Cálculo I

Aula Extra
Integração

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

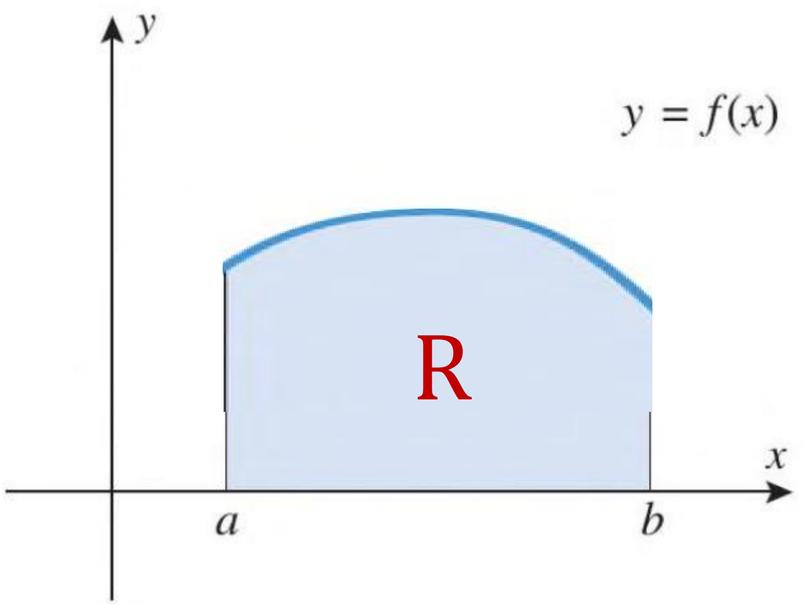
Integração

- Iniciaremos o estudo da integração através do **problema de determinação de áreas**;

- O objetivo é entendermos o que é uma **integral definida** e em seguida **a integral indefinida**;

6.4 Definição de área como limite

- Seja a função $y = f(x) \geq 0$, contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$;

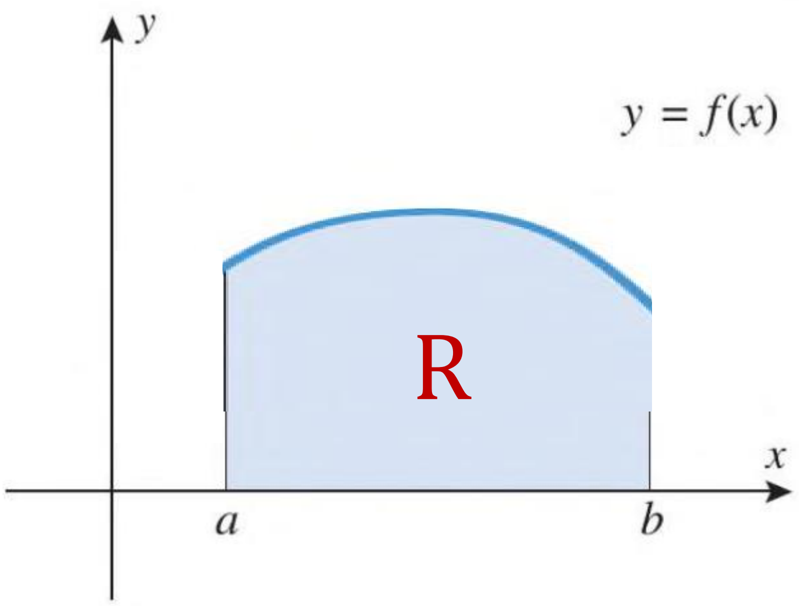


Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6.4 Definição de área como limite

- Seja a função $y = f(x) \geq 0$, contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$;

- A região delimitada pelo o eixo x, as retas $x = a$ e $x = b$ e superiormente pela curva de $y = f(x)$ será denotada com região R.

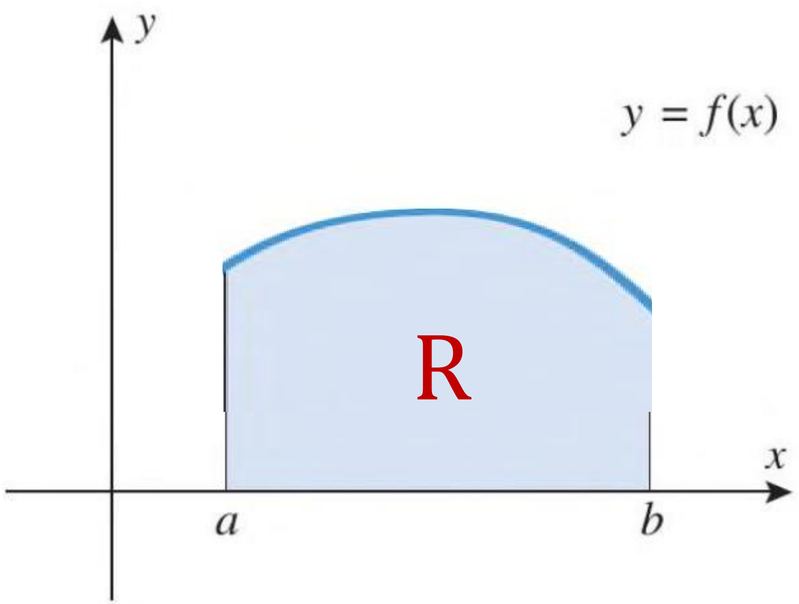


Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6.4 Definição de área como limite

- Seja a função $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(x) \geq 0$, contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$;

- A região delimitada pelo o eixo x, as retas $x = a$ e $x = b$ e superiormente pela curva de $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(x)$ será denotada com região R.

