CAPÍTULO 2

SEÇÃO 2.10 – página 20

1. Se $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-1}$, achar:

a) $f(0)=\dfrac{0^2-4}{0-1}=\dfrac{-4}{-1}=4$.

b) $f(-2)=\dfrac{(-2)^2-4}{(-2)-1}=\dfrac{4-4}{-3}=0$.

c) $f(1/t)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{t}\right)^2-4}{\dfrac{1}{t}-1}=\dfrac{\dfrac{1}{t^2}-4}{\dfrac{1-t}{t}}=\dfrac{1-4t^2}{t^2}\cdot\dfrac{t}{1-t}=\dfrac{1-4t^2}{t-t^2}$.

d) $f(x-2)=\dfrac{(x-2)^2-4}{x-2-1}=\dfrac{x^2-4x+4-4}{x-3}=\dfrac{x^2-4x}{x-3}$.

e) $f(1/2)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-4}{\dfrac{1}{2}-1}=\dfrac{\dfrac{1}{4}-4}{\dfrac{1}{2}-1}=\dfrac{1-16}{4}\cdot\dfrac{2}{1-2}=\dfrac{-15}{-2}=\dfrac{15}{2}$.

f) $f(t^2)=\dfrac{(t^2)^2-4}{t^2-1}=\dfrac{t^4-4}{t^2-1}$.

2. Se $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-7}$, determine:

a) $\dfrac{5\,f(-1)-2\,f(0)+3\,f(5)}{7}$

$f(-1)=\dfrac{3(-1)-1}{-1-7}=\dfrac{-3-1}{-8}=\dfrac{-4}{-8}=\dfrac{1}{2}$

$f(0)=\dfrac{3\times 0-1}{0-7}=\dfrac{-1}{-7}=\dfrac{1}{7}$

$$f(5) = \frac{3(5)-1}{5-7} = \frac{15-1}{-2} = \frac{14}{-2} = -7$$

Portanto,

$$\frac{5\ f(-1) - 2\ f(0) + 3\ f(5)}{7} =$$

$$= \frac{5\ \frac{1}{2} - 2\ \frac{1}{7} + 3\ (-7)}{7}$$

$$= \frac{\frac{5}{2} - \ \frac{2}{7} - 21}{7}$$

$$= \frac{35 - \ \ 4 - 294}{14} \cdot \frac{1}{7}$$

$$= \frac{-263}{14} \cdot \frac{1}{7} = \frac{-263}{98}$$

b)

$$[f(-1/2)]^2 = \left(\frac{3\frac{-1}{2} - 1}{-\frac{1}{2} - 7} \right)^2$$

$$\left(\frac{\frac{-3-2}{2}}{\frac{-1-14}{2}} \right)^2 = \left(\frac{-5}{2} \cdot \frac{2}{-15} \right)^2 = \frac{1}{9}$$

c) $f(3x-2) = \dfrac{3(3x-2)-1}{3x-2-7} = \dfrac{9x-7}{3x-9}$.

d) $f(t) + f(4/t) =$

$$= \frac{3t-1}{t-7} + \frac{3\left(\frac{4}{t}\right) - 1}{\frac{4}{t} - 7} = \frac{3t-1}{t-7} + \frac{12-t}{t} \cdot \frac{t}{4-7t}$$

$$= \frac{(3t-1)(4-7t) + (12-t)(t-7)}{4t - 7t^2 - 28 + 49} = \frac{12t - 21t^2 - 4 + 7t + 12t - 84 - t^2 + 7t}{-7t^2 + 53t - 28}$$

$$= \frac{-22t^2 + 38t - 88}{-7t^2 + 53t - 28}.$$

e) $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=$

$$=\left(\frac{3h-1}{h-7}-\frac{3\cdot 0-1}{0-7}\right)\cdot\frac{1}{h}$$
$$=\left(\frac{3h-1}{h-7}-\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{1}{h}$$
$$=\frac{21h-7-1(h-7)}{7(h-7)}\cdot\frac{1}{h}$$
$$=\frac{20h}{7(h-7)}\cdot\frac{1}{h}$$
$$=\frac{20}{7(h-7)}$$

f) $f[f(5)]$

$$f(5)=\frac{3\cdot 5-1}{5-7}=\frac{14}{-2}=-7$$

$$f[f(5)]=f(-7)=\frac{3(-7)-1}{(-7)-7}=\frac{-21-1}{-14}=\frac{-22}{-14}=\frac{11}{7}.$$

3. Dada a função $f(x)=|x|-2x$, calcular. $f(-1)$, $f(1/2)$ e $f(-2/3)$. Mostrar que $f(|a|)=-|a|$.

$$f(-1)=|-1|-2(-1)=1+2=3$$
$$f(1/2)=|1/2|-2\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-1=\frac{1-2}{2}=\frac{-1}{2}.$$
$$f(-2/3)=|-2/3|-2\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{6}{3}=2.$$

$$\begin{aligned} f(|a|) &= ||a||-2\,|a| \\ &= |a|-2\,|a| \\ &= -|a| \end{aligned}$$

4. Se $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ e $d=-a$, mostre que $f(f(x))=x$

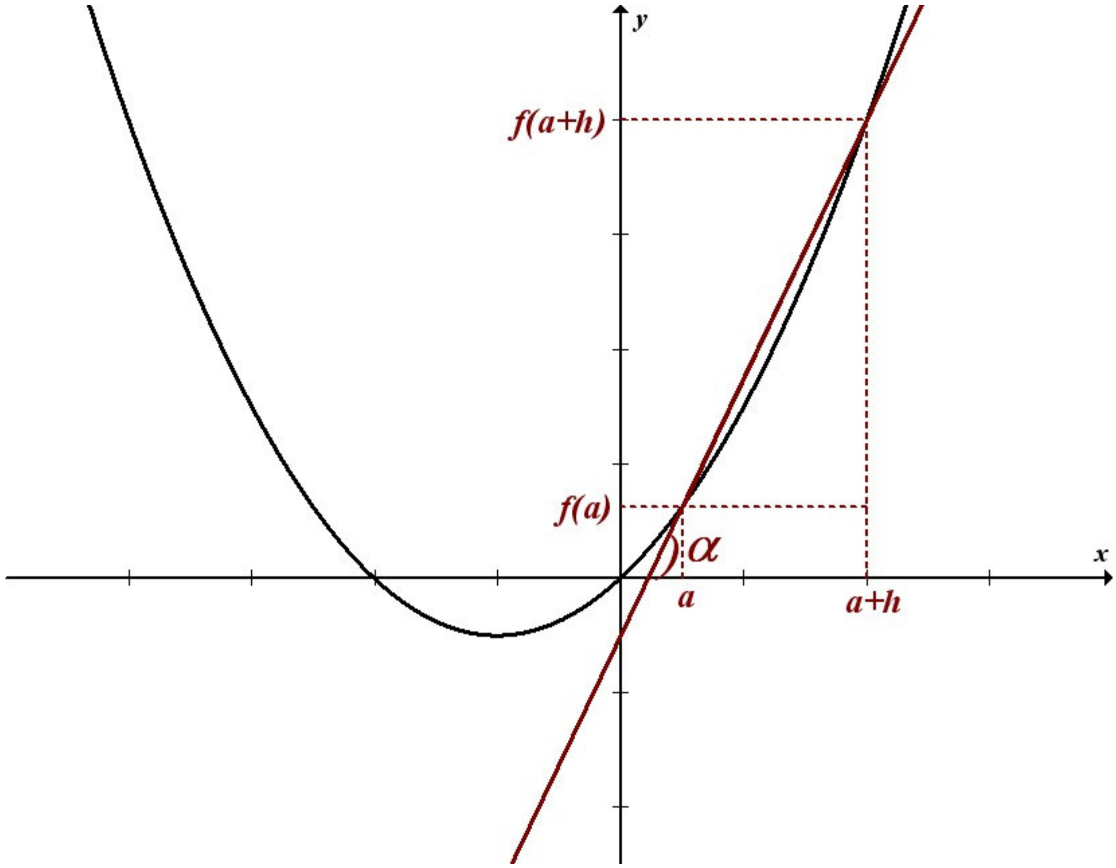
$$f(x)=\frac{ax+b}{cx-a}$$

$$\begin{aligned}
f(f(x)) &= f\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) \\
&= \frac{a\cdot\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+b}{c\cdot\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+(-a)} \\
&= \frac{\frac{a\,(ax+b)}{cx-a}+b}{\frac{c\,(ax+b)}{cx-a}-a} \\
&= \frac{a(ax+b)+b(cx-a)}{cx-a}\cdot\frac{cx-a}{c(ax+b)-a(cx-a)} \\
&= \frac{a^2x+ab+bcx-ab}{cax+cb-acx+a^2} \\
&= \frac{a^2x+bcx}{cb+a^2}=\frac{x(a^2+bc)}{a^2+bc}=x
\end{aligned}$$

5. Se $f(x)=x^2+2x$, achar $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $h\neq 0$ e interpretar o resultado geometricamente.

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2+2(a+h)-(a^2+2a)}{h} \\
&= \frac{a^2+2ah+h^2+2a+2h-a^2-2a}{h}=\frac{h(2a+h+2)}{h} \\
&= 2a+2+h
\end{aligned}$$

A Figura que segue mostra a interpretação geométrica. Nesta figura, α é o ângulo formado pela reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(a+h, f(a+h))$ e o eixo positivo dos x. O quociente obtido representa a tangente do ângulo α.



6. Dada $\Phi(x)=\dfrac{x-1}{2x+7}$. Forme as expressões $\Phi(1/x)$ e $1/\Phi(x)$.

$$\Phi(1/x)=\frac{1/x-1}{2\cdot\frac{1}{x}+7}=\frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{2+7x}{x}}=\frac{1-x}{x}\cdot\frac{x}{2+7x}=\frac{1-x}{2+7x}.$$

$$\frac{1}{\Phi(x)}=\frac{1}{\frac{x-1}{2x+7}}=\frac{2x+7}{x-1}.$$

7. Dada a função $f(x)=x^2+1$, mostrar que para $a\neq 0$ $f(1/a)=f(a)/a^2$.

$$f(1/a)=\left(\frac{1}{a}\right)^2+1=\frac{1}{a^2}+1=\frac{1+a^2}{a^2}=\frac{f(a)}{a^2}, \text{ para } a\neq 0.$$

8. Dada a função $f(x)=\dfrac{1}{x}$, mostrar que $f(1+h)-f(1)=-\dfrac{h}{1+h}$. Calcular.

$f(a+h)-f(a)$.

$$f(1+h)-f(1)=\frac{1}{1+h}-\frac{1}{1}=\frac{1-1-h}{1+h}=\frac{-h}{1+h}$$

$$f(a+h)-f(a)=\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}=\frac{a-a-h}{a(a+h)}=\frac{-h}{a(a+h)}$$

9. Seja $f(n)$ a soma dos n termos de uma progressão aritmética. Demonstrar que $f(n+3)-3\,f(n+2)+3f(n+1)-f(n)=0$.

$$\begin{aligned} f(n) &= a_1+a_1+r+a_1+2r+\cdots+a_1+(n-1)r \\ &= na_1+(1+2+3+\cdots+(n-1)\,)r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(n+3) &= (n+3)a_1+[1+2+\cdots+(n+2)]\,r \\ f(n+2) &= (n+2)a_1+[1+2+\cdots+(n+1)]\,r \\ f(n+1) &= (n+1)a_1+[1+2+\cdots+n]\,r \end{aligned}$$

$$(n+3)a_1+[1+2+\cdots+(n+2)]r-3(n+2)a_1-3\,[1+2+\cdots+(n+1)]r+3(n+1)a_1+3[1+2+\cdots+n]r-$$
$$-na_1-[1+2+\cdots+(n-1)]r$$

$$=na_1+3a_1-3\,na_1-6a_1+3\,na_1+3a_1-na_1+[1+2+\cdots+(n+2)]r-3[1+2+\cdots+(n+1)]r+$$
$$+3[1+2+\cdots+n]r-[1+2+\cdots+(n+1)]\,r$$
$$=-3\,[1+2+\cdots+n]r-3(n+1)r+3[1+2+\cdots+n]r+[1+2+\cdots+n]r+$$
$$(n+1)r+(n+2)r-[1+2+\cdots+(n+1)]r$$
$$=-3(n+1)r+[1+2+\cdots+(n+1)]r+nr+(n+1)r+(n+2)r-[1+2+\cdots+(n+1)]r$$
$$=-3(n+1)r+nr+(n+1)r+(n+2)r$$
$$=-3nr-3r+nr+nr+r+nr+2r$$
$$=0$$

10. Exprimir como a função de x

a) A área de uma esfera de raio x

$A=4\pi x^2$.

b) A área de um cubo de aresta x

$A_{face}=x^2$

$A_{total} = 6 \cdot A_{face} = 6x^2$
$f(x) = 6x^2$

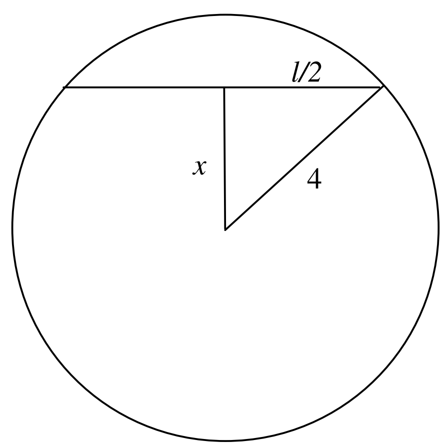
c) A área total de uma caixa de volume dado V, sabendo que a base é um quadrado de lado x.

$V = x^2 \times h$ sendo h a altura

$$A_t = 4 \cdot (x \quad \cdot h) + 2x^2$$
$$A_t = 4 \cdot \left(x \quad \cdot \frac{V}{x^2}\right) + 2x^2$$
$$A_t = \frac{4V}{x} + 2x^2$$
$$f(x) = \frac{4V}{x} + 2x^2$$

11. Exprimir o comprimento l de uma corda de um círculo de raio $4cm$ como uma função de sua distância $x\ cm$ ao centro do círculo.

