\alpha^2 \lambda t}[B cos\sqrt{\lambda}\, x + C sen\sqrt{\lambda}\, x] \qquad (7)$$

Método da separação de variáveis

- Inserir as condições de contorno em (7). $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$

$$u(x,t) = Ae^{-\alpha^2 \lambda t}[B cos\sqrt{\lambda}\,x + C sen\sqrt{\lambda}\,x] \quad (7)$$

Método da separação de variáveis

- Inserir as condições de contorno em (7). $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$

$$u(x,t) = Ae^{-\alpha^2 \lambda t}[Bcos\sqrt{\lambda}\,x + Csen\sqrt{\lambda}\,x] \quad (7)$$

- Primeira condição $u(0,t) = 0$.

$$Ae^{-\alpha^2 \lambda t}\left[Bcos\sqrt{\lambda}\,0 + Csen\sqrt{\lambda}\,0\right] = 0$$

Método da separação de variáveis

- Inserir as condições de contorno em (7). $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$

$$u(x,t) = Ae^{-\alpha^2\lambda t}[Bcos\sqrt{\lambda}\,x + Csen\sqrt{\lambda}\,x] \quad (7)$$

- Primeira condição $u(0,t) = 0$.

$$Ae^{-\alpha^2\lambda t}\left[Bcos\sqrt{\lambda}\,0 + Csen\sqrt{\lambda}\,0\right] = 0$$

$$Bcos\sqrt{\lambda}\,0 + Csen\sqrt{\lambda}\,0 = 0$$

Método da separação de variáveis

- Inserir as condições de contorno em (7). $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$

$$u(x,t) = Ae^{-\alpha^2 \lambda t}[Bcos\sqrt{\lambda}\,x + Csen\sqrt{\lambda}\,x] \quad (7)$$

- Primeira condição $u(0,t) = 0$.

$$Ae^{-\alpha^2 \lambda t}\left[Bcos\sqrt{\lambda}\,0 + Csen\sqrt{\lambda}\,0\right] = 0$$

$$Bcos\sqrt{\lambda}\,0 + Csen\sqrt{\lambda}\,0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = 0}$$

Método da separação de variáveis

- Inserir as condições de contorno em (7). $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$

$$u(x,t) = Ae^{-\alpha^2 \lambda t}[Bcos\sqrt{\lambda}\, x + Csen\sqrt{\lambda}\, x] \quad (7)$$

- Primeira condição $u(0,t) = 0$.

$$Ae^{-\alpha^2 \lambda t}\left[Bcos\sqrt{\lambda}\, 0 + Csen\sqrt{\lambda}\, 0\right] = 0$$

$$Bcos\sqrt{\lambda}\, 0 + Csen\sqrt{\lambda}\, 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = 0}$$

- Segunda condição $u(L,t) = 0$.

$$Ae^{-\alpha^2 \lambda t}\left[Bcos\sqrt{\lambda}\, L + Csen\sqrt{\lambda}\, L\right] = 0$$

Método da separação de variáveis

- Inserir as condições de contorno em (7). $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$

$$u(x,t) = Ae^{-\alpha^2 \lambda t}[Bcos\sqrt{\lambda}\,x + Csen\sqrt{\lambda}\,x] \quad (7)$$

- Primeira condição $u(0,t) = 0$.

$$Ae^{-\alpha^2 \lambda t}[Bcos\sqrt{\lambda}\,0 + Csen\sqrt{\lambda}\,0] = 0$$

$$Bcos\sqrt{\lambda}\,0 + Csen\sqrt{\lambda}\,0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = 0}$$

- Segunda condição $u(L,t) = 0$.

$$Ae^{-\alpha^2 \lambda t}[\overset{=0}{\cancel{B}}cos\sqrt{\lambda}\,L + Csen\sqrt{\lambda}\,L] = 0$$

Método da separação de variáveis

- Inserir as condições de contorno em (7). $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$

$$u(x,t) = Ae^{-\alpha^2 \lambda t}[Bcos\sqrt{\lambda}\,x + Csen\sqrt{\lambda}\,x] \quad (7)$$

- Primeira condição $u(0,t) = 0$.

$$Ae^{-\alpha^2 \lambda t}\left[Bcos\sqrt{\lambda}\,0 + Csen\sqrt{\lambda}\,0\right] = 0$$

$$Bcos\sqrt{\lambda}\,0 + Csen\sqrt{\lambda}\,0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = 0}$$

- Segunda condição $u(L,t) = 0$.