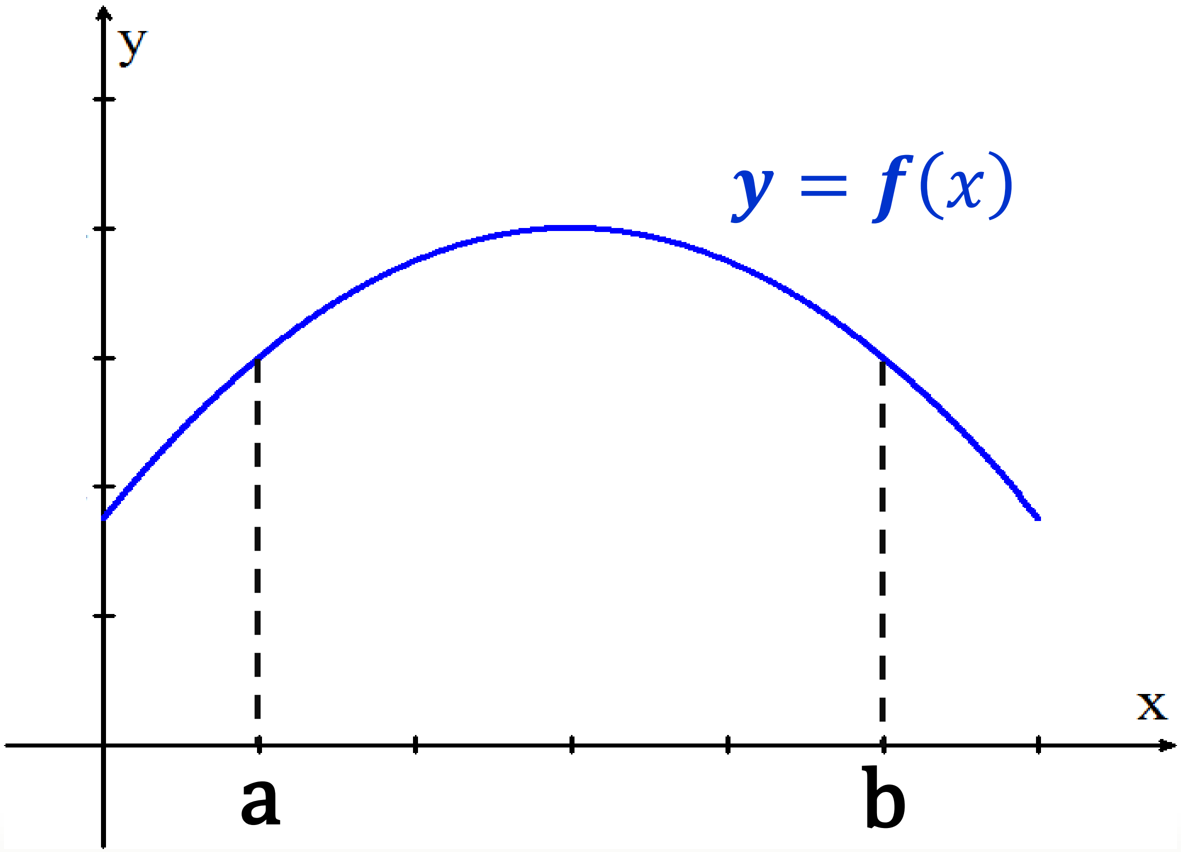


Como podemos calcular a área de R?

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6.4 Definição de área como limite

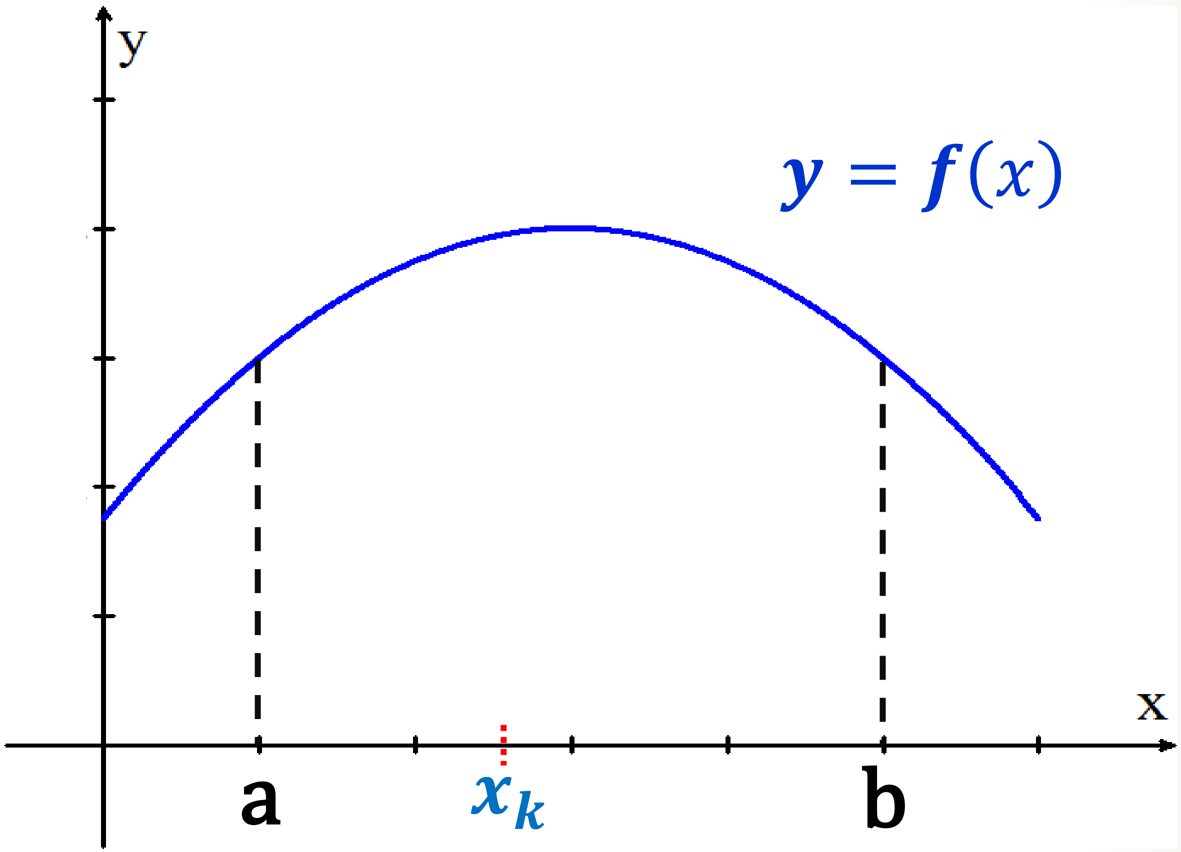
Seja a função $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(x) \geq 0$, contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$



6.4 Definição de área como limite

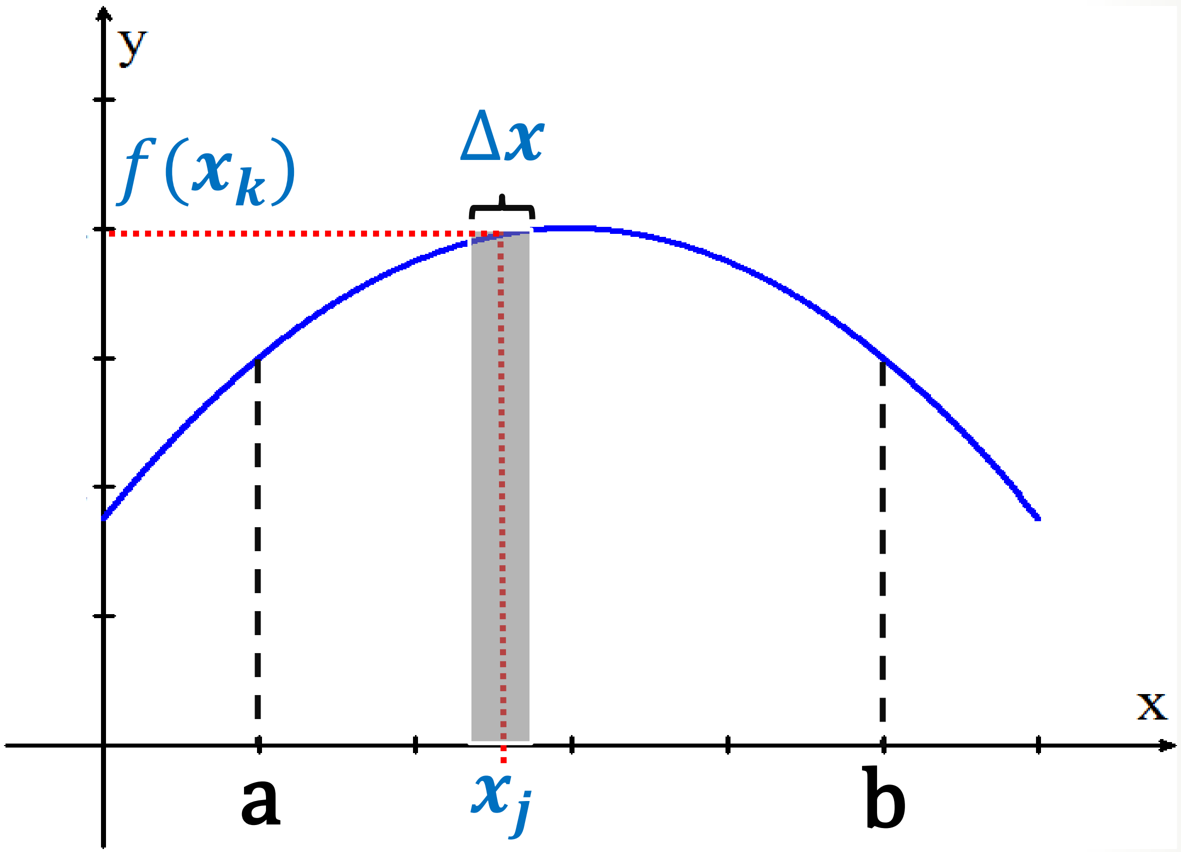
- O intervalo $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ será dividido em $\boldsymbol{n}$ subintervalos, de larguras iguais $\Delta \boldsymbol{x}$.