A figura que segue mostra o círculo com os dados do problema, com o triângulo retângulo assinalado.



$$16 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + x^2$$
$$\frac{\ell^2}{4} = 16 - x^2$$
$$\ell^2 = 4(16 - x^2)$$
$$\ell = \sqrt{4(16 - x^2)}$$
$$\ell = 2\sqrt{16 - x^2}$$

12. Seja $f(x)=(x-2)(8-x)$ para $2 \le x \le 8$

a) Determine $f(5)$, $f(-1/2)$ e $f(1/2)$

$f(5)=(5-2)(8-5)=3\cdot 3=9$
$f(-1/2)=\nexists$
$f(1/2)=\nexists$

b) Qual o domínio da função $f(x)$?
$D(f)=[2,8]$

c) Determine $f(1-2t)$ e indique o domínio.

$$f(1-2t)=(1-2t-2)(8-1+2t)$$
$$=(-2t-1)(7+2t)=-4t^2-16t-7$$

O domínio é obtido como segue:

$2 \le x \le 8$
$2 \le 1-2t \le 8$
$1 \le -2t \le 7$
$-1 \ge 2t \ge -7$
$\frac{-7}{2} \le t \le \frac{-1}{2}$

Portanto, o domínio de $f(1-2t)$ é:

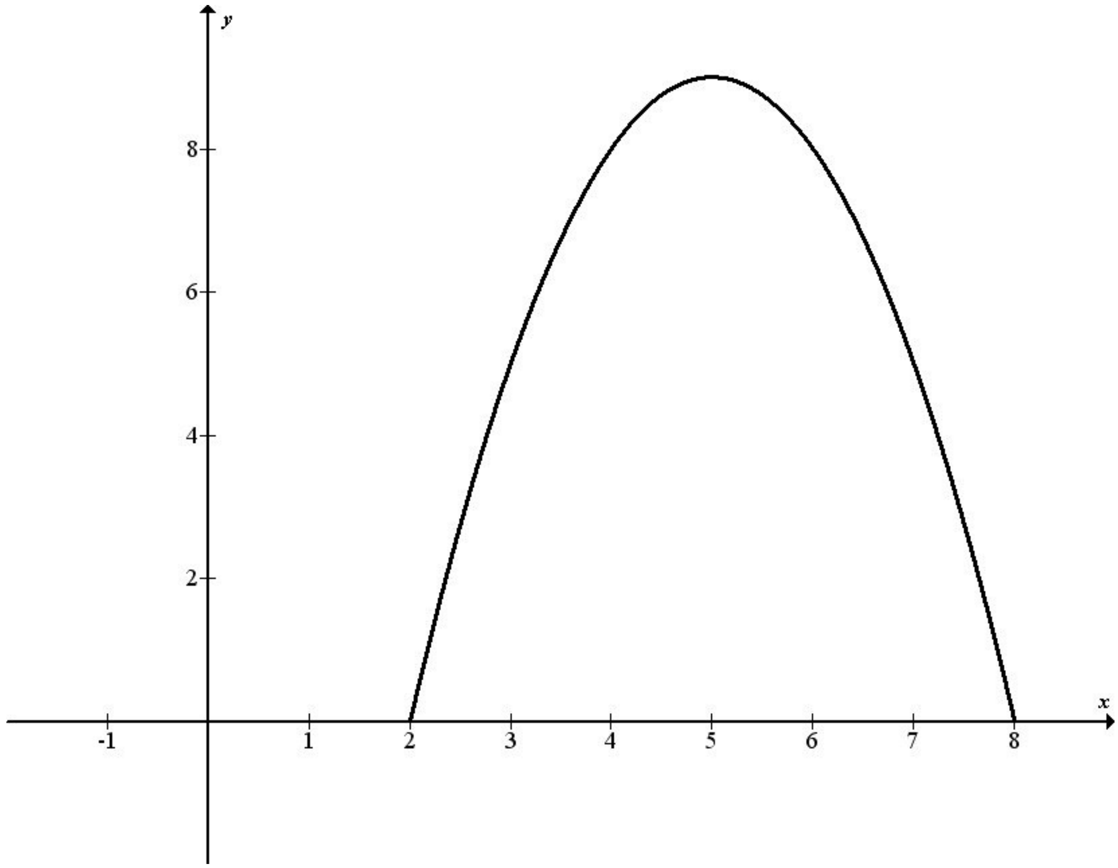
$$\left[\frac{-7}{2},\frac{-1}{2}\right]$$

d) Determine $f[f(3)]$ e $f[f(5)]$

$f(3)=(3-2)(8-3)=1\cdot 5=5$
$f[f(3)]=f(5)=(5-2)(8-5)=3\cdot 3=9$

$f(5)=(5-2)(8-5)=3\cdot 3=9$
$f[f(5)]=f(9)=\nexists$

e) Trace o gráfico de $f(x)$



13. Determinar o domínio das seguintes funções:

a) $y = x^2$ IR

b) $y = \sqrt{4 - x}^{\,2}$ $4 - x^2 \geq 0$
 $(2 - x)(2 + x) \geq 0$ $[-2, 2]$

c) $y = \dfrac{1}{x - 4}$ $IR - \{4\}$

d) $y = \sqrt{x - 2}$ $x - 2 \geq 0$
 $x \geq 2$ $[2, +\infty]$

e) $y = \sqrt{x^2 - 4x} + 3$ $x^2 - 4x + 3 \geq 0$
 $(x - 3)(x - 1) \geq 0$
 $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$

f) $y = \sqrt{3 + x} + \sqrt[4]{7 - x}$ $3 + x \geq 0$
 $x \geq -3$ e $7 - x \geq 0$
 $x \leq 7$ $[-3, 7]$

g) $y = \sqrt[3]{x+7} - \sqrt[5]{x+8}$ $\quad IR$

h) $y = \dfrac{x+a}{x-a}$ $\quad IR - \{a\}$

i) $y = |x+2| + 4$ $\quad -5 \le x \le 2$ $\quad$ [-5, 2]

j) $y = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

1º. Caso:

$$\begin{array}{lcll} x+1>0 & \text{e} & x \ge 0 & \\ x>-1 & & x \ge 0 & \end{array} \qquad \text{Solução Parcial: } [0,+\infty)$$

2º. Caso:

$$\begin{array}{lcll} x+1<0 & \text{e} & x \le 0 & \\ x<-1 & & x \le 0 & \end{array} \qquad \text{Solução Parcial: } (-\infty,-1)$$

Portanto, o domínio é $[0, +\infty) \cup (-\infty, -1)$.

k) $y = x - \dfrac{1}{x}$ $\quad IR - \{0\}$

l) $y = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ $\quad x \ge 0$ e $1+\sqrt{x} \ne 0$

Como $1+\sqrt{x} \ne 0, \forall x$, o domínio é $[0, +\infty)$.

14. Usando uma ferramenta gráfica, traçar as curvas definidas pelas equações dadas, identificando as que representam o gráfico de uma função $y = f(x)$. Neste caso, determine a função, o domínio e o conjunto imagem.

Temos:

(a) $y = 3x - 1$, IR, IR

(b) $y = x^2$, IR, IR_+

(c) Não é função $y = f\ (x)$

(d) $y = -\sqrt{4 - x^2}$, $[-2, 2]$, $[-2, 0]$

(e) Não é função

(f) $y = \dfrac{1}{x}$, $IR - \{0\}$, $IR - \{0\}$

(g) $y = x^2 + 11$, IR, $[11, +\infty)$

Seguem os gráficos

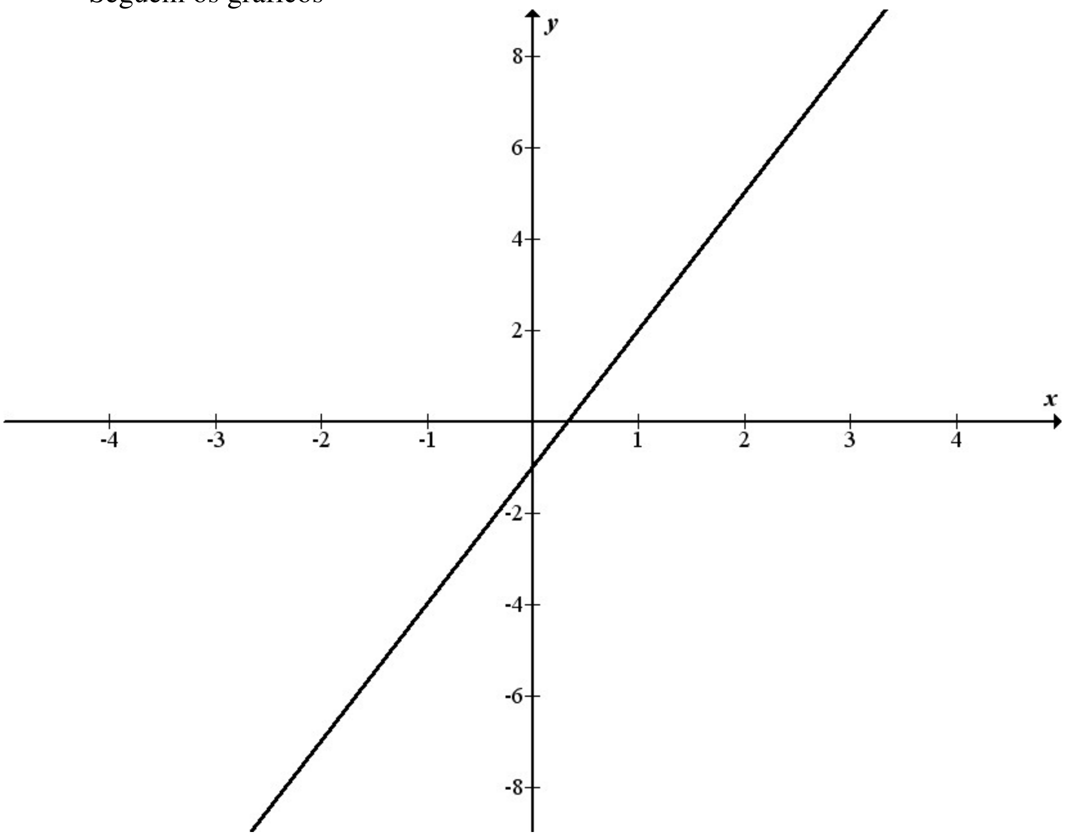


Gráfico da função do item (a)

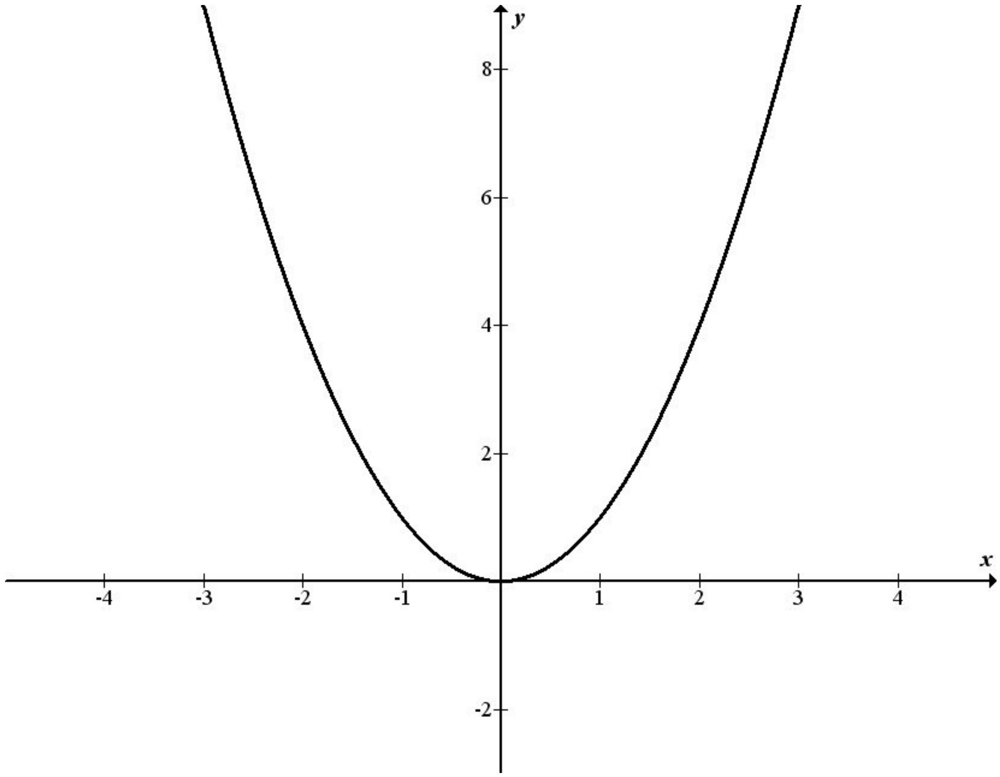


Gráfico da função do item (b)

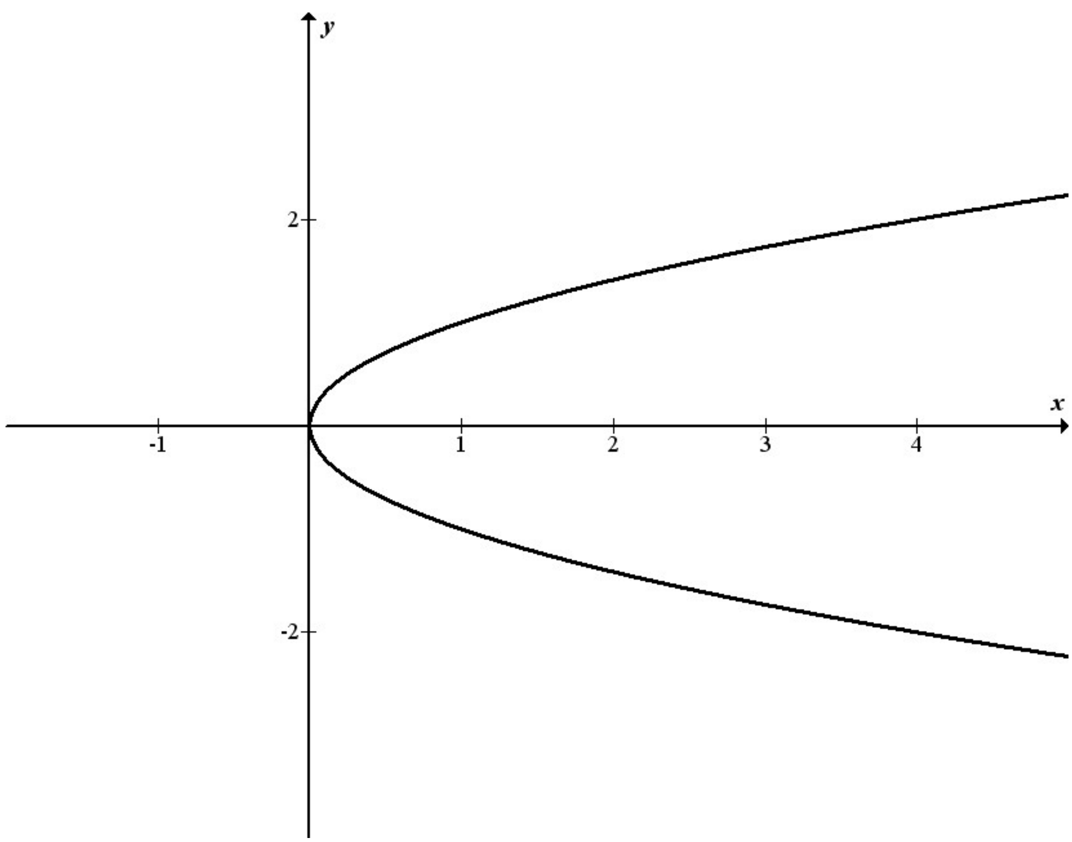


Gráfico da curva do item (c)