$$Ae^{-\alpha^2 \lambda t}\left[\overset{=0}{\cancel{Bcos}}\sqrt{\lambda}\,L + Csen\sqrt{\lambda}\,L\right] = 0$$

$$Csen\sqrt{\lambda}\,L = 0$$

Método da separação de variáveis

- Inserir as condições de contorno em (7). $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$

$$u(x,t) = Ae^{-\alpha^2 \lambda t}[Bcos\sqrt{\lambda}\,x + Csen\sqrt{\lambda}\,x] \quad (7)$$

- Primeira condição $u(0,t) = 0$.

$$Ae^{-\alpha^2 \lambda t}\left[Bcos\sqrt{\lambda}\,0 + Csen\sqrt{\lambda}\,0\right] = 0$$

$$Bcos\sqrt{\lambda}\,0 + Csen\sqrt{\lambda}\,0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = 0}$$

- Segunda condição $u(L,t) = 0$.

$$Ae^{-\alpha^2 \lambda t}\left[\overset{=0}{\cancel{B}}cos\sqrt{\lambda}\,L + Csen\sqrt{\lambda}\,L\right] = 0$$

$$Csen\sqrt{\lambda}\,L = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda}\,L = n\pi$$

Método da separação de variáveis

- Inserir as condições de contorno em (7). $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$

$$u(x,t) = Ae^{-\alpha^2\lambda t}[Bcos\sqrt{\lambda}\,x + Csen\sqrt{\lambda}\,x] \quad (7)$$

- Primeira condição $u(0,t) = 0$.

$$Ae^{-\alpha^2\lambda t}\left[Bcos\sqrt{\lambda}\,0 + Csen\sqrt{\lambda}\,0\right] = 0$$

$$Bcos\sqrt{\lambda}\,0 + Csen\sqrt{\lambda}\,0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = 0}$$

- Segunda condição $u(L,t) = 0$.

$$Ae^{-\alpha^2\lambda t}\left[\overset{= 0}{\cancel{B}}cos\sqrt{\lambda}\,L + Csen\sqrt{\lambda}\,L\right] = 0$$

$$Csen\sqrt{\lambda}\,L = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda}\,L = n\pi \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$$

Método da separação de variáveis

- A solução será o produto da exponencial pela série de Fourier da função seno.

$$u(x,t) = Ae^{-\alpha^2\lambda t}[\underbrace{\cancel{B}}^{=0}cos\sqrt{\lambda}\,x + Csen\sqrt{\lambda}\,x]$$

Método da separação de variáveis

- A solução será o produto da exponencial pela série de Fourier da função seno.

$$u(x,t) = Ae^{-\alpha^2\lambda t}[\underbrace{\cancel{B}}_{=0}cos\sqrt{\lambda}\,x + Csen\sqrt{\lambda}\,x]$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha^2(\frac{n\pi}{L})^2 t}[sen\frac{n\pi}{L}x]$$

Onde

$C_n = \mathrm{AC}$

Método da separação de variáveis

- A solução será o produto da exponencial pela série de Fourier da função seno.

$$u(x,t) = Ae^{-\alpha^2\lambda t}[\underbrace{\cancel{B}}_{=0} cos\sqrt{\lambda}\,x + Csen\sqrt{\lambda}\,x]$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha^2(\frac{n\pi}{L})^2 t}[sen\frac{n\pi}{L}x]$$

Onde $C_n = \mathrm{AC}$

- Por fim, substituir a condição inicial $u(x,0) = f(x)$.

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,[sen\frac{n\pi}{L}x]$$

Série de Fourier do seno

Método da separação de variáveis

- A solução será o produto da exponencial pela série de Fourier da função seno.

$$u(x,t) = Ae^{-\alpha^2 \lambda t}[\underbrace{\cancel{B}}_{=0} cos\sqrt{\lambda}\, x + Csen\sqrt{\lambda}\, x]$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha^2 (\frac{n\pi}{L})^2 t}[sen\frac{n\pi}{L}x]$$

Onde
$C_n = \mathrm{AC}$

- Por fim, substituir a condição inicial $u(x,0) = f(x)$.

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, [sen\frac{n\pi}{L}x]$$

Série de Fourier do seno

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sen\frac{n\pi x}{L} dx$$

Método da separação de variáveis

- A solução do problema da condução de calor é dada pela expressão da temperatura, que é uma série.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha^2 (\frac{n\pi}{L})^2 t} [sen \frac{n\pi}{L} x]$$

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) sen \frac{n\pi x}{L} dx$$

Método da separação de variáveis

- A solução do problema da condução de calor é dada pela expressão da temperatura, que é uma série.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha^2 (\frac{n\pi}{L})^2 t}[sen\frac{n\pi}{L}x]$$

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sen \frac{n\pi x}{L} dx$$

- Conhecendo a função condição inicial $f(x)$ e o valor de L é possível obter uma solução com valores numéricos na série de Fourier.