- $\boldsymbol{x_k}$ é um ponto qualquer do subintervalo.



6.4 Definição de área como limite

- Em cada um dos subintervalos, constrói-se retângulos de base Δx e altura $f(x_k)$.

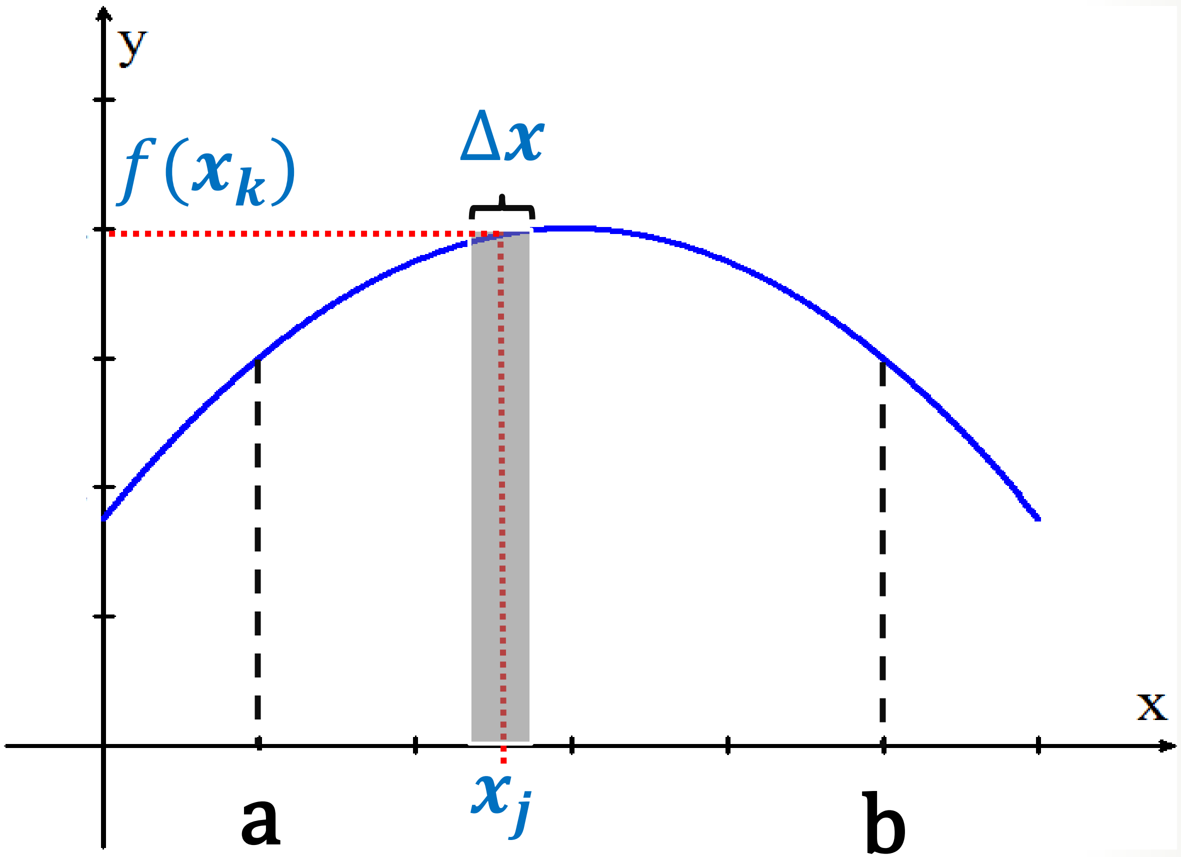


6.4 Definição de área como limite

- Em cada um dos subintervalos, constrói-se retângulos de base Δx e altura $f(x_k)$.

- A área de cada retângulo será:

$$A_k = f(x_k)\Delta x$$

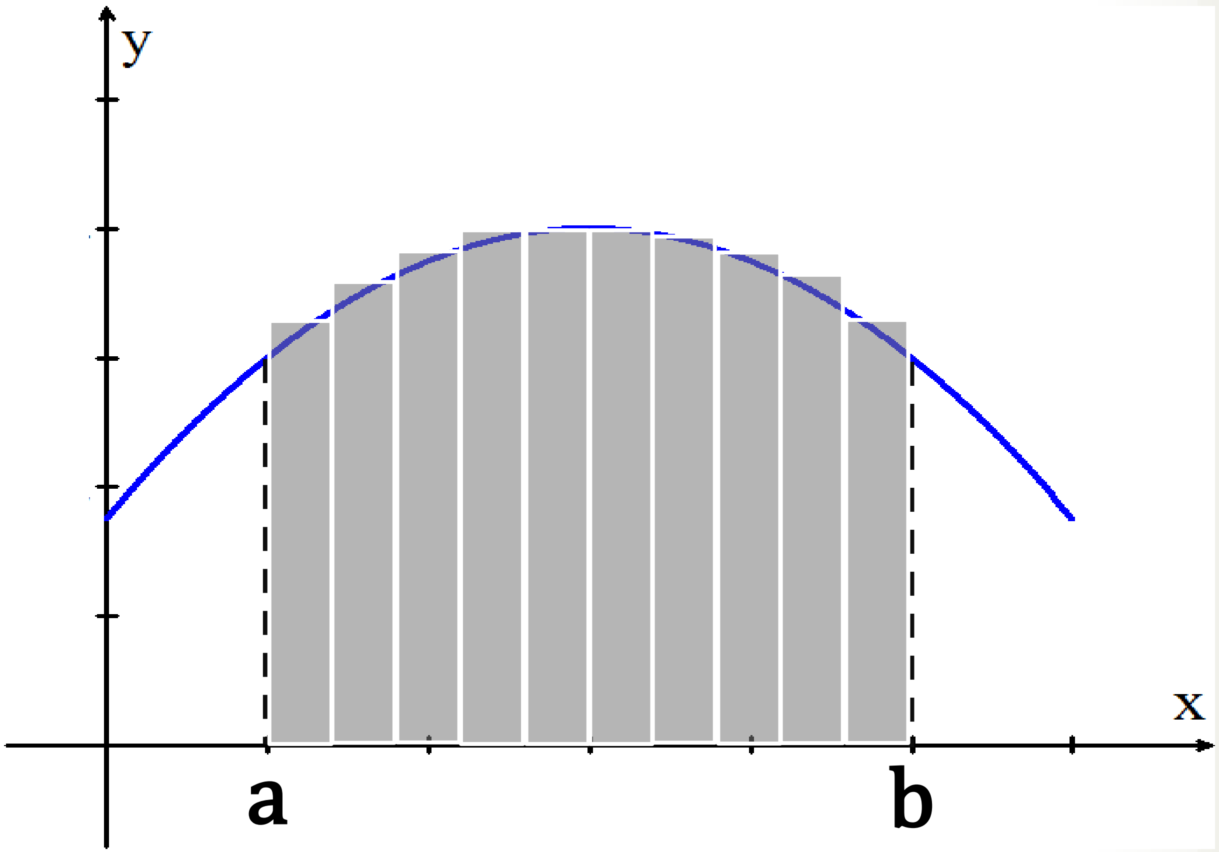


6.4 Definição de área como limite

- A soma das áreas dos n retângulos é o somatório:

