# Cálculo II

## Bacharelado e Engenharias

# Semana 01 - Aula 1

# Vetores

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

# Sistemas de coordenadas tridimensionais

- Um sistema de coordenadas caracteriza-se por:
  - Um ponto fixo O (a origem).
  - Retas orientadas ortogonais entre si: x, y e z.
  - Direção do eixo z: regra da mão direita.

# Sistemas de coordenadas tridimensionais

- Um sistema de coordenadas caracteriza-se por:
  - Um ponto fixo O (a origem).
  - Retas orientadas ortogonais entre si: x, y e z.
  - Direção do eixo z: regra da mão direita.

Um ponto no espaço é representado por uma terna ordenada (a, b, c) ou (x, y, z) de números reais.

# Sistemas de coordenadas tridimensionais

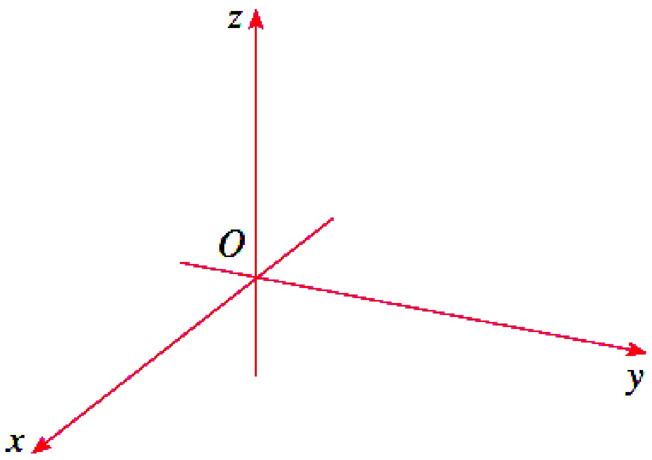



**FIGURA 1**
Eixos coordenados

# Sistemas de coordenadas tridimensionais

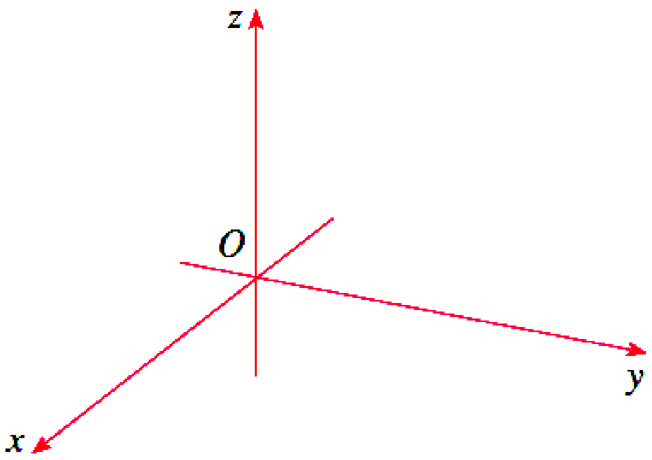



**FIGURA 1**
Eixos coordenados

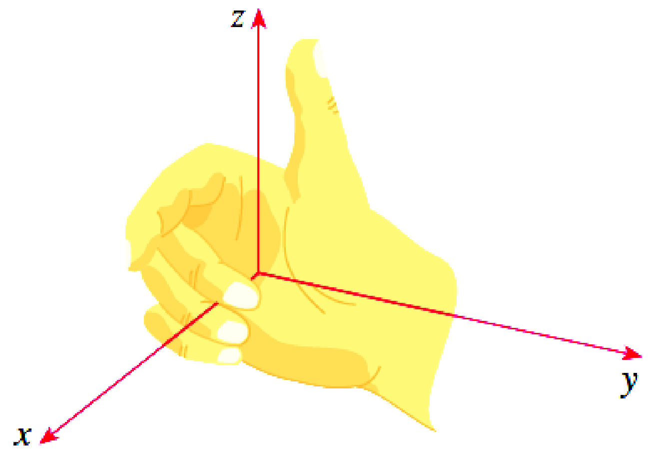



**FIGURA 2**
Regra da mão direita

# Sistemas de coordenadas tridimensionais

- Os três eixos coordenados (x, y e z) determinam três **planos coordenados**.
- Cada plano contém dois dos eixos.
- Os três planos coordenados dividem o espaço em oito octantes.
- O **primeiro octante** é determinado pela parte positiva dos eixos.