Exemplo numérico

Exemplo numérico

Encontre $u(x,t)$ em uma barra de comprimento $\mathrm{L} = 50\ cm$, inicialmente com temperatura uniforme $f(x) = 20°C$ cujas extremidades são mantidas a $0°C$ para todo $t > 0$.

Solução

Exemplo numérico

Encontre $u(x,t)$ em uma barra de comprimento $\mathrm{L} = 50\ cm$, inicialmente com temperatura uniforme $f(x) = 20°C$ cujas extremidades são mantidas a $0°C$ para todo $t > 0$.

Solução

- ✓ Trata-se do mesmo caso exemplificado anteriormente, mas com alguns valores numéricos.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha^2 (\frac{n\pi}{50})^2 t} [sen \frac{n\pi}{50} x]$$

$$C_n = \frac{2}{50} \int_0^{50} 20 sen \frac{n\pi x}{50} dx$$

Exemplo numérico

- ✓ Cálculo do coeficiente C_n.

$$C_n = \frac{2}{50}\int_0^{50} 20 sen\frac{n\pi x}{50}dx$$

Exemplo numérico

- ✓ Cálculo do coeficiente C_n.

$$C_n = \frac{2}{50}\int_0^{50} 20sen\frac{n\pi x}{50}dx = \frac{40}{50}\int_0^{50} sen\frac{n\pi x}{50}dx$$

Exemplo numérico

- ✓ Cálculo do coeficiente C_n.

$$C_n = \frac{2}{50}\int_0^{50} 20sen\frac{n\pi x}{50}dx = \frac{40}{50}\int_0^{50} sen\frac{n\pi x}{50}dx$$

$$C_n = \frac{40}{50}\frac{50}{n\pi}\left[-cos\frac{n\pi x}{50}\right]_0^{50}$$

Exemplo numérico

- ✓ Cálculo do coeficiente C_n.

$$C_n = \frac{2}{50}\int_0^{50} 20sen\frac{n\pi x}{50}dx = \frac{40}{50}\int_0^{50} sen\frac{n\pi x}{50}dx$$

$$C_n = \frac{40}{50}\frac{50}{n\pi}\left[-cos\frac{n\pi x}{50}\right]_0^{50} = \frac{40}{n\pi}(-cosn\pi + 1)$$

Exemplo numérico

- Cálculo do coeficiente C_n.

$$C_n = \frac{2}{50}\int_0^{50} 20sen\frac{n\pi x}{50}dx = \frac{40}{50}\int_0^{50} sen\frac{n\pi x}{50}dx$$

$$C_n = \frac{40}{50}\frac{50}{n\pi}\left[-cos\frac{n\pi x}{50}\right]_0^{50} = \frac{40}{n\pi}(-cosn\pi + 1)$$

- Para $n\,par$, $cosn\pi = 1$ e $C_n = 0$.

Exemplo numérico

- Cálculo do coeficiente C_n.

$$C_n = \frac{2}{50}\int_0^{50} 20 sen\frac{n\pi x}{50}dx = \frac{40}{50}\int_0^{50} sen\frac{n\pi x}{50}dx$$

$$C_n = \frac{40}{50}\frac{50}{n\pi}\left[-cos\frac{n\pi x}{50}\right]_0^{50} = \frac{40}{n\pi}(-cosn\pi + 1)$$

- Para $n\ par$, $cosn\pi = 1$ e $C_n = 0$. Para $n\ ímpar$: $\boxed{C_n = \frac{80}{n\pi}}$

Exemplo numérico

- ✓ Cálculo do coeficiente C_n.

$$C_n = \frac{2}{50}\int_0^{50} 20sen\frac{n\pi x}{50}dx = \frac{40}{50}\int_0^{50} sen\frac{n\pi x}{50}dx$$