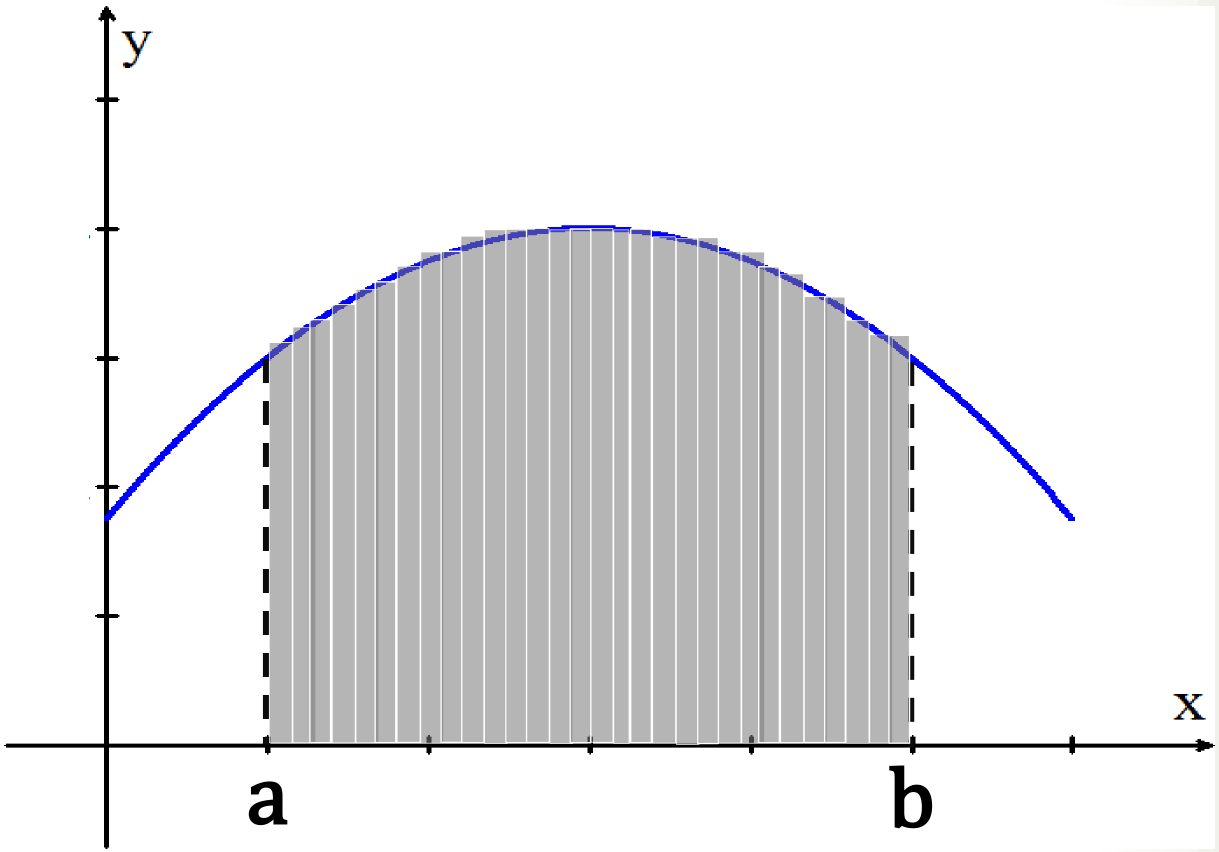
$$A_R \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

Chamada de **soma de Riemann**

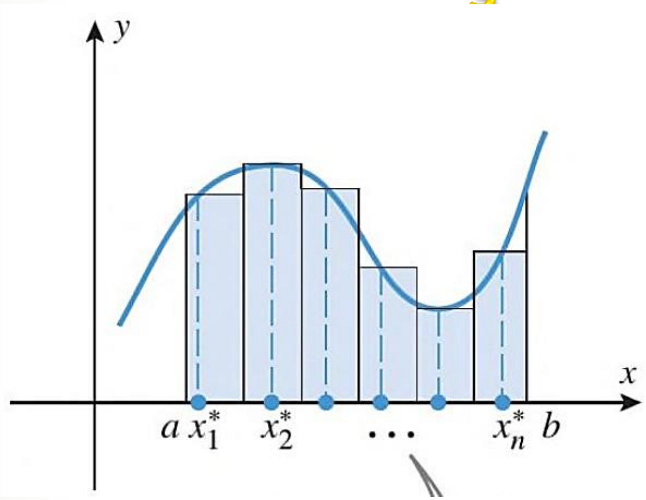


6.4 Definição de área como limite

- Quando n cresce para o infinito o somatório dos retângulos tende para a área A sob a curva no intervalo $[a, b]$.