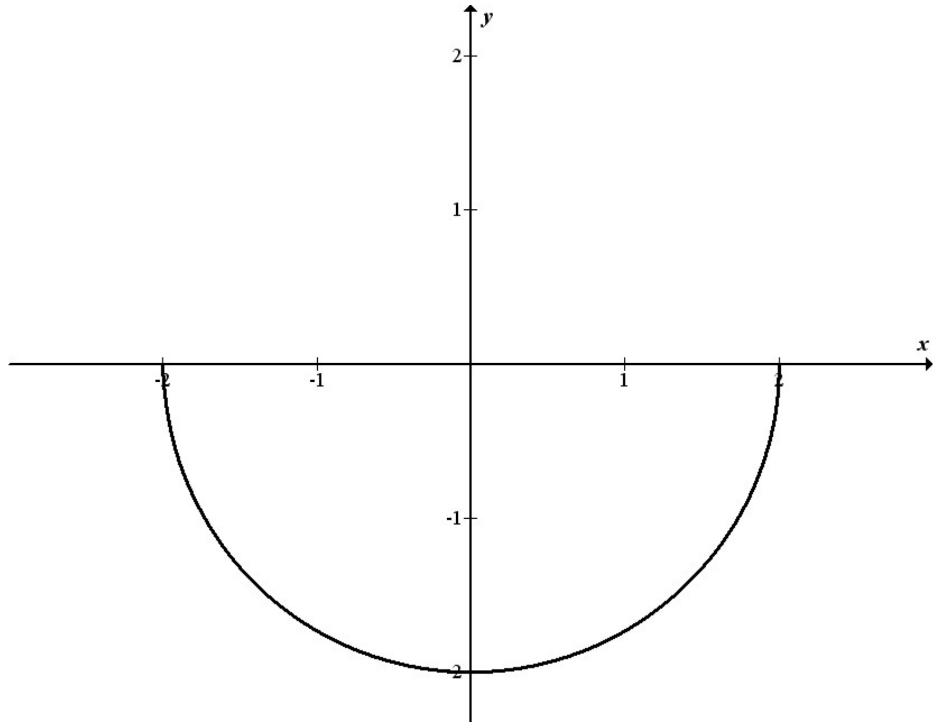


Gráfico da função do item (d)

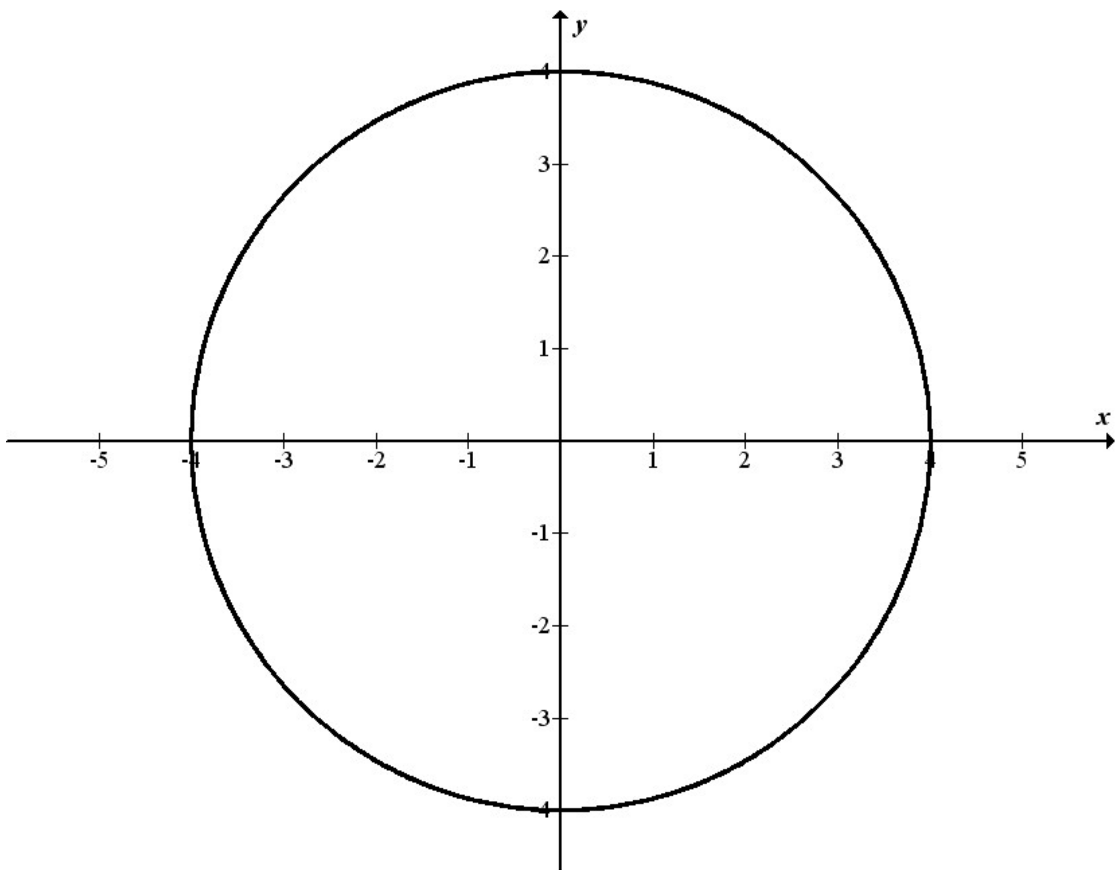


Gráfico da curva do item (e)

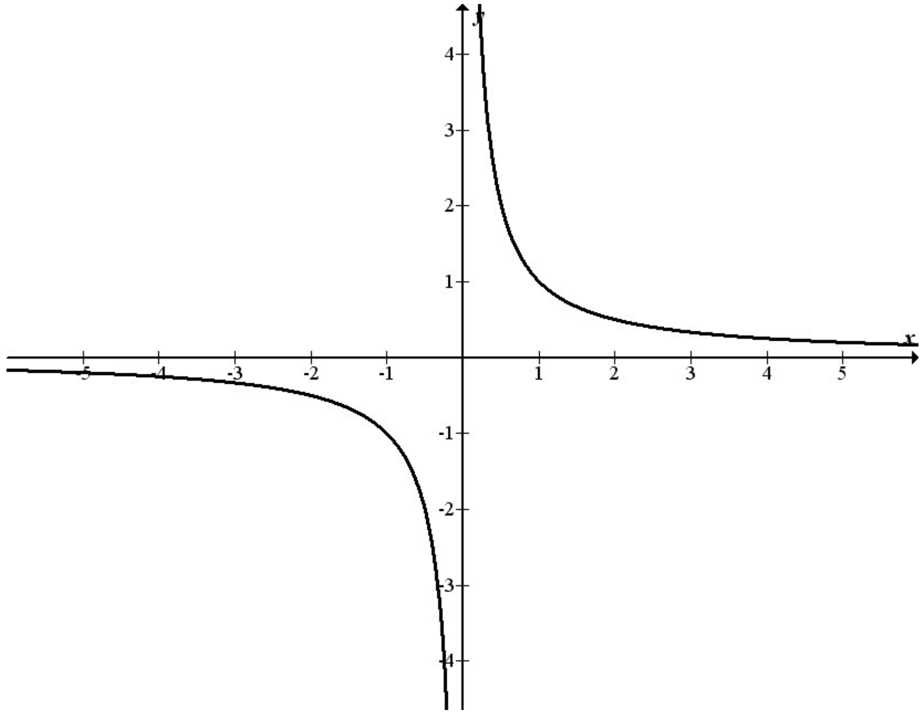


Gráfico da função do item (f)

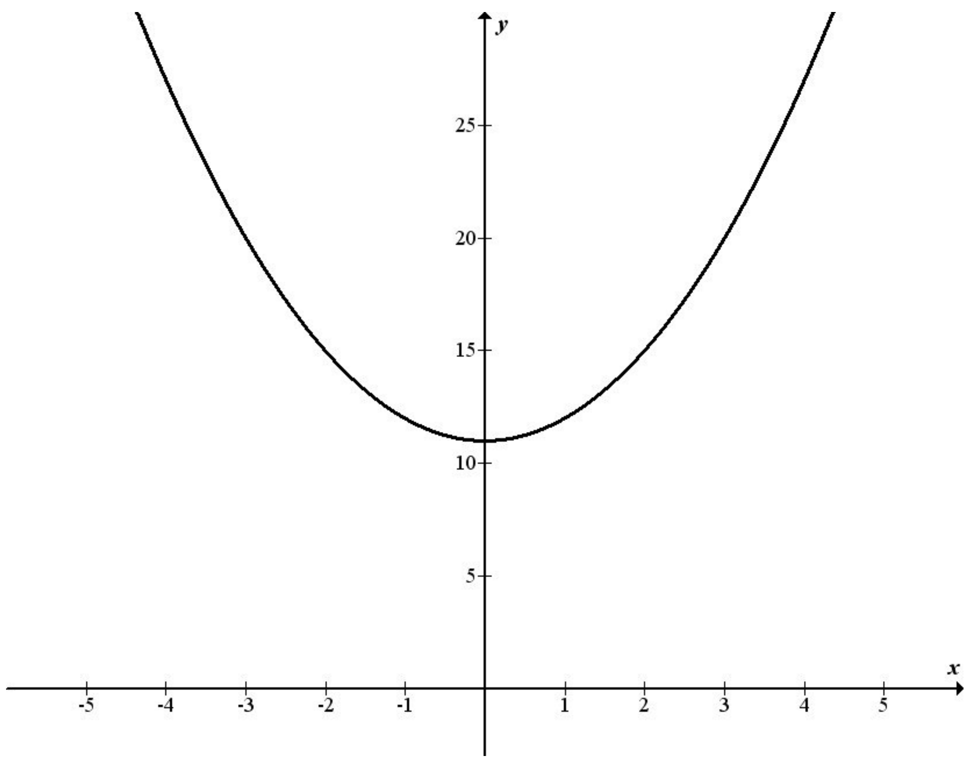
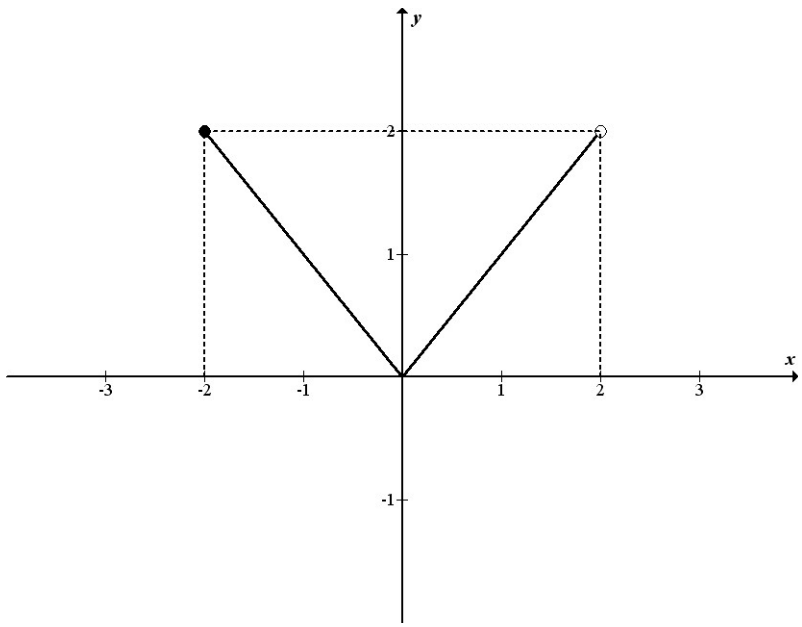


Gráfico da função do item (g)

15. Construir o gráfico, determinar o domínio e o conjunto imagem das seguintes funções:

(a) $f(x) = \begin{cases} -x, -2 \leq x \leq 0 \\ x, 0 < x < 2 \end{cases}$

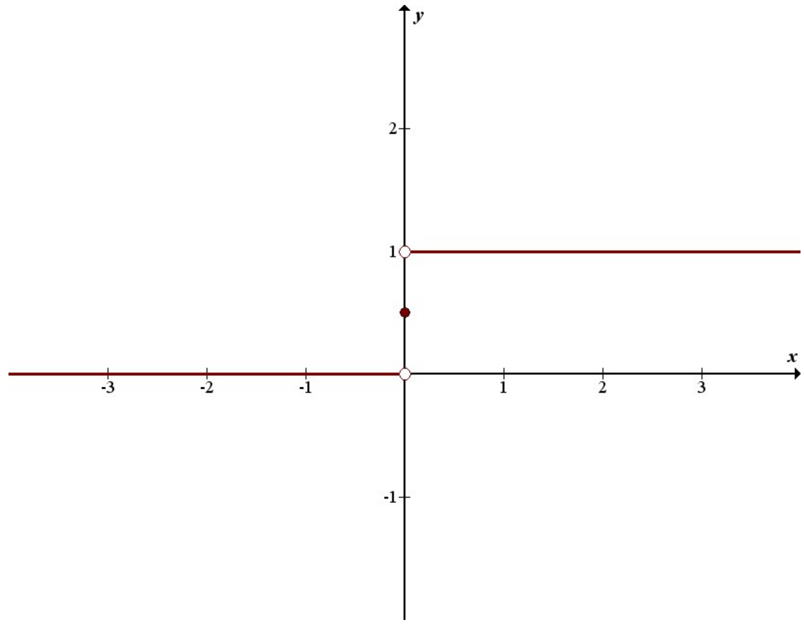
Respostas do domínio e imagens: (a) $[-2,\, 2),\, [0,\, 2]$



(b)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x < 0 \\ 1/2, & se \quad x = 0 \\ 1, & se \quad x > 0 \end{cases}$$

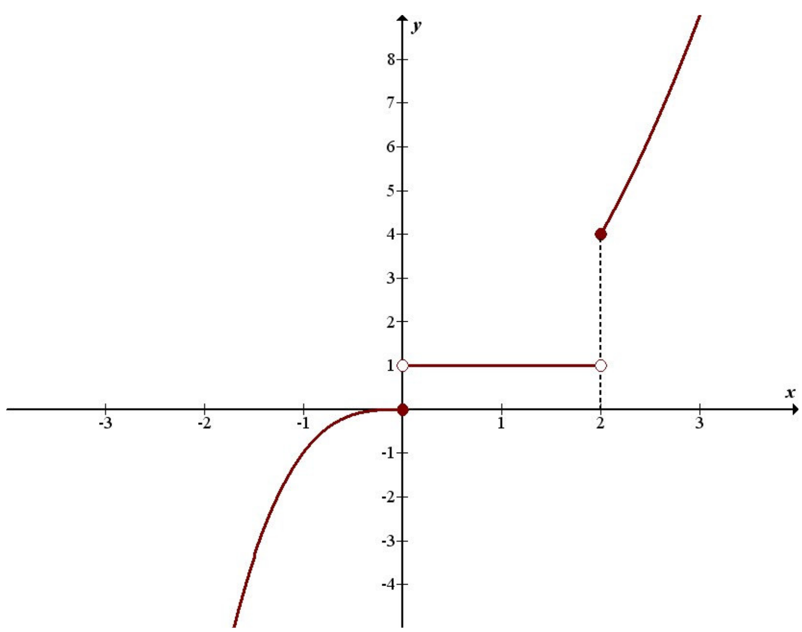
Resposta do Domínio e conjunto Imagem: $IR, \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$



(c)

