Cálculo I

Aula 2
Teorema Fundamental do cálculo

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

- ✓ Isaac Newton, mostrou que a derivação e a integração são operações inter-relacionadas:

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

- ✓ Isaac Newton, mostrou que a derivação e a integração são operações inter-relacionadas:
- ✓ Essa relação é conhecida como o **Teorema Fundamental do Cálculo:**

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

- Estabelece a conexão entre o cálculo diferencial e o cálculo integral;
- Relaciona o conceito de derivada com o de integral definida;

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

- Estabelece a conexão entre o cálculo diferencial e o cálculo integral;
- Relaciona o conceito de derivada com o de integral definida;
- Fornece a precisa relação inversa entre a derivada e a integral;
- O teorema é apresentado em duas partes.

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

5.6.1 TEOREMA ***(Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1)*** *Se f for contínua em $[a, b]$ e F for uma antiderivada de f em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{2}$$

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

5.6.1 TEOREMA **(*Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1*)** *Se f for contínua em $[a, b]$ e F for uma antiderivada de f em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{2}$$

Em palavras, essa equação afirma:

A integral definida pode ser calculada encontrando-se uma antiderivada do integrando e, então, subtraindo-se o valor dessa antiderivada no extremo inferior de integração de seu valor no extremo superior de integração.

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

ANTIDERIVADAS

5.2.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função F é uma ***antiderivada*** de uma função f em um dado intervalo aberto se $F'(x) = f(x)$ em cada x do intervalo.

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

5.6.3 TEOREMA ***(Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2)*** *Se f for contínua em um intervalo, então f terá uma antiderivada nesse intervalo. Em particular, se a for um ponto qualquer desse intervalo, então a função F definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

é uma antiderivada de f nesse intervalo; isto é, $F'(x) = f(x)$ para cada x desse intervalo, ou em uma notação alternativa

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x) \tag{11}$$

prof. Henrique A M Faria

Integral indefinida

5.2.2 TEOREMA *Se $F(x)$ for qualquer antiderivada de $f(x)$ em um intervalo aberto, então, dada qualquer constante C, a função $F(x) + C$ é também uma antiderivada de $f(x)$ nesse intervalo. Além disso, cada antiderivada de $f(x)$ no intervalo pode ser expressa na forma $F(x) + C$, escolhendo-se apropriadamente a constante C.*

Integral indefinida

5.2.2 TEOREMA *Se $F(x)$ for qualquer antiderivada de $f(x)$ em um intervalo aberto, então, dada qualquer constante C, a função $F(x) + C$ é também uma antiderivada de $f(x)$ nesse intervalo. Além disso, cada antiderivada de $f(x)$ no intervalo pode ser expressa na forma $F(x) + C$, escolhendo-se apropriadamente a constante C.*

A integral de $f(x)$ em relação a x é igual a $F(x)$ mais uma constante.

Integral indefinida

FÓRMULA DE DIFERENCIAÇÃO	FÓRMULA DE INTEGRAÇÃO
1. $\frac{d}{dx}[x] = 1$	$\int dx = x + C$
2. $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right] = x^r \quad (r \neq -1)$	$\int x^r\, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$
3. $\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x$	$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$
4. $\frac{d}{dx}[-\cos x] = \operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$
5. $\frac{d}{dx}[\operatorname{tg} x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C$
6. $\frac{d}{dx}[-\operatorname{cotg} x] = \operatorname{cossec}^2 x$	$\int \operatorname{cossec}^2 x\, dx = -\operatorname{cotg} x + C$
7. $\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \operatorname{tg} x$	$\int \sec x \operatorname{tg} x\, dx = \sec x + C$

Integral indefinida

FÓRMULA DE DIFERENCIAÇÃO	FÓRMULA DE INTEGRAÇÃO
8. $\frac{d}{dx}[-\text{cossec } x] = \text{cossec } x \text{ cotg } x$	$\int \text{cossec } x \text{ cotg } x\, dx = -\text{cossec } x + C$
9. $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$	$\int e^x\, dx = e^x + C$
10. $\frac{d}{dx}\left[\frac{b^x}{\ln b}\right] = b^x \quad (0 < b,\ b \neq 1)$	$\int b^x\, dx = \frac{b^x}{\ln b} + C \quad (0 < b,\ b \neq 1)$
11. $\frac{d}{dx}[\ln \lvert x \rvert] = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln \lvert x \rvert + C$
12. $\frac{d}{dx}[\text{arc tg } x] = \frac{1}{1 + x^2}$	$\int \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \text{arc tg } x + C$
13. $\frac{d}{dx}[\text{arc sen } x] = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \text{arc sen } x + C$
14. $\frac{d}{dx}[\text{arc sec } \lvert x \rvert] = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}\, dx = \text{arc sec } \lvert x \rvert + C$