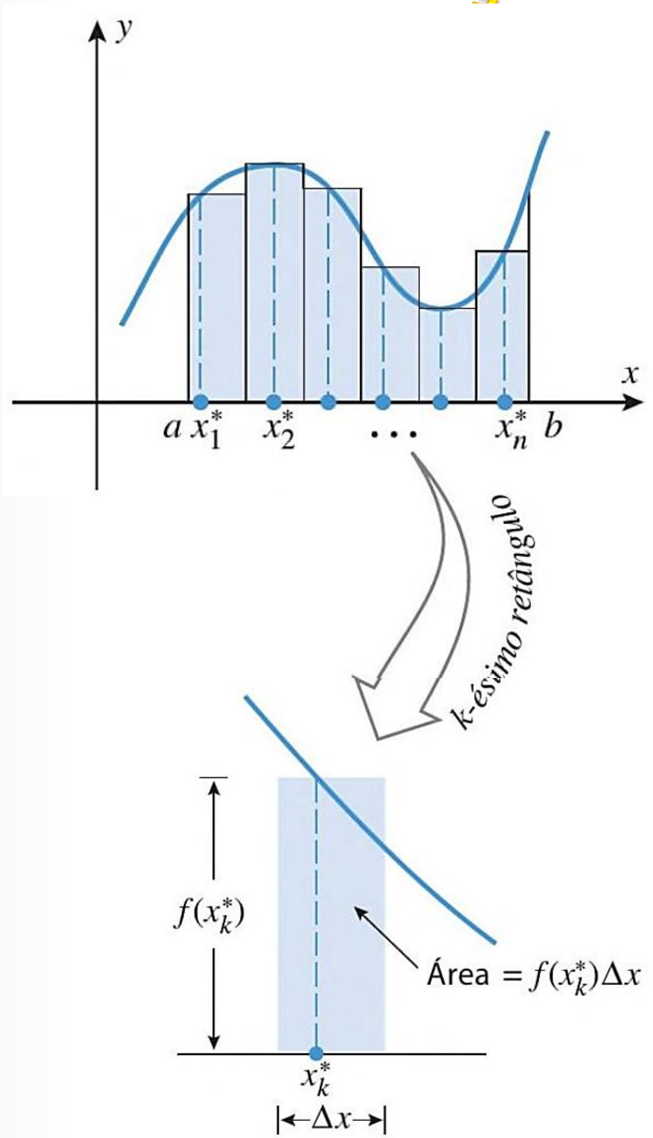


6.4 Definição de área como limite



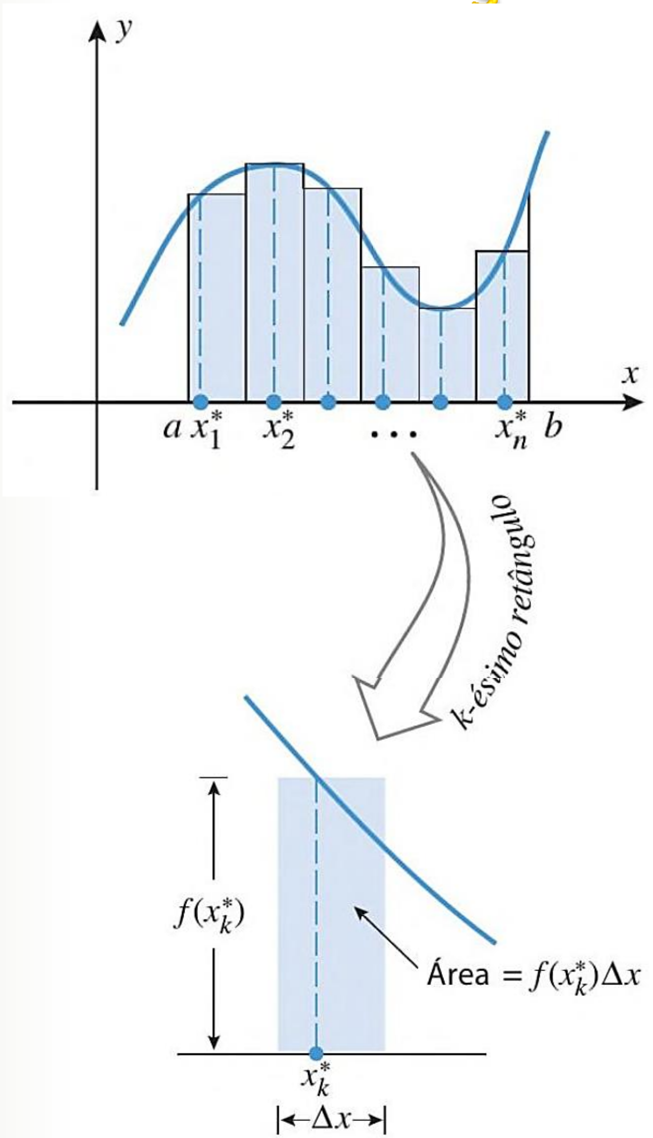
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6.4 Definição de área como limite



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6.4 Definição de área como limite



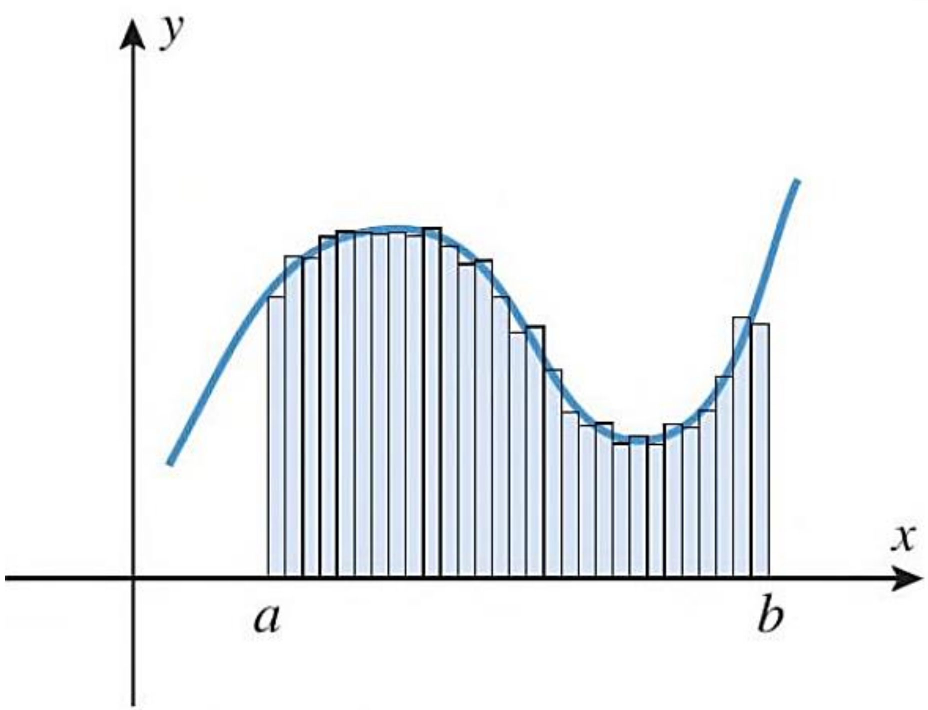


Figura 5.4.5 área $(R_n) \approx$ área (R)

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6.4 Definição de área como limite

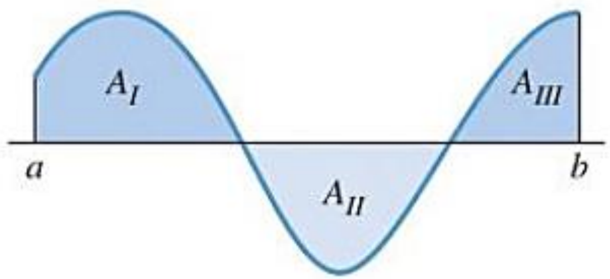
5.4.3 DEFINIÇÃO (*Área Sob uma Curva*) Se a função f for contínua em $[a, b]$ e se $f(x) \geq 0$ em cada x de $[a, b]$, então a ***área*** sob a curva $y = f(x)$ e acima do intervalo $[a, b]$ é definida por

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x \qquad (2)$$

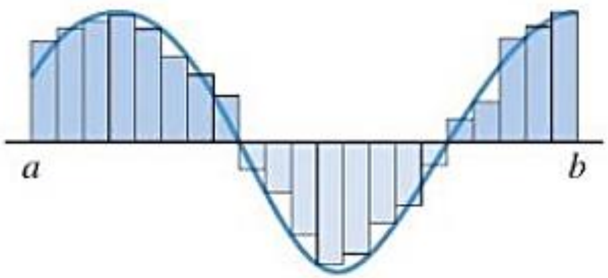
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Área líquida com sinal

- Se a função f for contínua e tomar valores positivos e negativos no intervalo $[a, b]$;



(a)

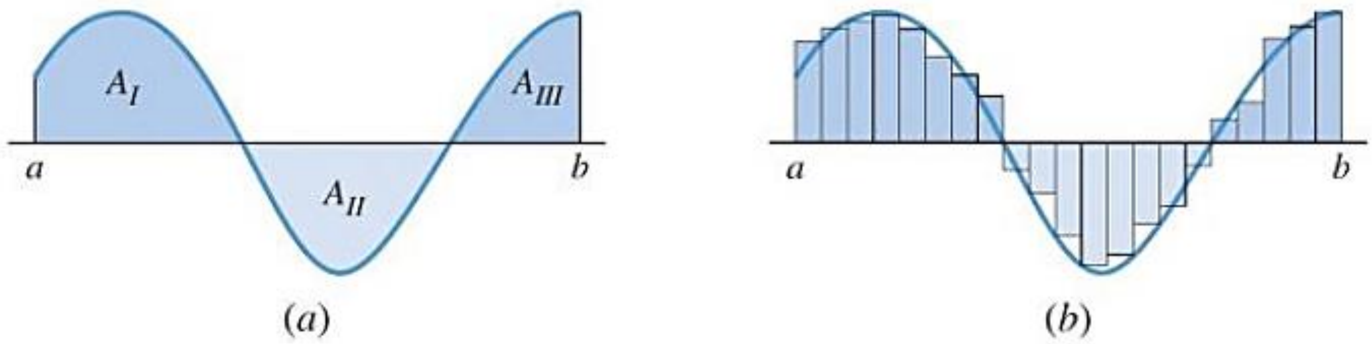


(b)