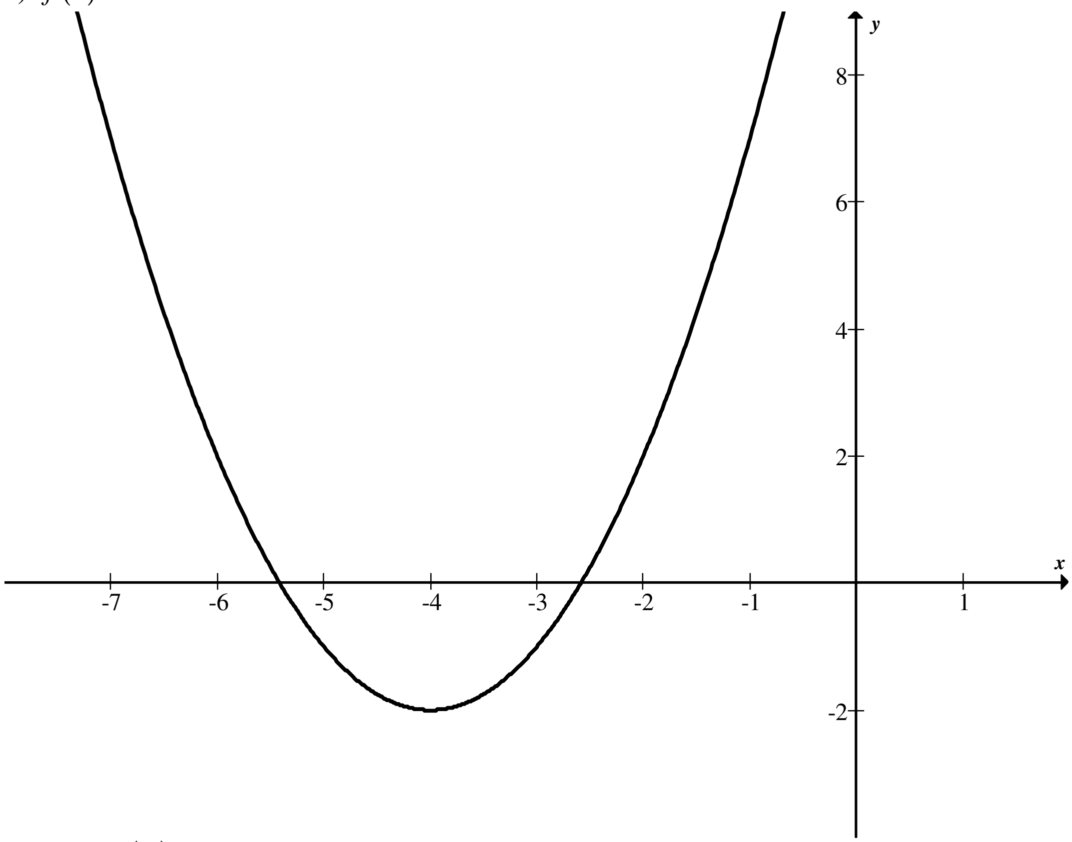
$$f(x) = \begin{cases} x^3, & se \quad x \leq 0 \\ 1, & se \quad 0 < x < 2 \\ x^2, & se \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Resposta do domínio e conjunto imagem: $IR, (-\infty, 0] \cup \{1\} \cup [4, +\infty)$



16. Identificar as propriedades e características das seguintes funções a partir das suas representações gráficas (domínio, conjunto imagem, raízes, máximos e mínimos, crescimento e decrescimento).

a) $f(x) = x^2 + 8x + 14$



$D(f) = IR$

Conjunto Imagem : $[-2, +\infty)$

Raízes: $-\sqrt{2} - 4$ e $\sqrt{2} - 4$

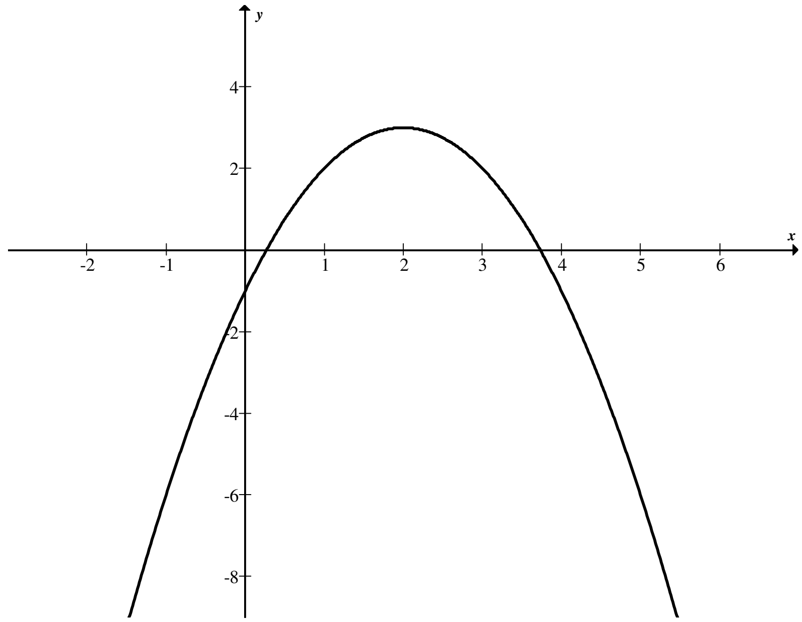
Ponto de mínimo em $x = -4$

Valor mínimo: -2

Intervalo de crescimento: $[-4, +\infty)$

Intervalo de decrescimento: $(-\infty, -4]$

b) $f(x) = -x^2 + 4x - 1$



$D = IR$

Conjunto Imagem: $(-\infty, 3]$

Raízes: $2-\sqrt{3}$ e $2+\sqrt{3}$

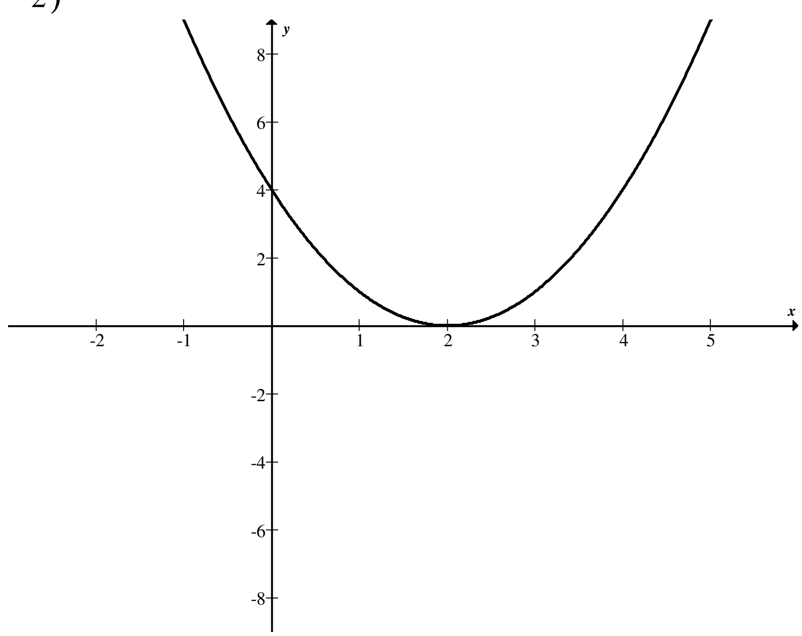
Ponto de máximo em $x = 2$

Valor máximo: 3

Intervalo de crescimento: $(-\infty, 2]$

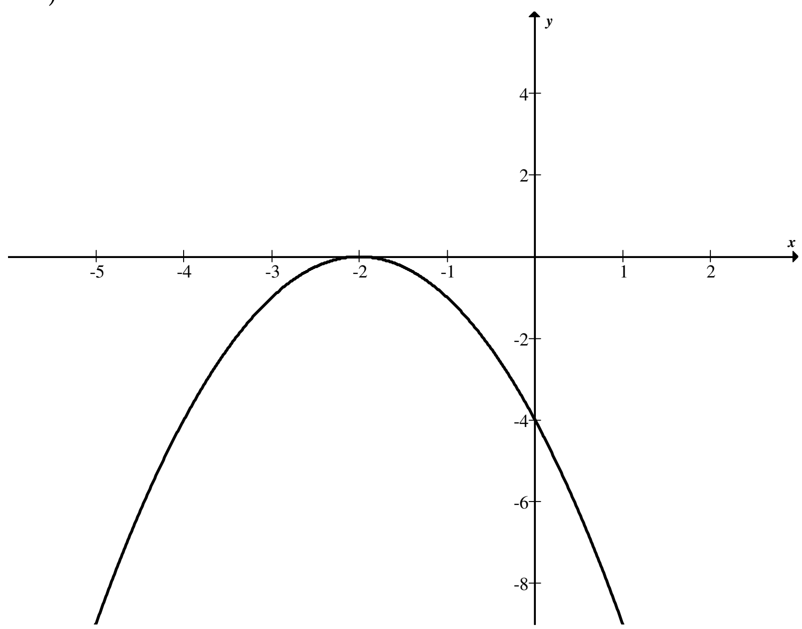
Intervalo de decrescimento: $[2, +\infty)$

c) $y = (x-2)^2$



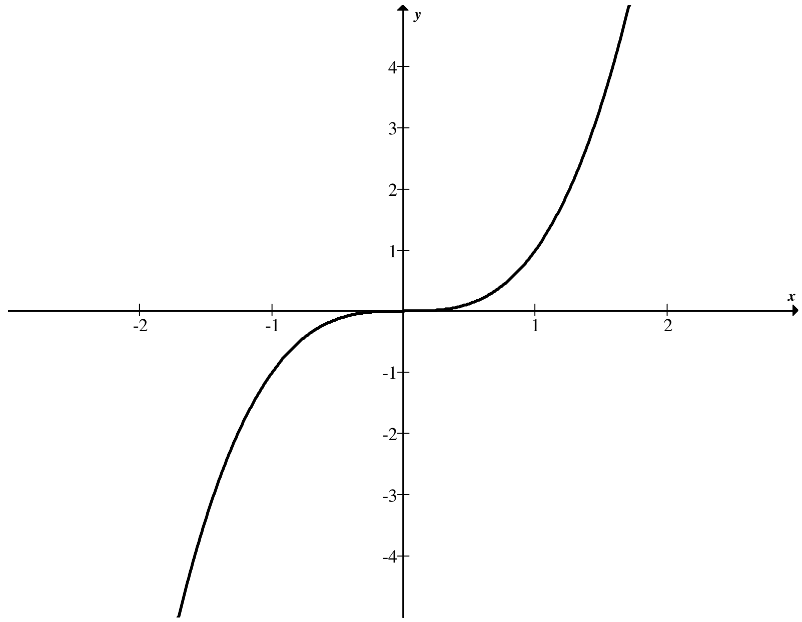
$D = IR$
Conjunto imagem: $[0, +\infty)$
Raíz: 2
Ponto de mínimo em $x = 2$
Valor mínimo: 0
Intervalo de crescimento: $[2, +\infty)$
Intervalo de decrescimento: $(-\infty, 2]$

d) $y = -(x+2)^2$



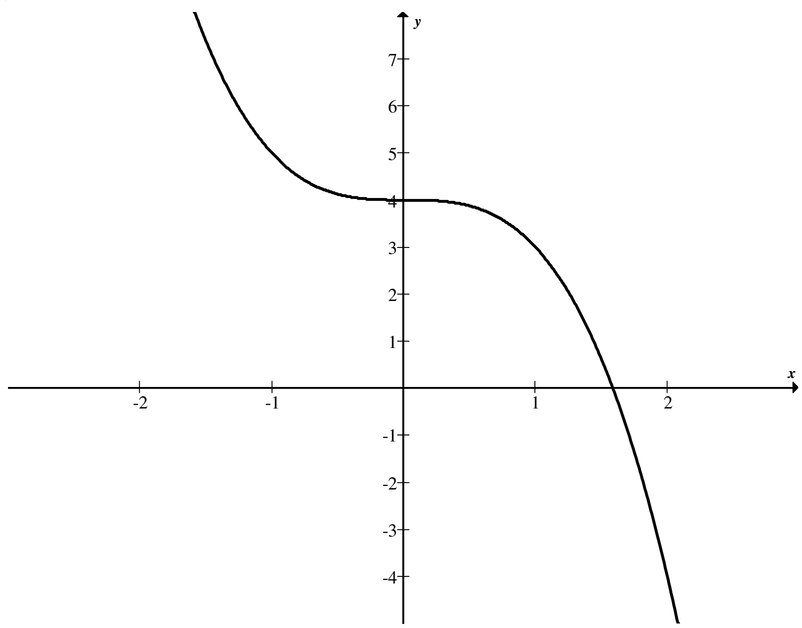
$D = IR$
Conjunto imagem: $(-\infty, 0]$
Raíz: -2
Ponto de máximo em $x = -2$
Valor máximo: 0
Intervalo de crescimento: $(-\infty, -2]$
Intervalo de decrescimento: $[-2, +\infty)$

e) $y = x^3$



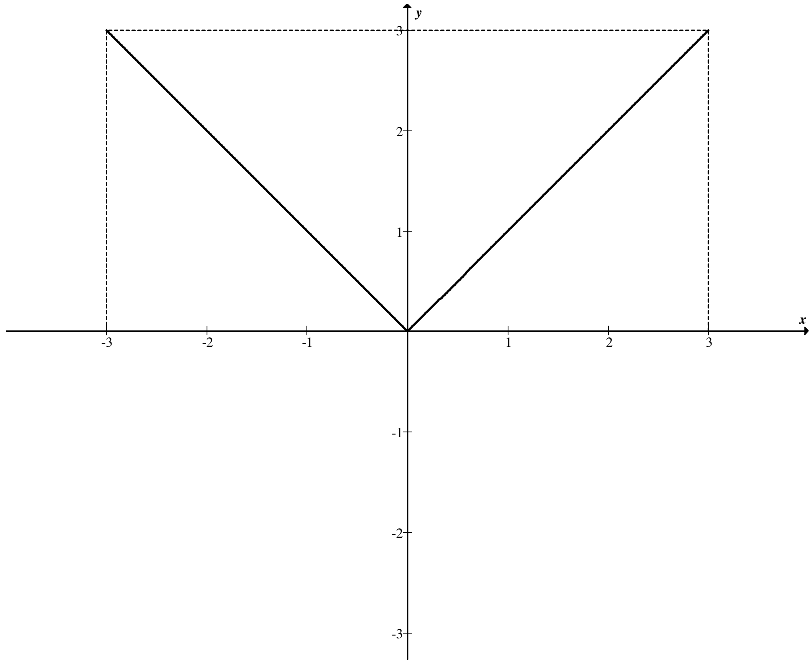
$D = IR$
Conjunto Imagem: IR
Raiz: 0
Intervalo de Crescimento: $(-\infty, +\infty)$

f) $y = 4 - x^3$



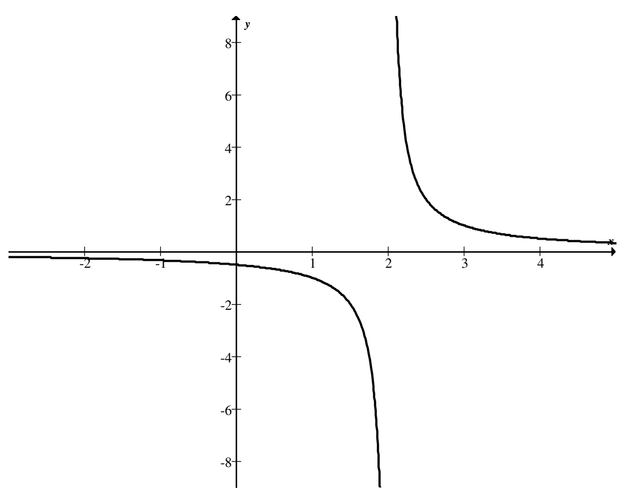
$D = IR$
Conjunto Imagem: IR
Raízes: Uma raiz real com valor aproximado de 1,59
Intervalo de decrescimento: $(-\infty, +\infty)$