Integral indefinida - propriedades

5.2.3 TEOREMA *Sejam $F(x)$ e $G(x)$ antiderivadas de $f(x)$ e de $g(x)$, respectivamente, e c uma constante. Então:*

(a) *Uma constante pode ser movida através do sinal de integração; isto é,*

$$\int cf(x)\,dx = cF(x) + C$$

(b) *Uma antiderivada de uma soma é a soma das antiderivadas; isto é,*

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = F(x) + G(x) + C$$

(c) *Uma antiderivada de uma diferença é a diferença das antiderivadas; isto é,*

$$\int [f(x) - g(x)]\,dx = F(x) - G(x) + C$$

Integral indefinida - propriedades

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

Síntese dos conceitos

Integral definida - processo geométrico

Dada uma função $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(x) \geq 0$, a área entre a curva de $\boldsymbol{f}(x)$, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$, é chamada de integral definida de f, denotada por:

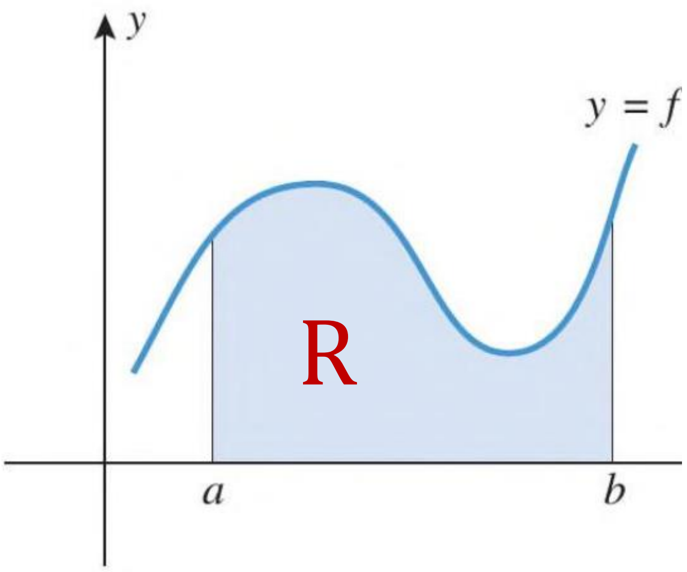
$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(x)\boldsymbol{dx}$$

Integral definida - processo geométrico

Dada uma função $y = f(x) \geq 0$, a área entre a curva de $f(x)$, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$, é chamada de integral definida de f, denotada por:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx}$$

Integral definida



$$\text{ÁreaR} = \int_a^b f(x)dx$$

Integral Indefinida - processo algébrico

- Nesse caso, o interesse é o de determinar uma função primitiva $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(x)$, tal que $\boldsymbol{F}'(x) = f(x)$.

Integral Indefinida - processo algébrico

- Nesse caso, o interesse é o de determinar uma função primitiva $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(x)$, tal que $\boldsymbol{F}'(x) = f(x)$.

- Essa função primitiva (ou antiderivada) é chamada integral indefinida e denotada por:

$$\boxed{\int \boldsymbol{f(x)dx}}$$

Integral Indefinida

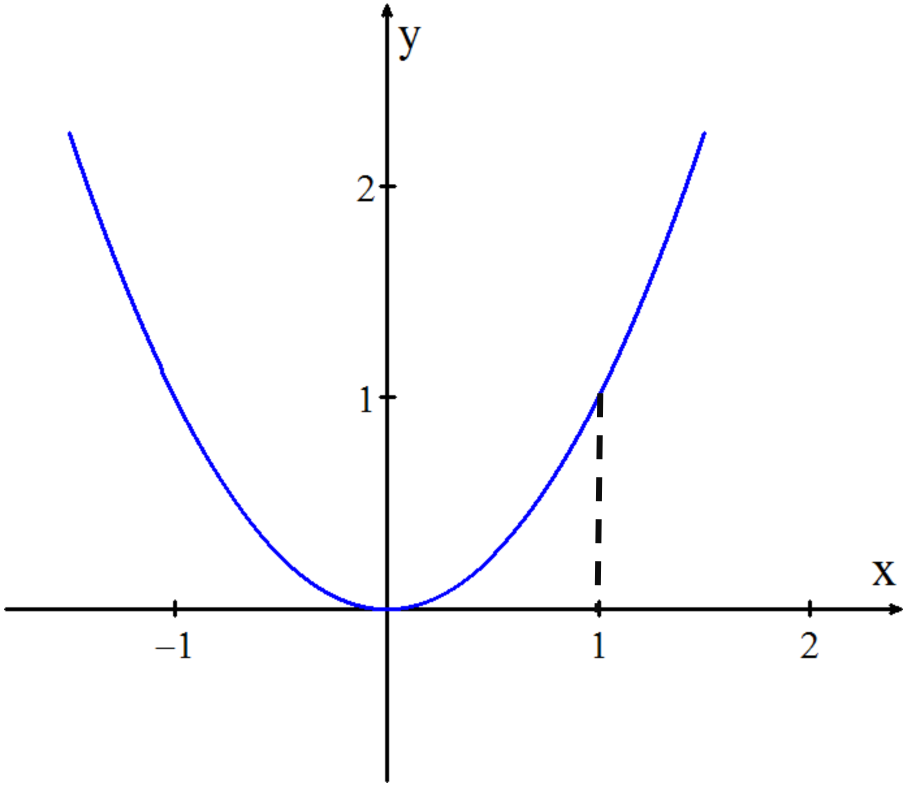
Exemplos, calcular as integrais.