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Área líquida com sinal

- Se a função ***f*** for contínua e tomar valores positivos e negativos no intervalo [a, b];



- Então a diferença entre as áreas acima e abaixo da curva de ***f*** será chamada de **área líquida com sinal** no intervalo [a, b];

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Área líquida com sinal

5.4.5 DEFINIÇÃO ***(Área Líquida com Sinal)*** Se a função f for contínua em $[a, b]$, então a ***área líquida com sinal*** A entre a curva $y = f(x)$ e o intervalo $[a, b]$ é definida por

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x \tag{9}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6.5 Integral definida

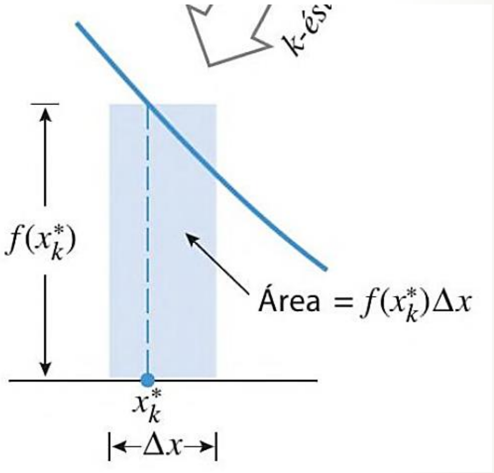
- A **integral definida** relaciona o conceitos de área a outros conceitos como: comprimento, volume, densidade, probabilidade e trabalho;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6.5 Integral definida

- A **integral definida** relaciona o conceitos de área a outros conceitos como: comprimento, volume, densidade, probabilidade e trabalho;

- Na seção anterior ao definirmos a área utilizamos uma subdivisão Δx igual para todos os subintervalos ;

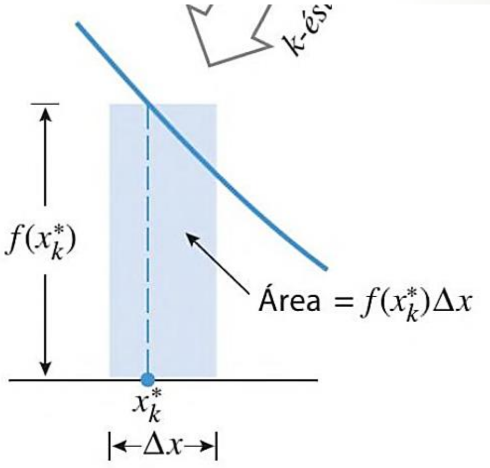


Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6.5 Integral definida

- A **integral definida** relaciona o conceitos de área a outros conceitos como: comprimento, volume, densidade, probabilidade e trabalho;

- Na seção anterior ao definirmos a área utilizamos uma subdivisão $\boldsymbol{\Delta x}$ igual para todos os subintervalos ;



- Este tipo de divisão é chamado partição regular.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

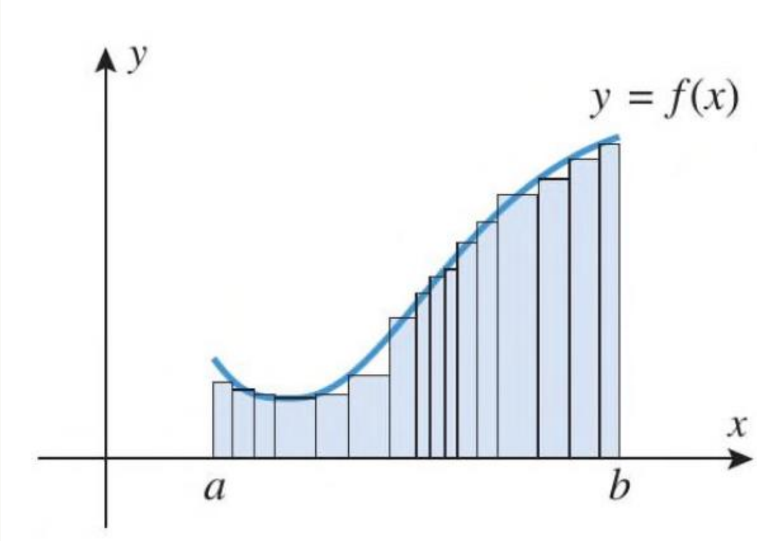
6.5 Integral definida

- No caso da partição regular, as larguras dos retângulos tendem a zero quando n cresce;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6.5 Integral definida

- No caso da partição regular, as larguras dos retângulos tendem a zero quando n cresce;

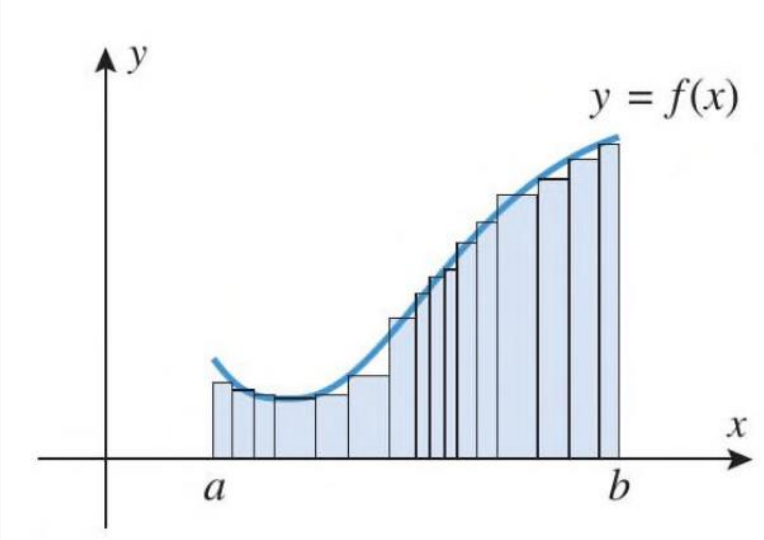


- Podemos generalizar a definição 5.4.5 permitindo que os subintervalos tenham larguras variáveis Δx_k;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6.5 Integral definida

- No caso da partição regular, as larguras dos retângulos tendem a zero quando $\boldsymbol{n}$ cresce;



- Podemos generalizar a definição 5.4.5 permitindo que os subintervalos tenham larguras variáveis $\Delta \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}$;

- Trocaremos também a expressão $\boldsymbol{n} \rightarrow \infty$ por $\mathrm{Max}\, \Delta \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}} \rightarrow \mathbf{0}$, de modo a garantir que as larguras de todos subintervalos tendam a zero.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6.5 Integral definida

5.5.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função f é ***integrável*** em um intervalo fechado finito $[a, b]$ se o limite

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

existir e não depender da escolha das partições ou da escolha dos pontos x_k^* nos subintervalos. Nesse caso, denotamos o limite pelo símbolo

6.5 Integral definida

5.5.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função f é ***integrável*** em um intervalo fechado finito $[a, b]$ se o limite

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

existir e não depender da escolha das partições ou da escolha dos pontos x_k^* nos subintervalos. Nesse caso, denotamos o limite pelo símbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

que é denominado ***integral definida*** de f de a até b. Os números a e b são denominados ***limite de integração inferior*** e ***limite de integração superior***, respectivamente, e $f(x)$ é denominado ***integrando***.

prof. Henrique A M Faria

6.5 Integral definida

5.5.2 TEOREMA *Se uma função f for contínua em um intervalo* $[a, b]$, *então f será integrável em* $[a, b]$ *e a área líquida com sinal A entre o gráfico de f e o intervalo* $[a, b]$ *será*

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

6.5 Integral definida

5.5.2 TEOREMA *Se uma função f for contínua em um intervalo [a, b], então f será integrável em [a, b] e a área líquida com sinal A entre o gráfico de f e o intervalo [a, b] será*

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

Pode-se mostrar que se a função $\boldsymbol{y = f(x)}$ for contínua no intervalo $[a, b]$, então será integrável.