g) $f(x)=|x|,\ -3 \le x \le 3$



$D = [-3, 3]$
Conjunto Imagem: $[0, 3]$
Raiz: 0
Ponto de mínimo em $x = 0$
Valor mínimo: 0
Pontos de máximo em -3 e 3
Valor máximo: 3
Intervalo de crescimento: $[0, 3]$
Intervalo de decrescimento: $[-3, 0]$

h) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

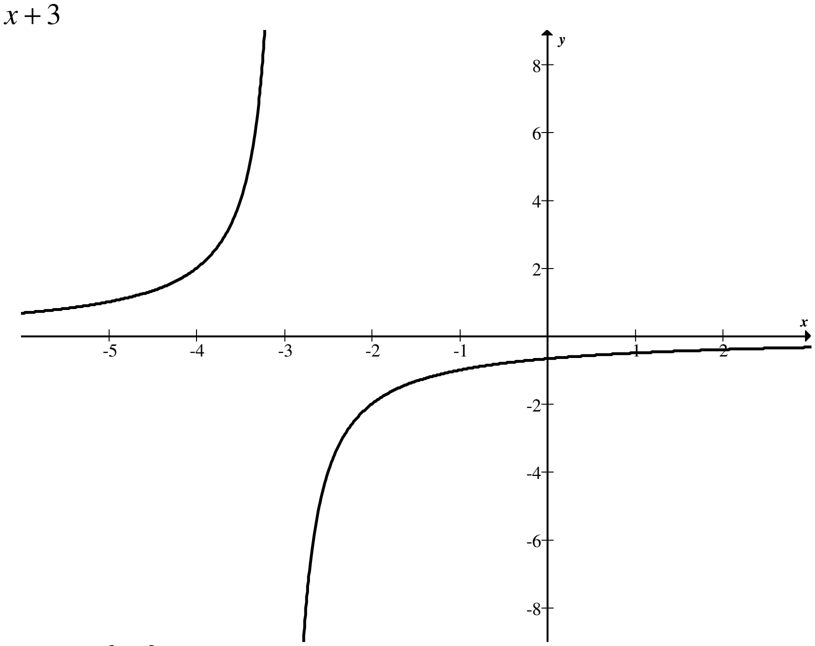


$D = IR - \{2\}$

Conjunto Imagem: $IR - \{0\}$

Intervalos de decrescimento: $(-\infty, 2)$ e $(2, +\infty)$

i) $f(x) = \dfrac{-2}{x+3}$

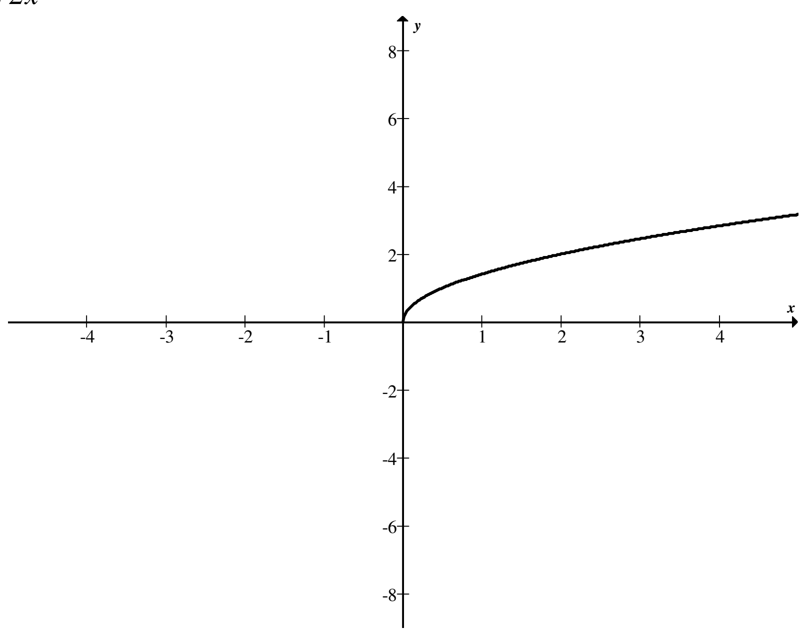


$D = IR - \{-3\}$

Conjunto Imagem: $IR - \{0\}$

Intervalo de crescimento: $(-\infty, -3)$ e $(-3, +\infty)$

j) $f(x) = \sqrt{2x}$



$D = [0, +\infty)$
Conjunto Imagem: $[0, +\infty)$
Raiz: $x = 0$
Ponto de mínimo em $x = 0$
Valor mínimo: 0
Intervalo de crescimento: $[0, +\infty)$

17. Para cada uma das seguintes funções $f(x)$ esboce primeiro o gráfico de $y = f(x)$, depois o gráfico de $y = |f(x)|$ e finalmente o gráfico de $y = \dfrac{f(x)}{2} + \dfrac{|f(x)|}{2}$.

a) $f(x) = (x-2)(x+1)$

Solução:

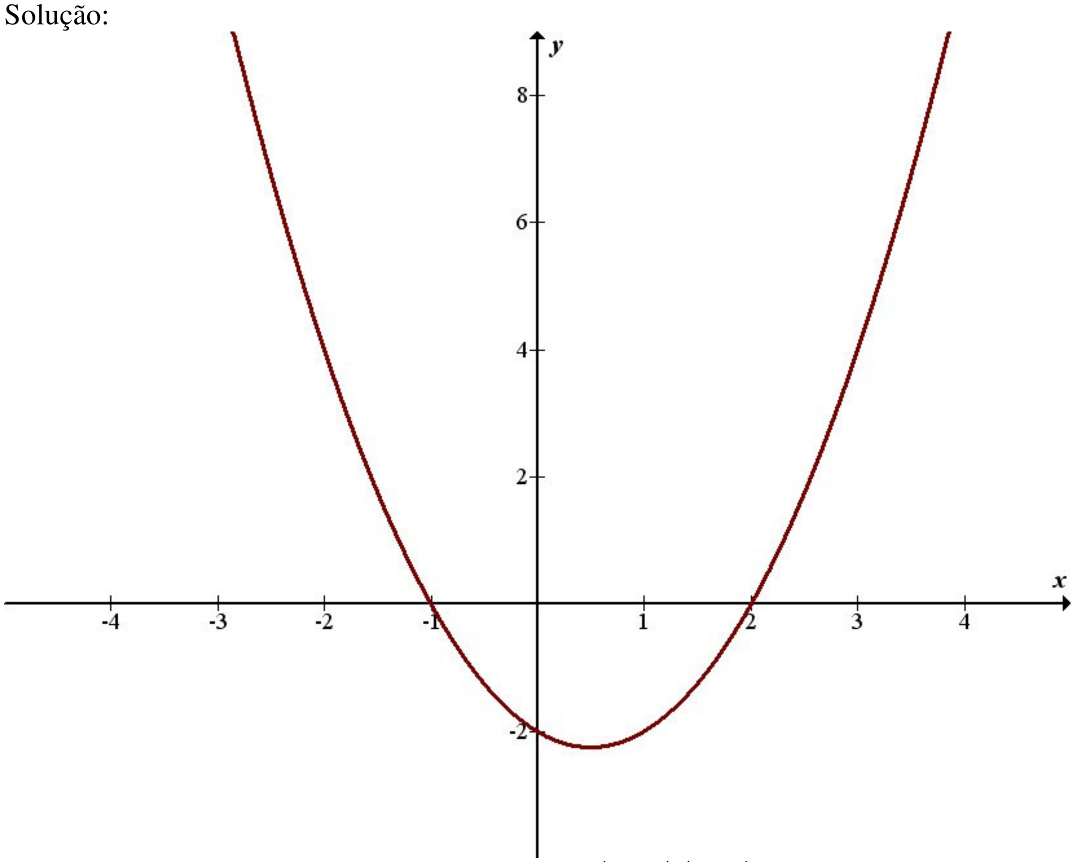


Gráfico da função $y = (x-2)(x+1)$

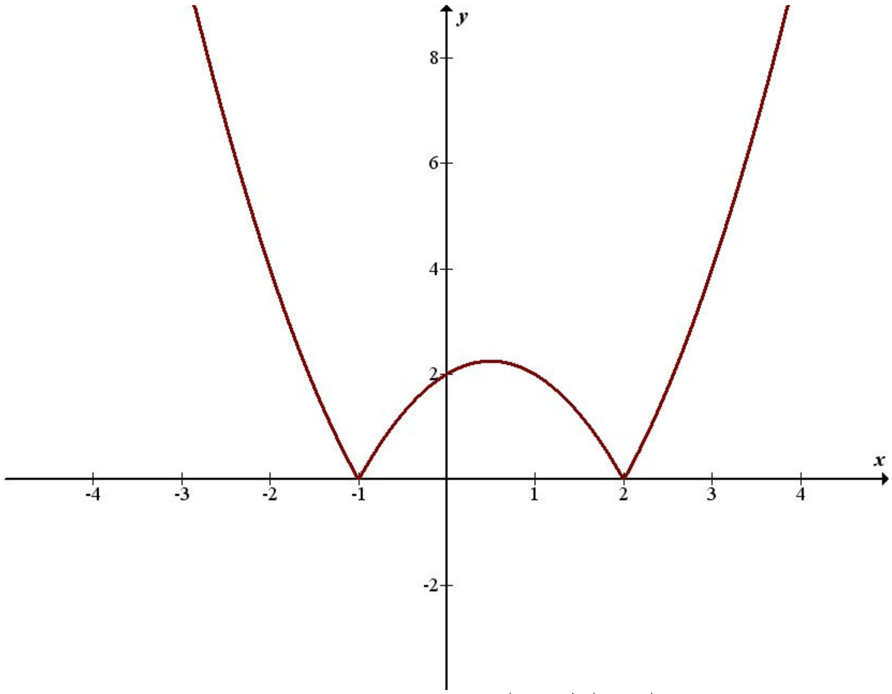


Gráfico da função $y = |(x-2)(x+1)|$

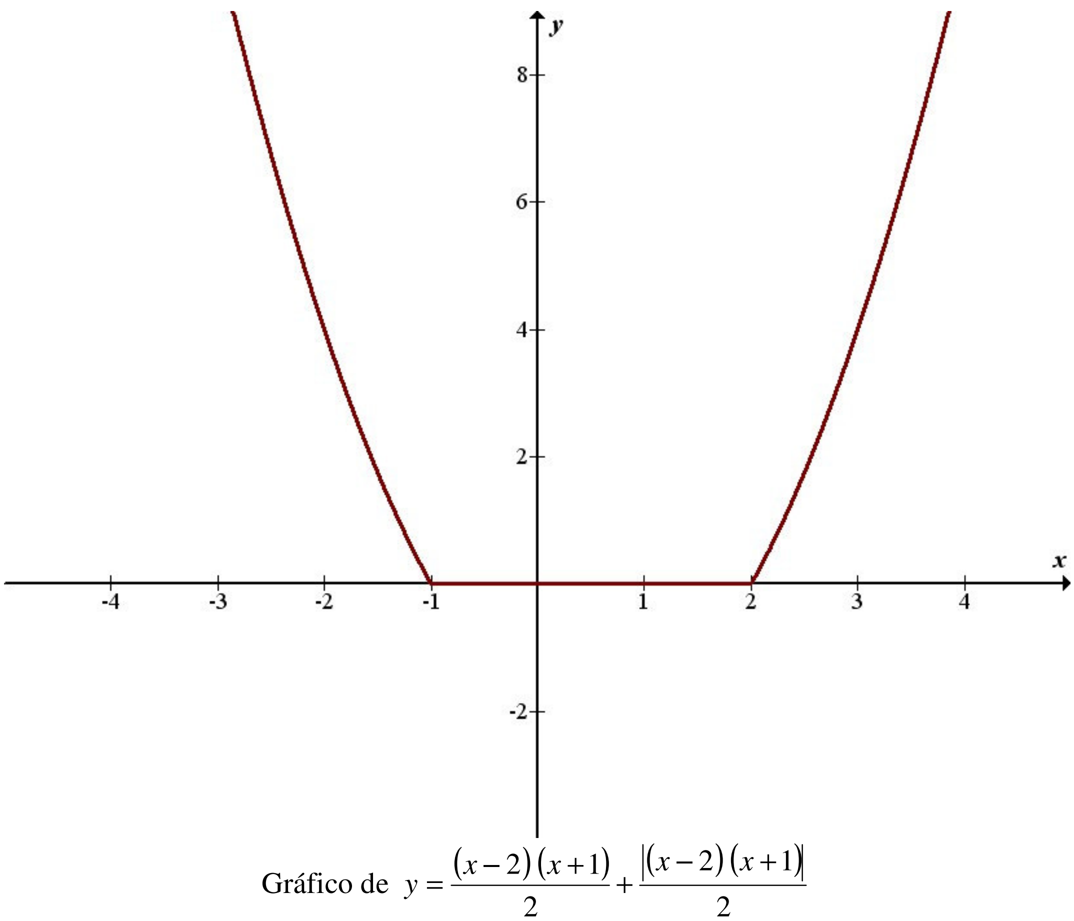
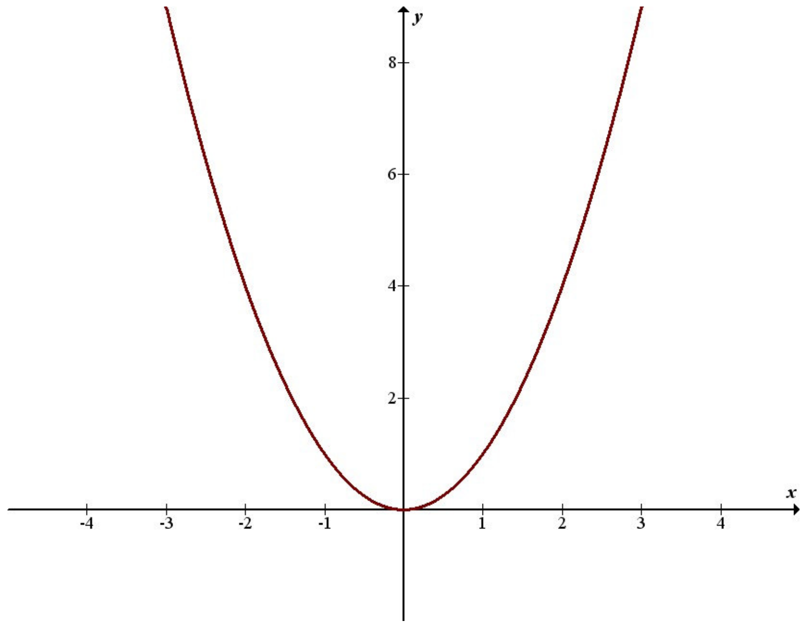