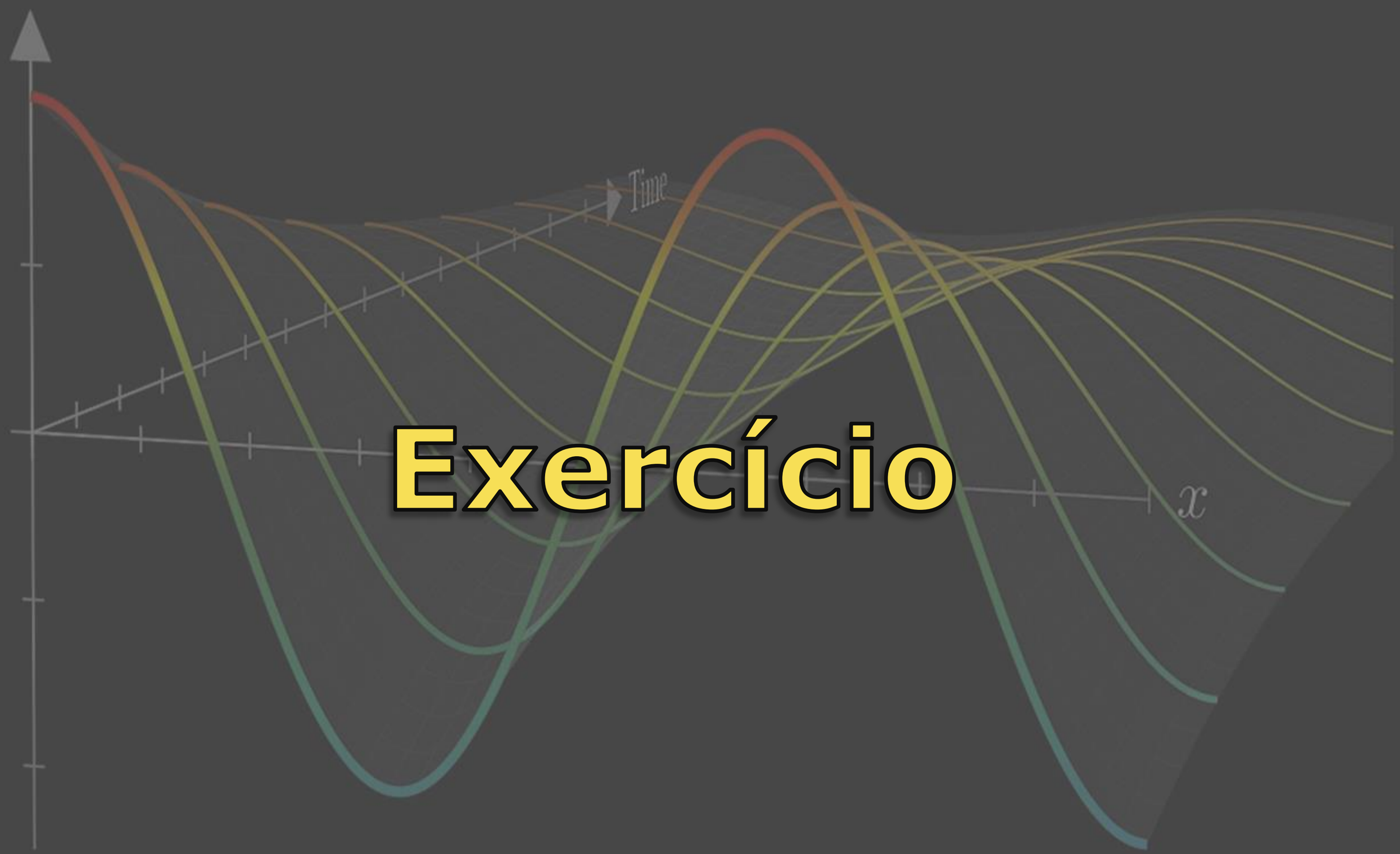
$$C_n = \frac{40}{50}\frac{50}{n\pi}\left[-cos\frac{n\pi x}{50}\right]_0^{50} = \frac{40}{n\pi}(-cosn\pi + 1)$$

- ✓ Para $n\, par$, $cosn\pi = 1$ e $C_n = 0$. Para $n\, ímpar$: $C_n = \frac{80}{n\pi}$

- ✓ Portanto, o valor da temperatura em (x, t) é a série:

$$u(x,t) = \frac{80}{\pi}\sum_{n=1,3,5\,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\alpha^2\left(\frac{n\pi}{50}\right)^2 t}\left[sen\frac{n\pi}{50}x\right]$$

Exercício



Exercício

- Demonstre os passos para encontrar a solução do problema da condução de calor em uma barra.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 100\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$\boldsymbol{u}$: temperatura
$\boldsymbol{t > 0}$: tempo
$\boldsymbol{0 < x < 1}$: tempo

Condição inicial: $u(x,0) = sen2\pi x - sen5\pi x$

Condições de contorno: $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$

$\boldsymbol{u}$ é sempre zero quando $x = 0$ e $x = L$

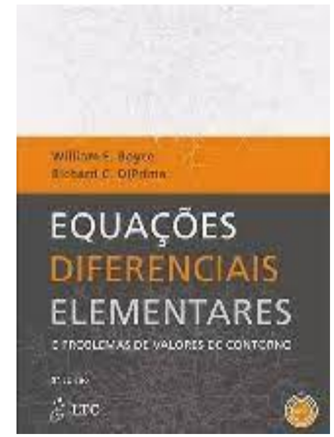
Entrega no final desta aula em folha individual.

Para depois desta aula:

- Estudar seção 10.5 do livro texto.
- Resolver os exemplos.
- Praticar: exercícios da seção 10.5 .

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.



Numeração dos exercícios com base na 9ª ed.

BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2020.