6.2 A integral definida

A soma de Riemann com n tendendo para o infinito pode ser denotada pelo limite:

$$A = \lim_{Max\Delta x_k \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

6.2 A integral definida

A soma de Riemann com n tendendo para o infinito pode ser denotada pelo limite:

$$A = \lim_{Max \Delta x_k \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(x_k) \Delta x_k$$

Que é a definição de uma integral de uma função contínua $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$:

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)dx = \lim_{Max \Delta x_k \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(x_k) \Delta x_k}$$

Exemplos, calcular as integrais.

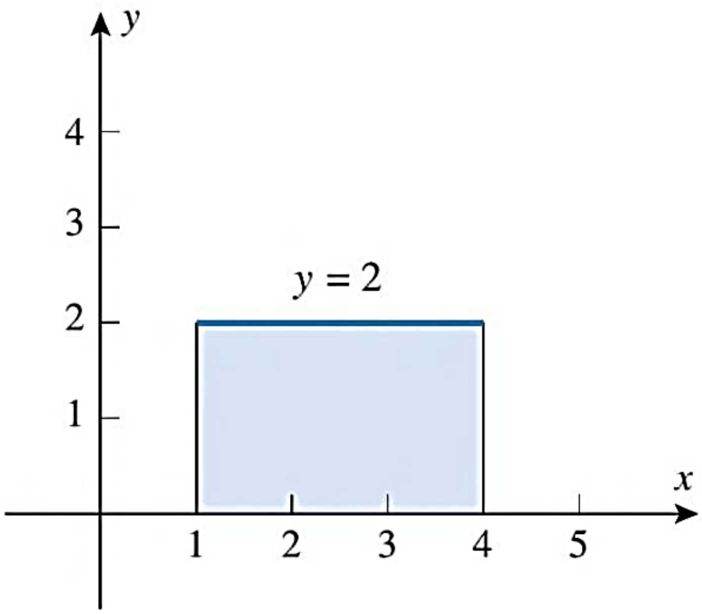
a. $\int_{1}^{4} 2dx$

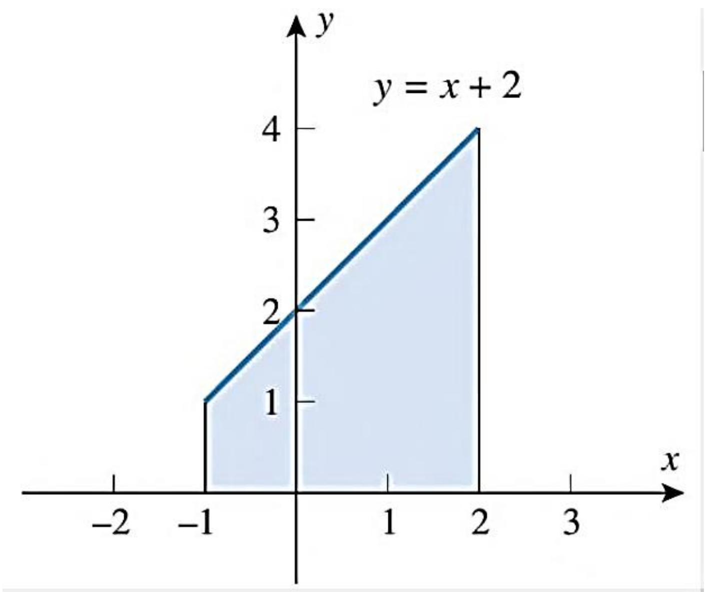
b. $\int_{-1}^{2} (x+2)dx$

Exemplos, calcular as integrais.

a. $\int_1^4 2dx$

b. $\int_{-1}^{2}(x+2)dx$





Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Propriedades da integral definida

5.5.3 DEFINIÇÃO

(a) Se a estiver no domínio de f, definimos

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

(b) Se f for integrável em $[a, b]$, definimos

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

prof. Henrique A M Faria

Propriedades da integral definida

5.5.4 TEOREMA *Se f e g forem integráveis em $[a, b]$ e se c for uma constante, então cf, $f+g$ e $f-g$ serão integráveis em $[a, b]$ e*

(a) $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

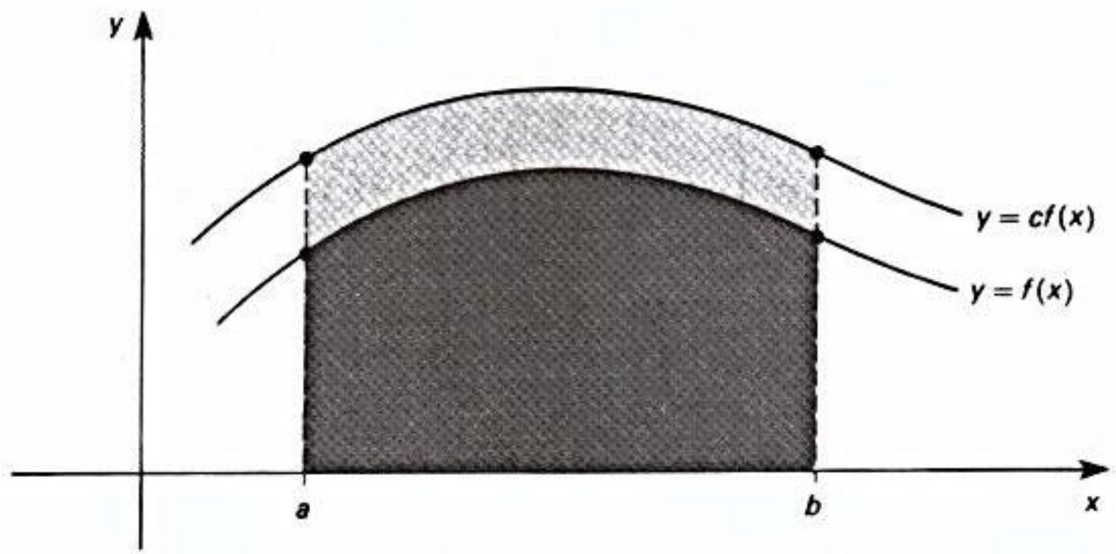
(b) $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

Propriedades da integral definida

Sejam as função $y = f(x)$ e $y = g(x)$, contínuas em um intervalo $[a, b]$ e c uma constante.