Gráfico de $y = \frac{(x-2)(x+1)}{2} + \frac{|(x-2)(x+1)|}{2}$

b) $f(x) = x^2$

Solução:

Observe que para este item os gráficos são todos iguais.



c) $f(x) = -x^2$

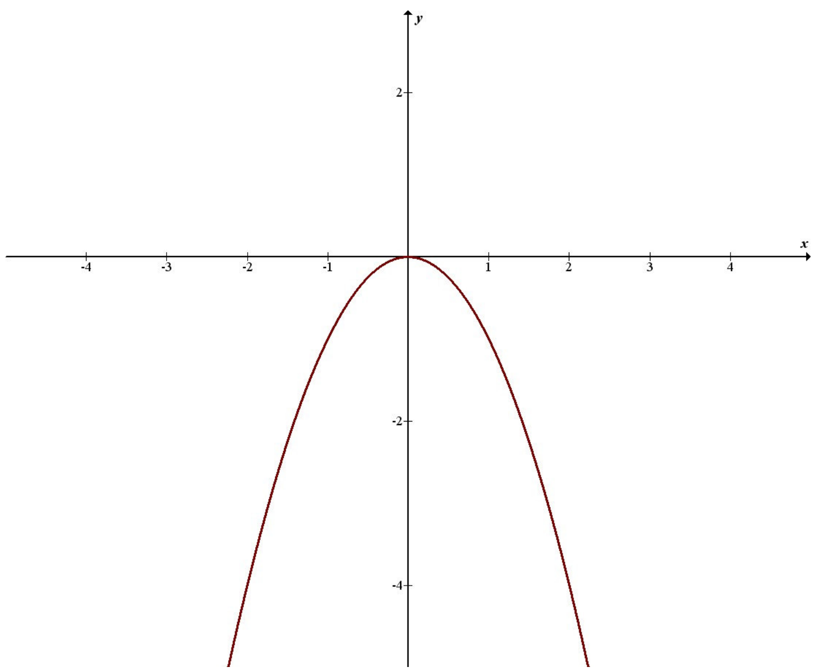


Gráfico da função $f(x) = -x^2$

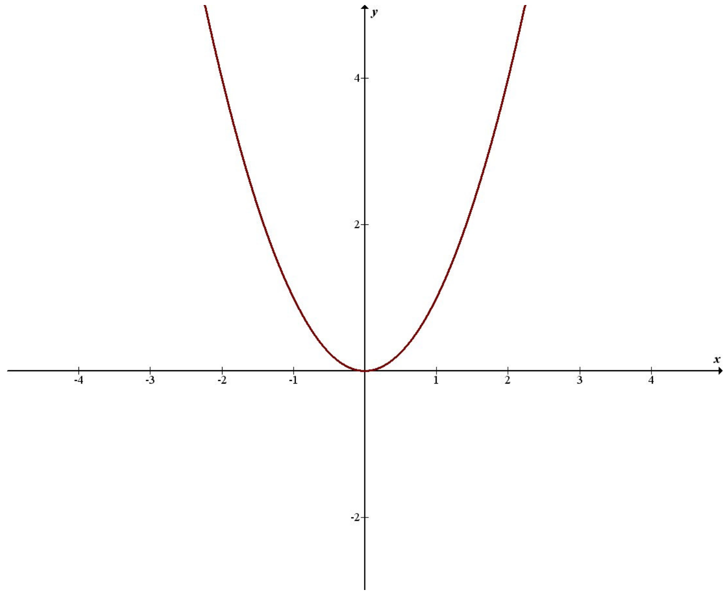


Gráfico da função $f(x) = |-x^2|$

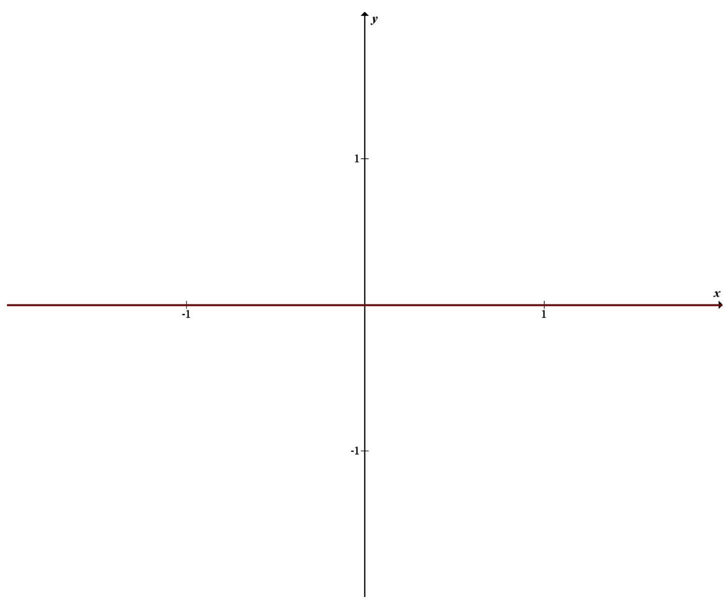


Gráfico da função $f(x) = \frac{-x^2}{2} + \frac{|-x^2|}{2}$

d) $f(x) = 4 - x^2$

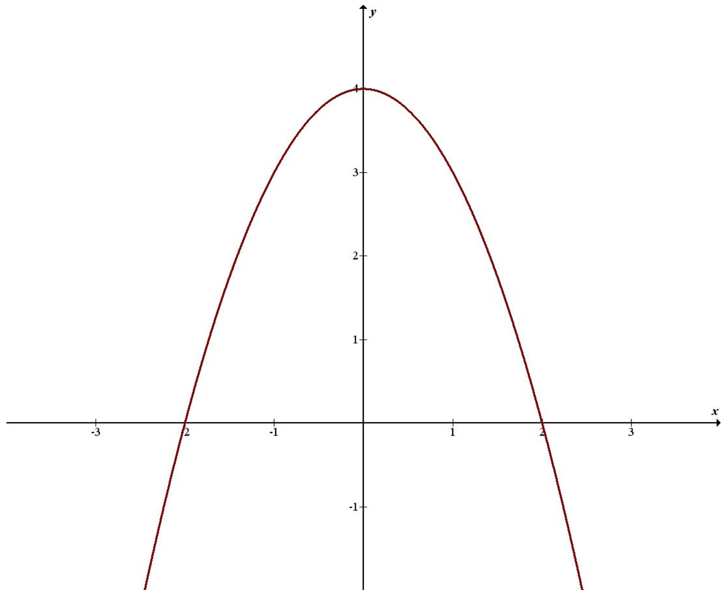


Gráfico da função $f(x) = 4 - x^2$

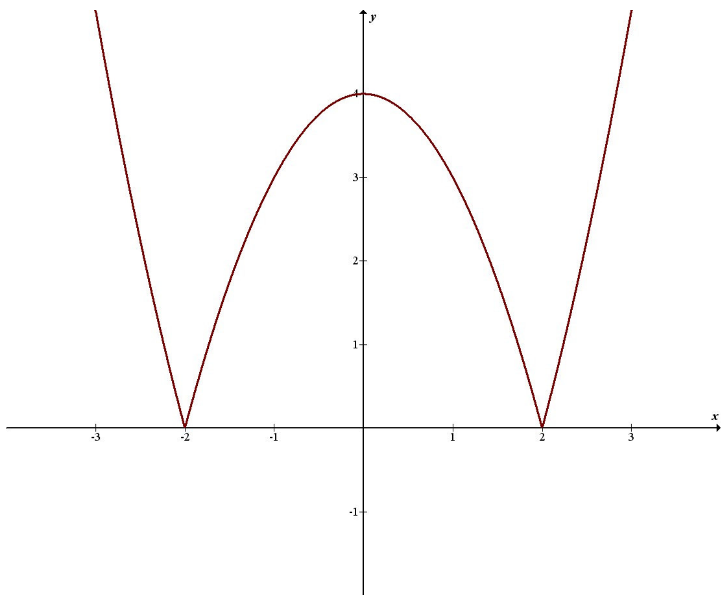


Gráfico da função $f(x) = |4 - x^2|$

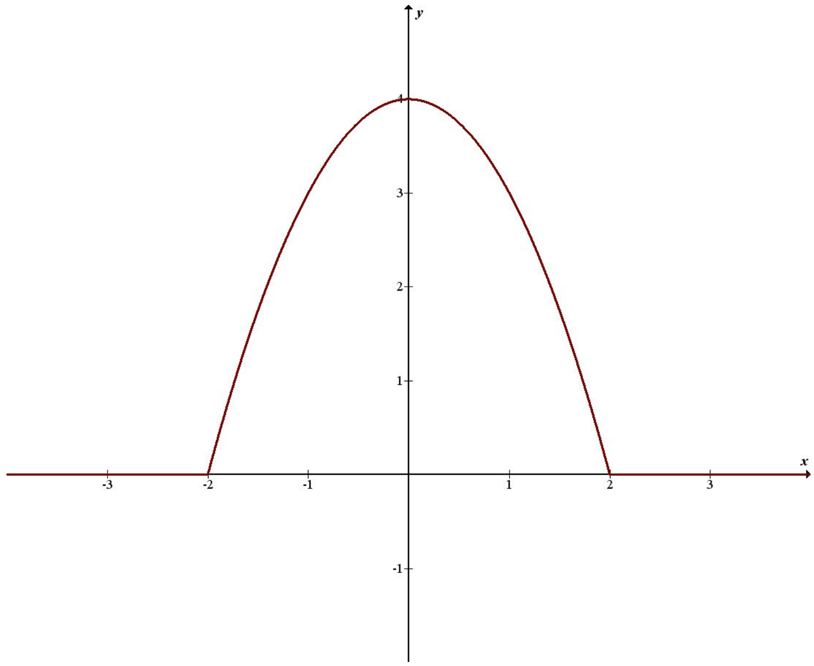


Gráfico da função $f(x)=\dfrac{4-x^2}{2}+\dfrac{|4-x^2|}{2}$

18. Seja $g(x)=x-3$ e seja $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x+3}, & x\neq -3\\ k, & x=-3\end{cases}$

Calcule k tal que $f(x)=g(x)$ para todo x.

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)}=x-3,\ x\neq -3$$
$$f(-3)=g(-3)=-3-3=-6$$
Assim, $k=-6$.

19. Para cada item calcular $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, f/g, $f\ o\ g$, $g\ o\ f$, $k\cdot f$ onde k é uma constante.

a) $f(x)=2x$, $g(x)=x^2+1$

$$(f+g)(x)=2x+x^2+1=x^2+2x+1=(x+1)^2$$
$$(f-g)(x)=2x-x^2-1=-x^2+2x-1=-(x-1)^2$$
$$(f\cdot g)(x)=2x(x^2-1)=2x^3+2x$$
$$(f/g)(x)=\frac{2x}{x^2-1}$$

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[x^2+1] = 2(x^2+1) = 2x^2+2$
$(g \circ f)(x) = g[2x] = (2x)^2+1 = 4x^2+1$
$kf = k \cdot 2x = 2kx$

b) $f(x) = 3x-2$, $g(x) = |x|$

$(f+g)(x) = 3x+|x|-2$
$(f-g)(x) = 3x-2-|x|$
$(f \cdot g)(x) = (3x-2)\,|x| = 3x|x|-2|x|$
$(f/g)(x) = \dfrac{3x-2}{|x|}$
$(f \circ g)(x) = f[|x|] = 3|x|-2$
$(g \circ f)(x) = g[3x-2] = |3x-2|$
$kf = 3kx-2k = k(3x-2)$

c) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $g(x) = 1/x$

$$(f+g)(x) = \frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{x} = \frac{x^2+1+x^2}{x(1+x^2)} = \frac{2x^2+1}{x^3+x}$$
$$(f-g)(x) = \frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{x} = \frac{x^2-(1+x^2)}{x(1+x^2)} = \frac{-1}{x^3+x}$$
$$(f \cdot g)(x) = \frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{1+x^2},\ x \neq 0$$
$$(f/g)(x) = \frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{x}{1} = \frac{x^2}{1+x^2}$$
$$(f \circ g)(x) = f[1/x] = \frac{1/x}{1+(1/x)^2} = \frac{1/x}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1},\ x \neq 0$$
$$(g \circ f)(x) = g\left[\frac{x}{1+x^2}\right] = \frac{1}{\frac{x}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{x}$$
$$kf(x) = \frac{kx}{1+x^2}$$

d) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = x-2$

$(f+g)(x) = \sqrt{x+1}+x-2$

$$(f-g)(x)=\sqrt{x+1}-x+2$$
$$(f\cdot g)(x)=\sqrt{x+1}\,(x-2)=x\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+1}$$
$$(f/g)(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$$
$$(f\ o\ g)(x)=f[x-2]=\sqrt{x-2+1}=\sqrt{x-1}$$
$$(g\ o\ f)(x)=g\left[\sqrt{x+1}\right]=\sqrt{x+1}-2$$
$$kf(x)=k\sqrt{x+1}$$

e) $f(x)=\sqrt{x-2}$, $g(x)=\sqrt{x-3}$

$$(f+g)(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}$$
$$(f-g)(x)=\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}$$
$$(f\cdot g)(x)=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-3}$$
$$(f/g)(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}}=\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}$$
$$(f\ o\ g)(x)=f\left[\sqrt{x-3}\right]=\sqrt{\sqrt{x-3}-2}$$
$$(g\ o\ f)(x)=g\left[\sqrt{x-2}\right]=\sqrt{\sqrt{x-2}-3}$$
$$kf(x)=k\sqrt{x-2}$$

f) $f(x)=x^3$, $g(x)=1/\sqrt[3]{x}$

$$(f+g)(x)=x^3+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$
$$(f-g)(x)=x^3-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$
$$(f\cdot g)(x)=\frac{x^3}{\sqrt[3]{x}}=x^{8/3}$$
$$(f/g)(x)=\frac{x^3}{1/\sqrt[3]{x}}=x^3\cdot\sqrt[3]{x}=x^{10/3},x\neq 0$$
$$(f\ o\ g)(x)=f\left[1/\sqrt[3]{x}\right]=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{x}$$
$$(g\ o\ f)(x)=g\left[x^3\right]=\frac{1}{\sqrt[3]{x^3}}=\frac{1}{x}$$
$$kf(x)=kx^3$$

20. Seja h definida por $h(x)=2x-7$ calcular $h\ o\ h$, h^2, $h+h$.

$$(h \circ h)(x) = h[2x-7] = 2(2x-7)-7$$
$$= 4x-14-7$$
$$= 4x-21$$

$$h^2 = h(x) \cdot h(x) = (2x-7)(2x-7) = 4x^2 - 28x + 49$$

$$(h+h)(x) = (2x-7)+(2x-7) = 4x-14$$

21. Sabendo que $f = g \circ h$, nos itens (a), (c) e (d), encontre a função h e no item (b) a função g.

a) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x+1$

$$f = g \circ h$$
$$x^2 + 1 = g[h(x)]$$
$$x^2 + 1 = h(x) + 1$$
$$h(x) = x^2$$

b) $f(x) = \sqrt{x+2}$, $h(x) = x+2$

$$f = g \circ h$$
$$\sqrt{x+2} = g[x+2]$$

Logo, $g(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = a + bx$, $g(x) = x + a$

$$a + bx = g[h(x)]$$
$$a + bx = h(x) + a$$
$$h(x) = bx$$

d) $f(x) = |x^2 - 3x + 5|$, $g(x) = |x|$

$$|x^2 - 3x + 5| = g[h(x)]$$
$$|x^2 - 3x + 5| = |h(x)|$$

Duas soluções são obtidas naturalmente, quais sejam:
$h(x) = x^2 - 3x + 5$ ou $h(x) = -x^2 + 3x - 5$.
No entanto, existem infinitas outras soluções. Por exemplo, a função dada por
$h(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5, x \geq 0 \\ -x^2 + 3x - 5, x < 0 \end{cases}$ é uma das infinitas soluções.