a. $\int_1^3 e^x dx$

b. $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$

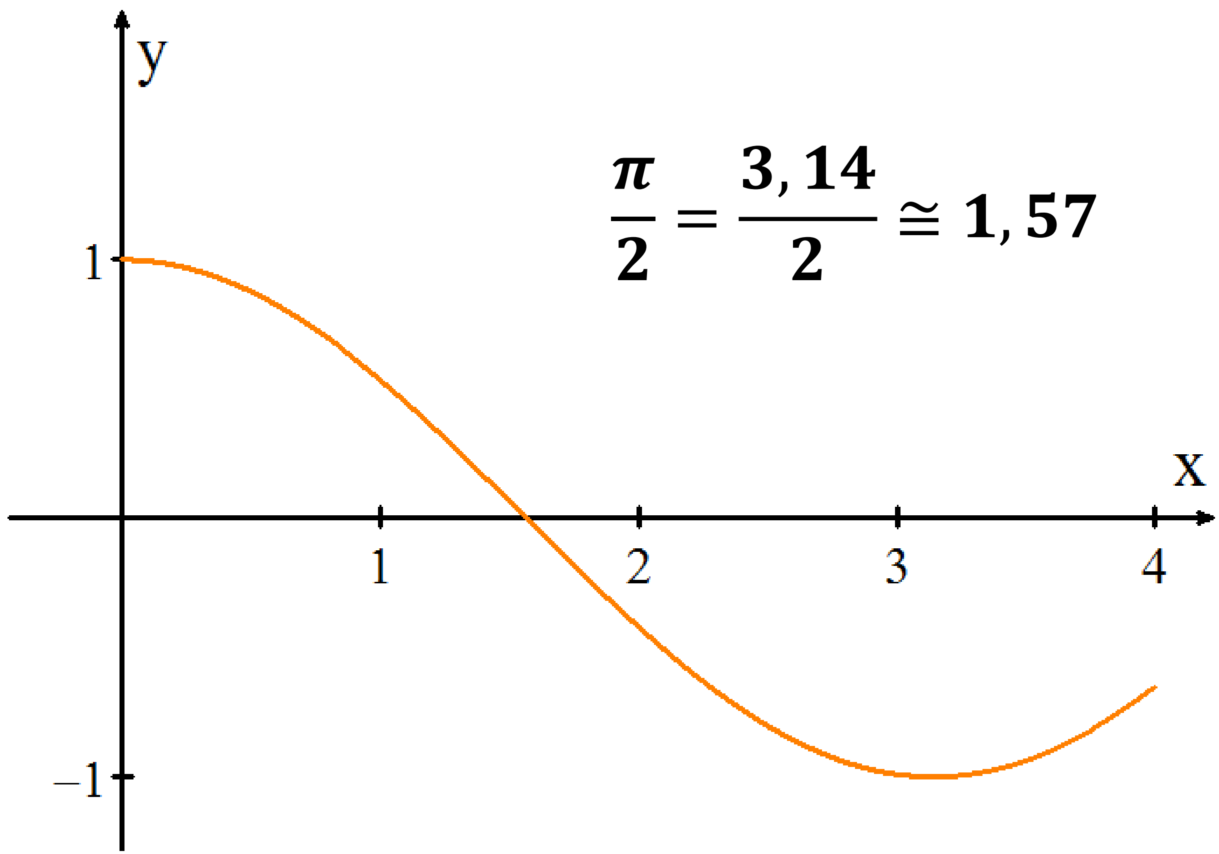
Exemplos, calcular as integrais.

c. $\int_0^1 x^2 dx = Área\ sob\ a\ parábola\ y = x^2$



Exemplos, calcular as integrais.

d. $\int_0^{\pi/2} cos x \, dx$



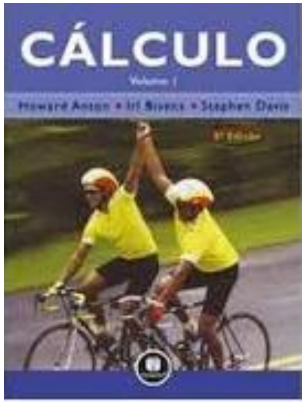
$$\frac{\pi}{2} = \frac{3,14}{2} \cong 1,57$$

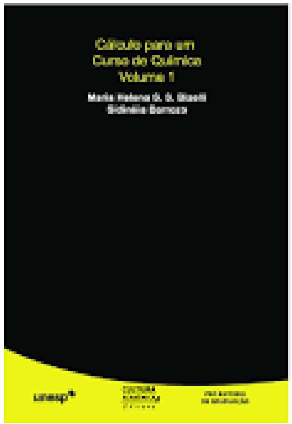
Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.

2. BIZELLI, Maria Helena S.S.; BARROZO, Sidineia. Cálculo para um Curso de Química – volume 1. 1. ed. São Paulo, Cultura Acadêmica, 2009.





Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br