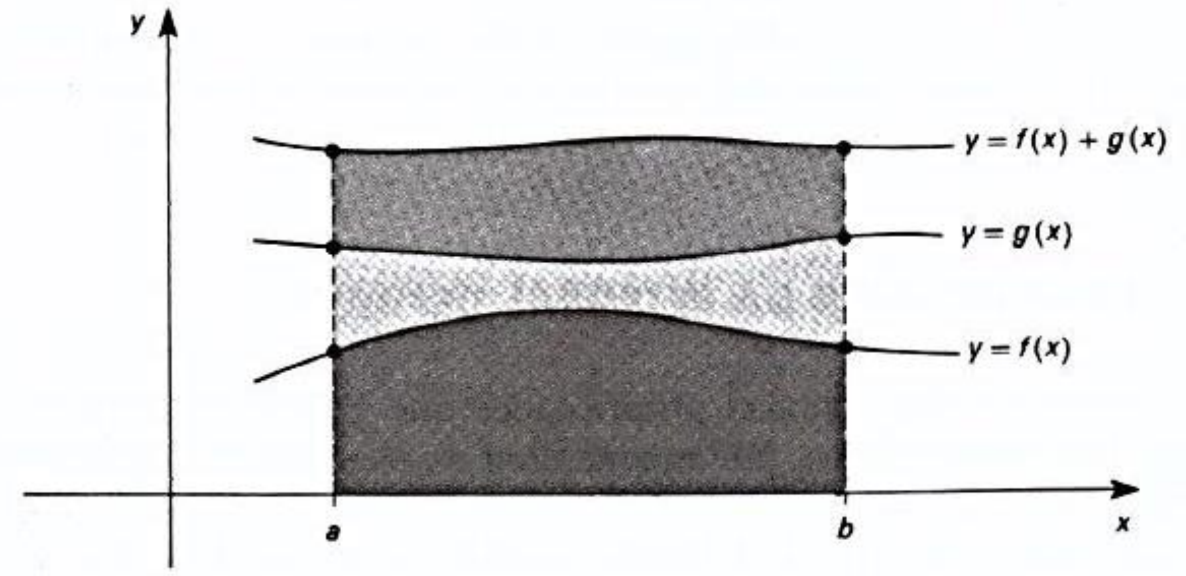
1. $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$



Propriedades da integral definida

Sejam as função $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(x)$ e $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(x)$, contínuas em um intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ e c uma constante.

2. $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$



6.4 Definição de área como limite

5.5.5 TEOREMA *Se f for integrável em um intervalo fechado contendo os três pontos a, b e c, então*

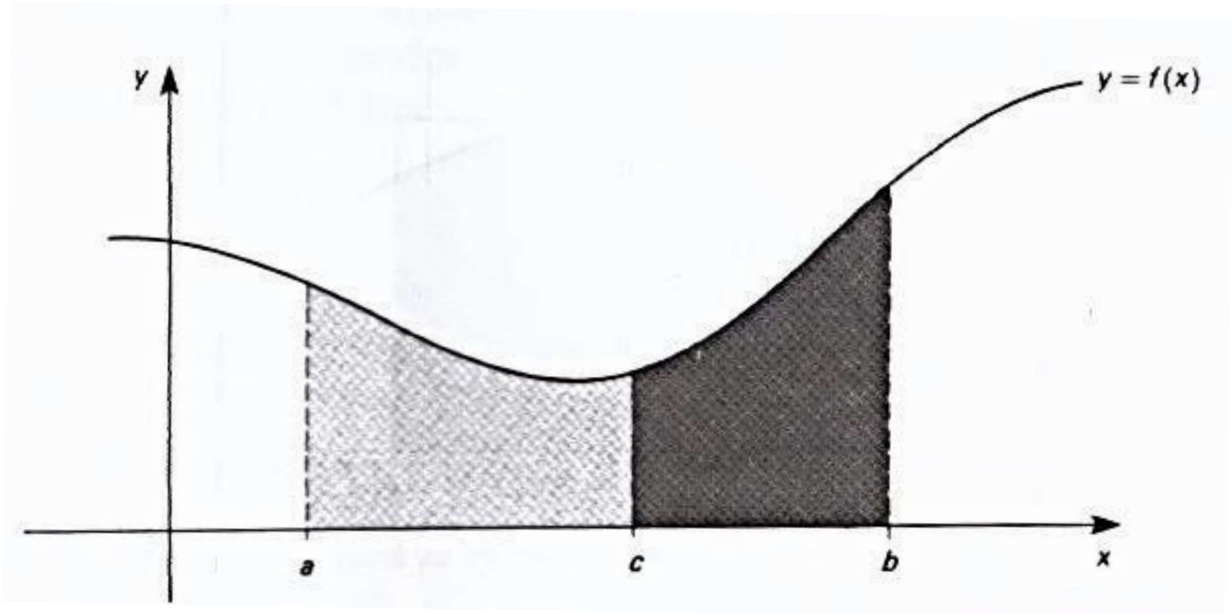
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

não importando como os pontos estejam ordenados.

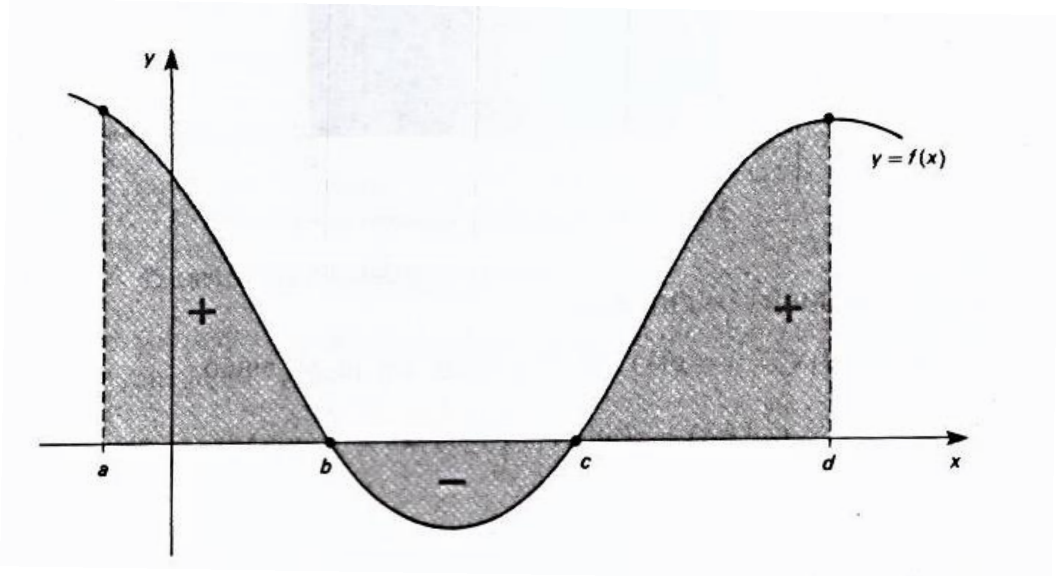
Propriedades da integral definida

Sejam as função $y = f(x)$ e $y = g(x)$, contínuas em um intervalo $[a, b]$ e c uma constante.

3. $\int_a^b f(x) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ $\qquad$ com: $a \leq c \leq b$



6.5 Integral definida e área líquida

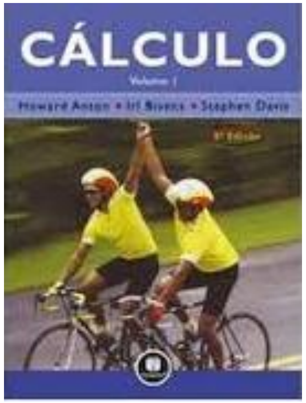


$$\int_a^d f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx$$

$$\text{Área líquida} = A_{ab} - A_{bc} + A_{cd}$$

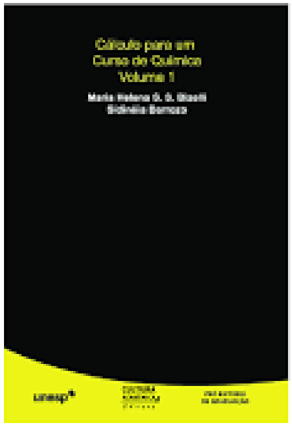
Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.



Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.

2. BIZELLI, Maria Helena S.S.; BARROZO, Sidineia. Cálculo para um Curso de Química – volume 1. 1. ed. São Paulo, Cultura Acadêmica, 2009.



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br