22. Sendo $f(x) = ax + b$, para que valores de a e b se tem $(f\ o\ f)(x) = 4x - 9$?

$$
\begin{aligned}
(f\ o\ f)(x) = f[f(x)] &= f[ax+b] \\
&= a(ax+b)+b \\
&= a^2x + ab + b
\end{aligned}
$$

$$a^2x + ab + b = 4x - 9$$

$$\begin{cases} a^2 = 4 \\ ab + b = -9 \end{cases}$$

Da primeira equação temos que $a = \pm 2$ e da segunda equação temos que:

$$b(a+1) = -9$$

$$b = \frac{-9}{a+1}$$

$$b_1 = \frac{-9}{2+1} = \frac{-9}{3} = -3$$

$$b_2 = \frac{-9}{-2+1} = \frac{-9}{-1} = 9$$

Solução: $a = 2, b = -3$ ou $a = -2, b = 9$.

23. Seja $f(x) = \sqrt{x-4}$ e $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$, $x \geq 3$. Calcule $f\ o\ g$, Dê o domínio e o conjunto imagem de $f(x)$, $g(x)$ e $(f\ o\ g)(x)$

$$
\begin{aligned}
(f\ o\ g)(x) &= f\left[\frac{1}{2}x + 1\right] \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}x + 1 - 4} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}x - 3}
\end{aligned}
$$

$D(f) = [4, +\infty)$ $\quad$ Im $(f) = [0, +\infty)$

$D(g) = [3, +\infty)$ $\quad$ Im $(g) = [5/2, +\infty)$

$$D(f\ o\ g) = \{x \in D(g) / g(x) \in D(f)\}$$

Temos, então:

$$\frac{1}{2}x + 1 \geq 4$$

$$\frac{1}{2}x \geq 3$$

$$x \geq 6$$

Logo, $D(f \ o \ g) = [6, +\infty)$. $\quad$ $\mathrm{Im}(f \ o \ g) = [0, +\infty)$.

24. Seja $f(x) = \begin{cases} 5x, \ x \leq 0 \\ -x, \ 0 < x \leq 8 \\ \sqrt{x}, \ x > 8 \end{cases}$ e $g(x) = x^3$. Calcule $f \ o \ g$.

$$f \ o \ g = f[g(x)] = f[x^3] = \begin{cases} 5x^3, \ x \leq 0 \\ -x^3, \ 0 < x \leq 2 \\ \sqrt{x^3}, \ x > 2 \end{cases}$$

25. Determinar algebricamente o domínio das funções $f(x) = \sqrt{x-2}$, ..
$g(x) = \sqrt{x+2}$, $h(x) = f(x) + g(x)$, $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ e $q(x) = (fog)(x)$
Faça o gráfico das funções e compare os resultados.

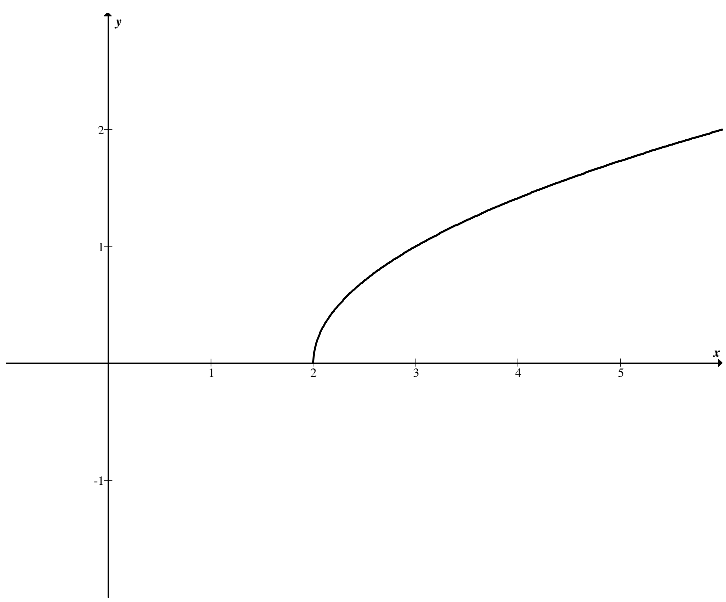
Para $f(x) = \sqrt{x-2}$ temos:

$x - 2 \geq 0$

$x \geq 2$

$D(f) = [2, +\infty)$.

Veja o gráfico a seguir



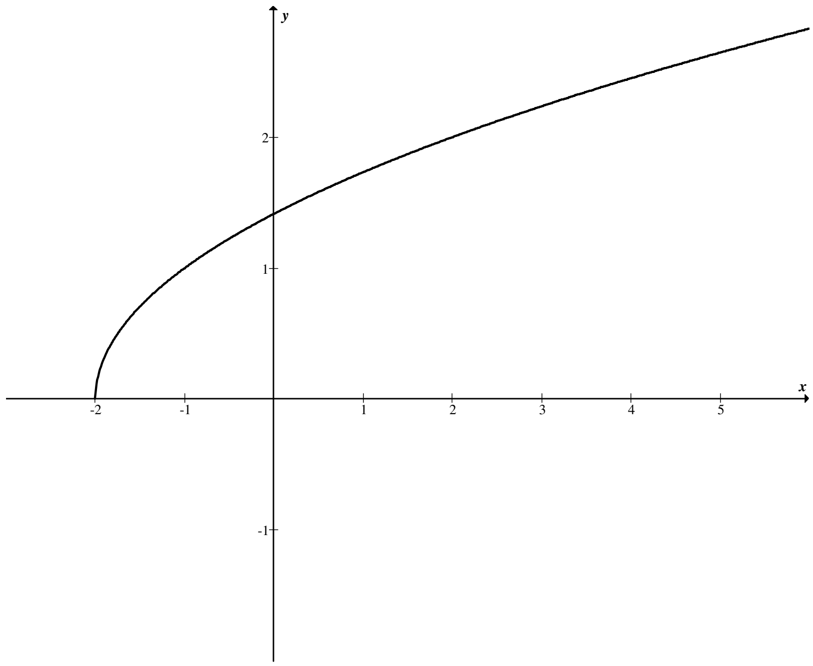
Para $g(x)=\sqrt{x+2}$ temos:

$x+2\geq 0$

$x\geq -2$

$D(f)=[-2,+\infty)$

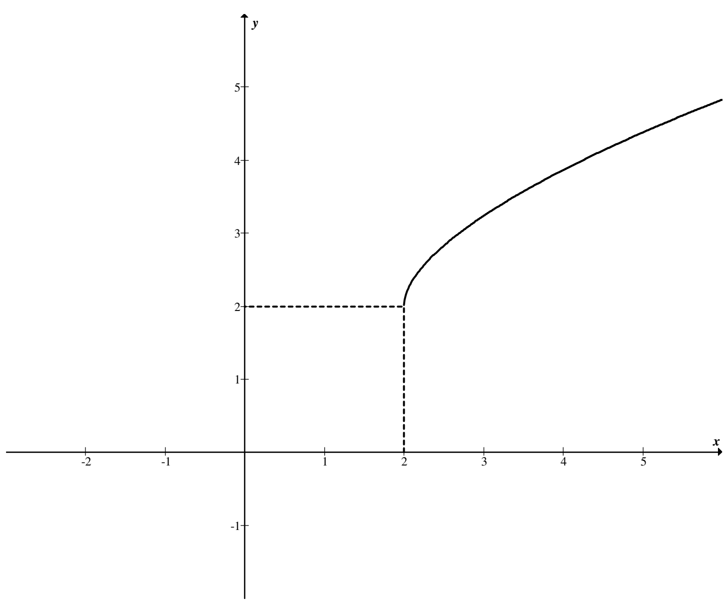
Veja o gráfico a seguir



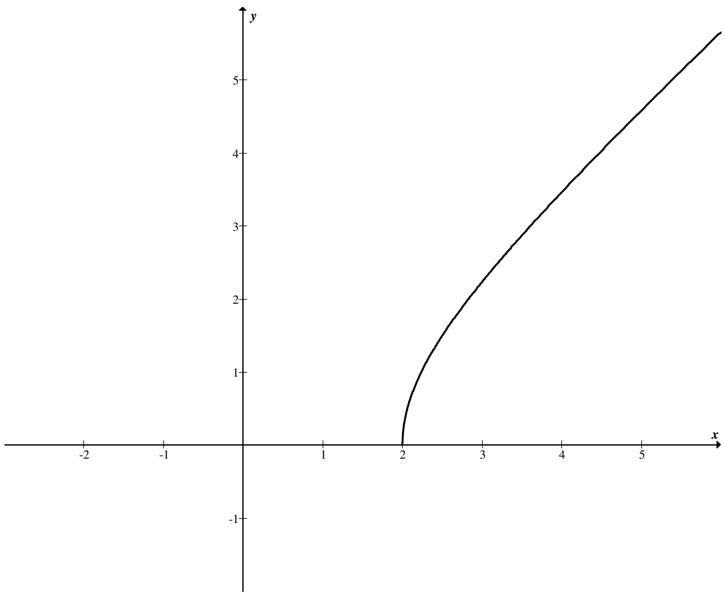
Para $h(x)=f(x)+g(x)$ temos:

$D(h)=D(f+g)=D(f)\cap D(g)=[2,+\infty)$

Veja o gráfico a seguir



Para $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ temos:
$D(p) = D(f\ .\ g) = D(f) \cap D(g) = [2, +\infty)$
Veja o gráfico a seguir



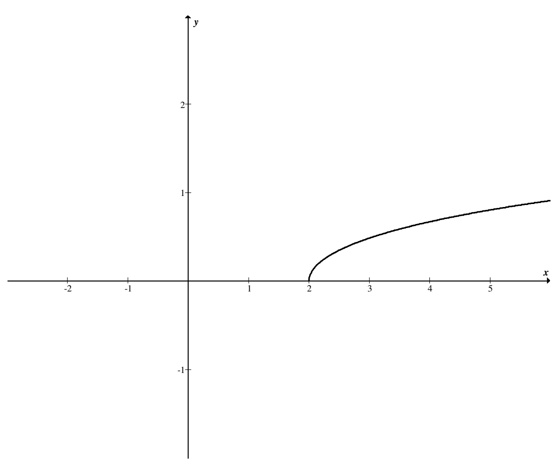
Para $q(x) = (fog)(x)$ temos:

$$fog\ (x) = f\ (g(x)) = f\ \left(\sqrt{x+2}\right) = \sqrt{\sqrt{x+2} - 2}$$

$$D(q) = D(fog) = \{x \in D(g) \mid\ g(x) \in D(f)\}$$

Temos, então:

$$\sqrt{x+2} \geq 2$$
$$x + 2 \geq 4$$
$$x \geq 2$$
$$D(fog) = [2, +\infty).$$



26. A função g é definida por $g(x) = x^2$. Defina uma função f tal que $(f\ o\ g)(x) = x$ para $x \geq 0$ e uma função h tal que $(h\ o\ g)(x) = x$ para $x < 0$.

Temos:
a) $(f\ o\ g)(x) = f[g(x)] = f[x^2] = x, x \geq 0$
Logo $f(x) = +\sqrt{x}$

b) $(h\ o\ g)(x) = h[g(x)] = h[x^2] = x, x < 0$
Logo $h(x) = -\sqrt{x}$.

27. Se $f(x) = x^2$, encontre duas funções g para as quais $(f\ o\ g)(x) = 4x^2 - 12x + 9$:

$$(f\ o\ g)(x) = f[g(x)] = [g(x)]^2 = 4x^2 - 12x + 9$$
$$[g(x)]^2 = (2x-3)^2$$
$$g(x) = \pm(2x-3)$$
$$g_1(x) = 2x - 3$$
$$g_2(x) = -2x + 3.$$

28. Se $f(x) = x^2 - 2x + 1$, encontre a função $g(x)$ tal que $(f/g)(x) = x - 1$

$$(f/g)(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{g(x)} = x - 1$$
$$g(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{(x-1)^2}{x-1} = x - 1.$$

29. Dada as funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = 2x - 1$

a) Determine o domínio e o conjunto imagem de $f(x)$.

$D(f) = IR \qquad \text{Im}(f) = [-1, +\infty]$

b) Determine o domínio e o conjunto imagem de $g(x)$

$D(g) = IR \qquad \text{Im}(g) = IR$

c) Construa os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$

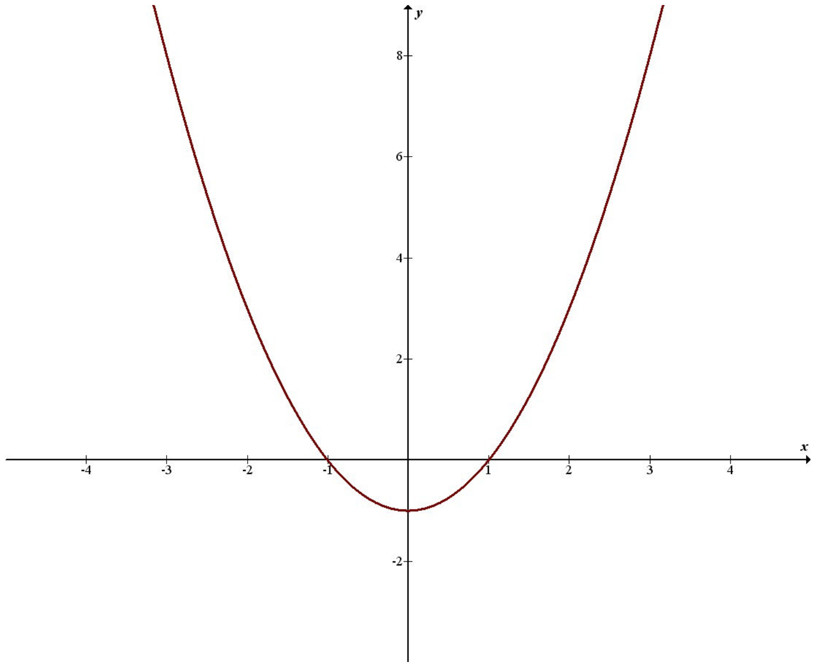


Gráfico de $f(x) = x^2 - 2x + 1$

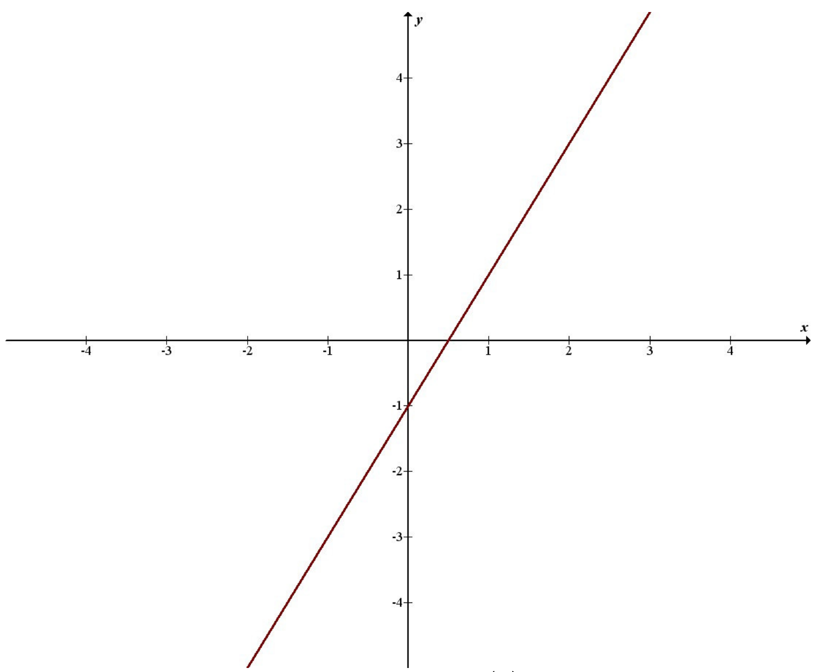


Gráfico de $g(x) = 2x - 1$

d) Calcule $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, f/g , $f \; o \; g$, $g \; o \; f$

$$(f + g)(x) = x^2 - 1 + 2x - 1 = x^2 + 2x - 2$$
$$(f - g)(x) = x^2 - 1 - 2x + 1 = x^2 - 2x$$
$$(f \cdot g)(x) = (x^2 - 1)(2x - 1) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$$

$$(f/g)(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 1}$$
$$(f\ o\ g)(x) = f[g(x)] = f[2x - 1] = (2x - 1)^2 - 1 = 4x^2 - 4x$$
$$(g\ o\ f)(x) = g[f(x)] = g[x^2 - 1] = 2\,(x^2 - 1) - 1 = 2x^2 - 3$$

e) Determine o domínio das funções calculadas no item (d).

$D(f) = IR$

$D(f + g) = IR$

$D(f - g) = IR$

$D(f \cdot g) = IR$

$D(g) = IR$

$D(f/g) = IR - \{1/2\}$

$D(f\ o\ g) = IR$

$D(g\ o\ f) = IR$

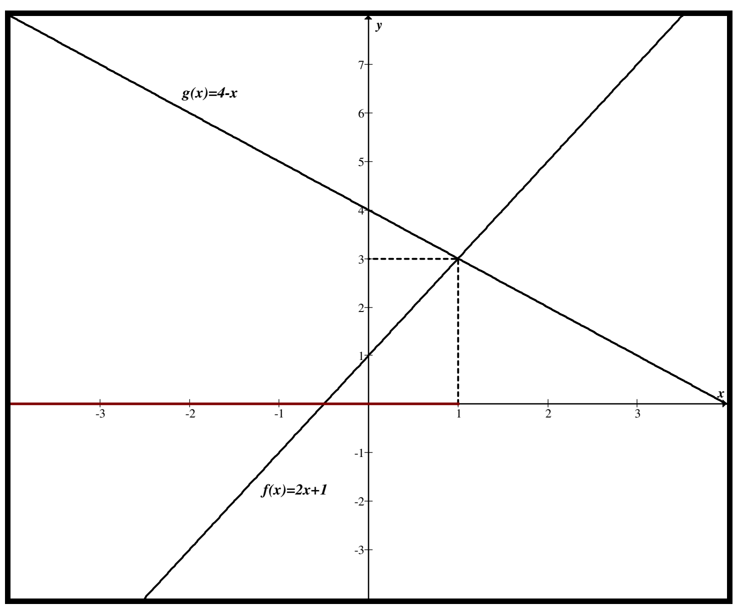
30. Determinar algebricamente os valores de x, tais que $f(x) < g(x)$, sendo $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 4 - x$. Usando uma ferramenta gráfica, traçar o gráfico das funções dadas e comparar os resultados.

$2x + 1 < 4 - x$

$2x + x < 4 - 1$

$3x < 3$

$x < 1$



Reposta em ambas as representações: $x < 1$.

31. Determinar algebricamente os valores de x, tais que o gráfico de $f(x)$ esteja abaixo do gráfico de $g(x)$, sendo $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = 1 - x^2$. Usando uma ferramenta gráfica, traçar o gráfico das funções dadas e comparar os resultados.

Algebricamente temos:

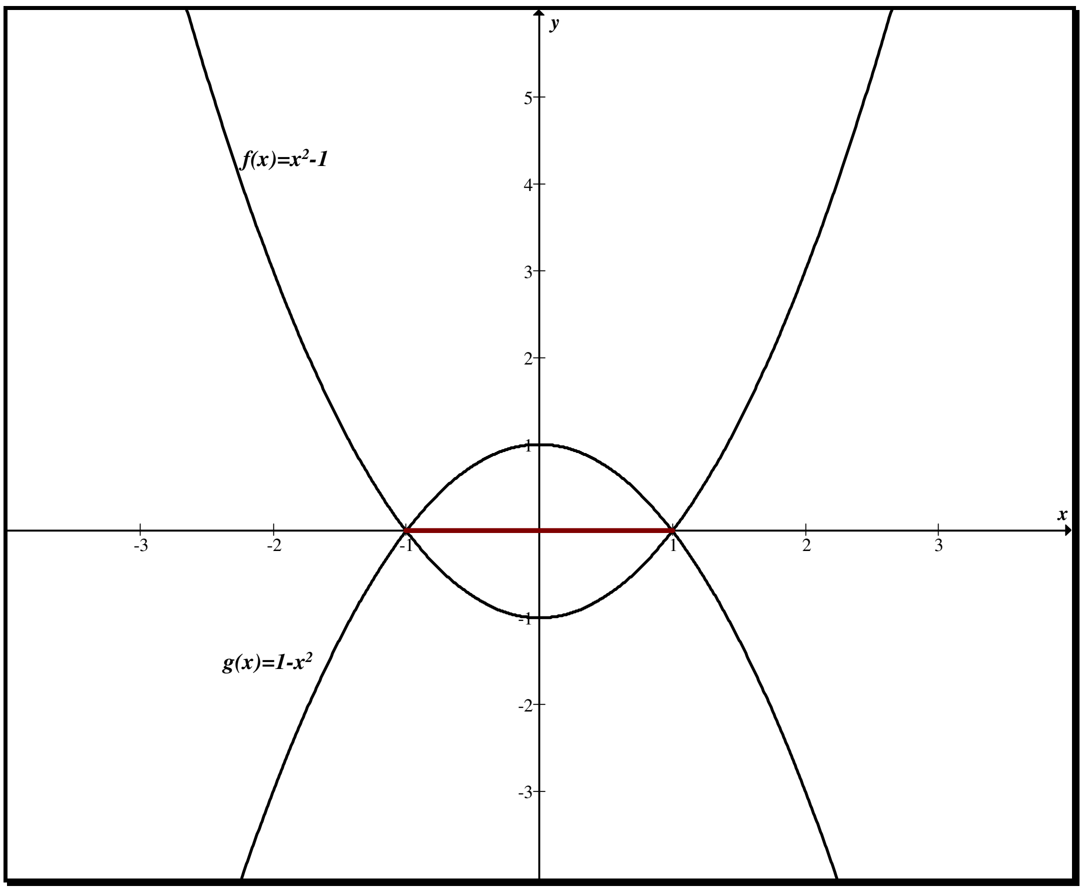
$$x^2 - 1 < 1 - x^2$$

$$2x^2 < 2$$

$$x^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < x < 1$$

ou $x \in (-1, 1)$.

Graficamente observamos o mesmo resultado.



32. O gráfico da Figura 2.11 ilustra a propagação de uma epidemia numa cidade X. No eixo horizontal temos o tempo e no eixo vertical, o número de pessoas atingidas depois de um tempo *t* (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia).

(a) Em qual semana houve o maior número de pessoas infectadas?
Resposta: 2ª semana.

(b) Quando a epidemia foi totalmente controlada?
Resposta: 4ª semana.

(c) Como você descreveria a propagação da doença em linguagem coloquial?
Resposta: O número de pessoas infectadas cresce lentamente no início da epidemia. Em um momento seguinte esse número cresce rapidamente e depois volta a crescer lentamente até que a epidemia fique controlada

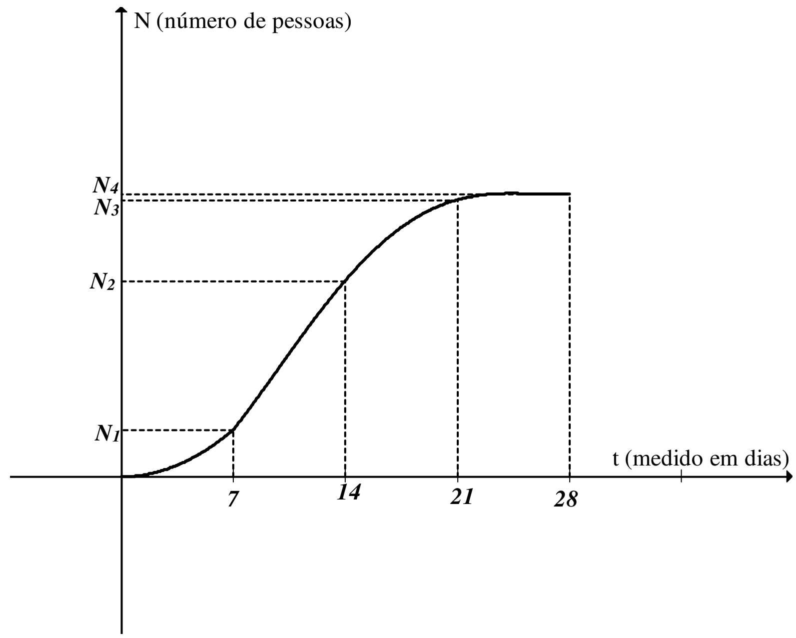


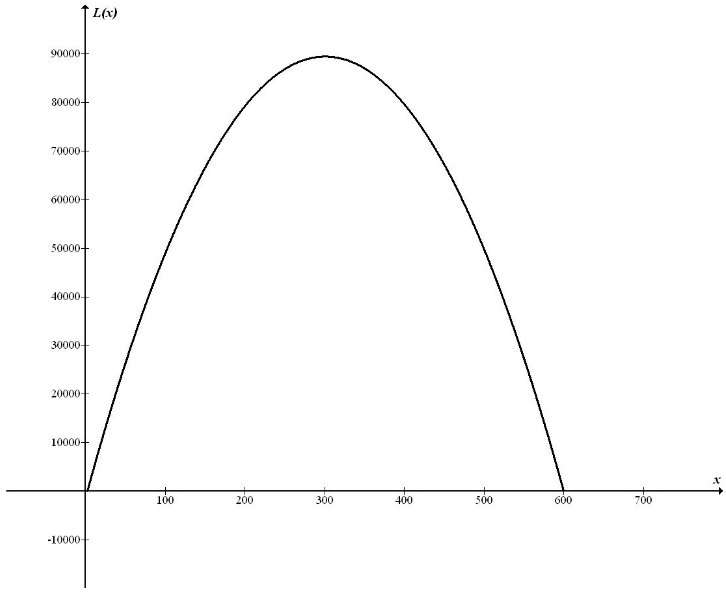
Figura 2.11 da pg. 23 do livro impresso

33. Um fabricante produz peças para computadores pelo preço de R$ 2,00 cada. Calcula-se que, se cada peça for vendida por *x* reais, os consumidores comprarão, por mês, *600 –x* unidades. Expressar o lucro mensal do fabricante como função do preço. Construir um gráfico para estimar o preço ótimo de venda.

Vamos considerar:
L = Lucro
C = custo $\qquad C_{unit.} = 2{,}00$
R = receita
D = demanda

$$P_{venda} = x \quad \Rightarrow \quad D = 600 - x$$
$$R = (600 - x) \cdot x$$
$$C = (600 - x)\,2$$
$$L = R - C$$
$$= (600 - x)x - (600 - x)2$$
$$= 600x - x^2 - 1200 + 2x$$
$$L = -x^2 + 602x - 1200$$

O gráfico a seguir mostra a função encontrada.



O preço ótimo para a venda seria o vértice da parábola, que na figura nos mostra um valor próximo de 300. Fazendo-se o cálculo do vértice da parábola encontra-se o valor de 299. Assim, o valor de x que maximiza o lucro é $x = R\$\ 299,00$. Observa-se que este é um problema didático com dados fictícios.

34. Um grupo de amigos trabalham no período de férias vendendo salgadinhos nas praias. O trailler e todos os equipamentos necessários para a produção são alugados no valor de R$ 2000,00 por mês. O custo do material de cada salgadinho é de R$ 0,10. Expressar o custo total como uma função do número de salgadinhos elaborados.

Sejam
C_F = custo fixo mensal
C_V = custo variável por salgadinho
x = número de salgadinhos produzidos
C_T = custo total

$C_F = 2\,000,00$
$C_V = 0,10$
$C_T = C_F + C_V x$
$C_T = 2\,000 + 0,10x$

35. Em um laboratório, um determinado ser vivo apresenta um ciclo produtivo de 1 hora, sendo que a cada hora um par pronto para reprodução gera outro par reprodutor. Como expressar essa experiência populacional em função do número de horas, supondo que a população inicial é de 5 pares?

Ciclo produtivo = 1 hora
População Inicial = 5 pares
n = número de horas

$P_0 = 5$ $P_1 = 10$ $P_2 = 20$ $P_3 = 40$

$P_n = 5 \cdot 2^n$

36. Observar o problema que segue e verificar a possibilidade de resolvê-lo a partir do gráfico de uma função:
Um grupo de abelhas, cujo número era igual à raiz quadrada da metade de todo o enxame, pousou sobre uma rosa, tendo deixado para trás 8/9 do enxame; apenas uma abelha voava ao redor de um jasmim, atraída pelo zumbido de uma de suas amigas que caíra imprudentemente na armadilha da florzinha de doce fragrância. Quantas abelhas formavam o enxame?
(Adaptação de um problema histórico, originalmente escrito em versos).

Podemos formar 3 funções, considerando x = número de abelhas do enxame.
Denotamos:
y = grupo de abelhas pousadas na rosa
z = grupo que ficou para trás
h= número de abelhas extras
Temos:

$$y = \sqrt{\frac{x}{2}}$$

$$z = \frac{8}{9}x$$

h= 2

Com os dados do problema podemos escrever a equação:
$x = \sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8}{9}x + 2$ cuja raiz é exatamente igual à raiz da função $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8}{9}x - x + 2$.
Fazendo o gráfico desta função podemos visualizar a raiz real em x= 72. Assim, o número de abelhas no enxame é igual a 72 abelhas.
Observamos que poderíamos ter resolvido algebricamente a equação obtida, obtendo o mesmo resultado.