# Sistemas de coordenadas tridimensionais

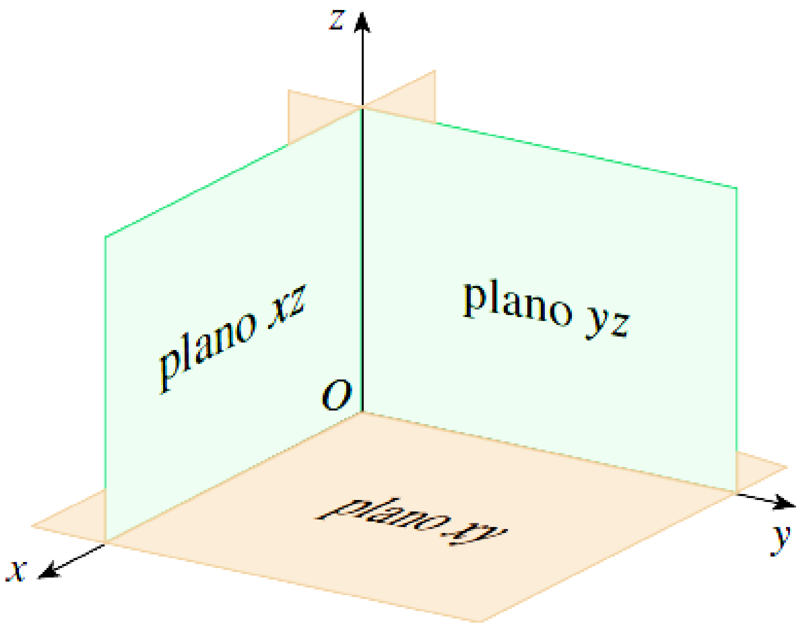
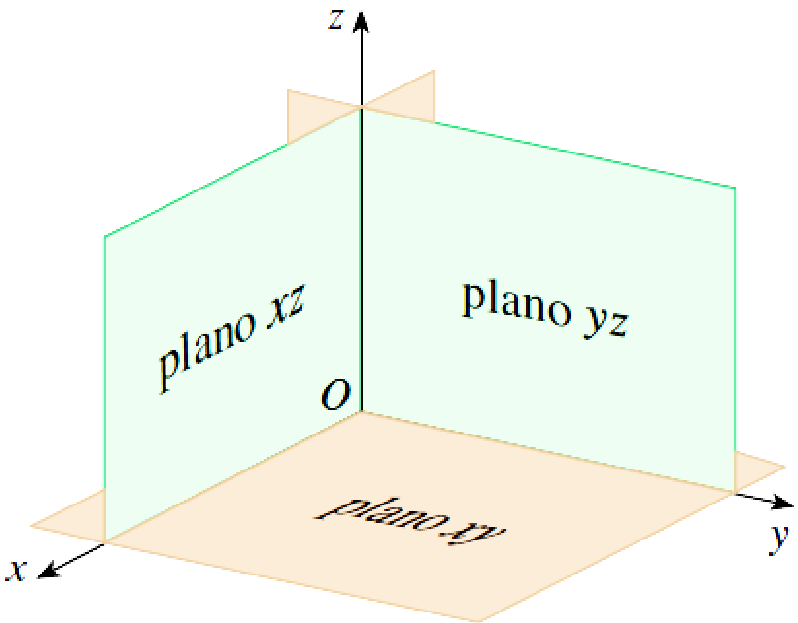



**FIGURA 3** (a) Planos coordenados

# Sistemas de coordenadas tridimensionais



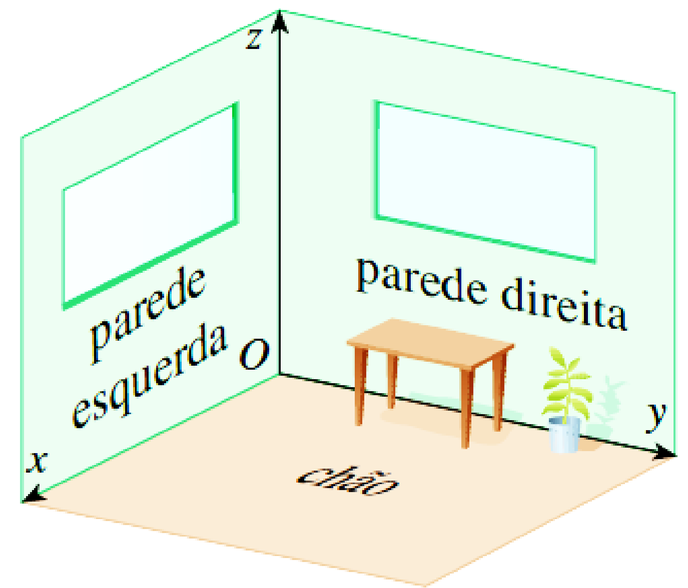




**FIGURA 3** (a) Planos coordenados (b)

# Sistemas de coordenadas tridimensionais

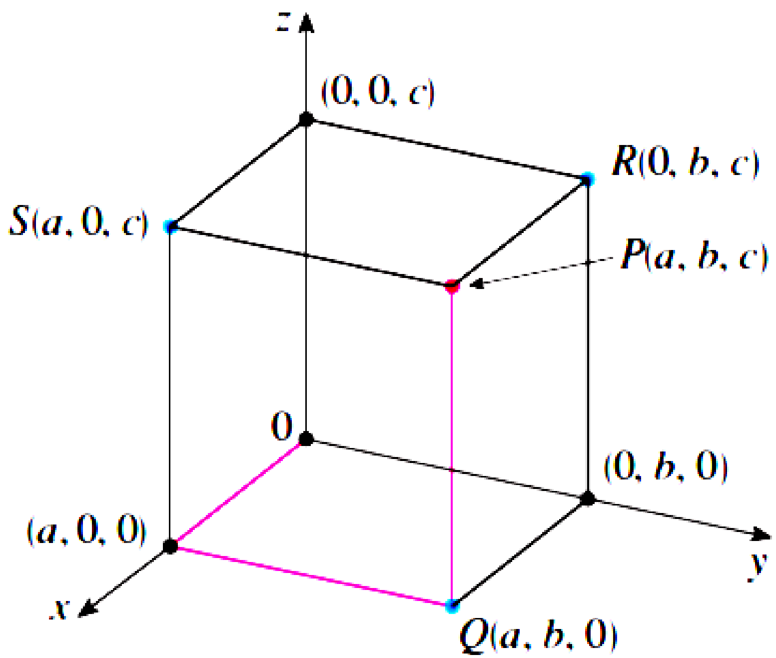



**FIGURA 5**

# Sistemas de coordenadas tridimensionais

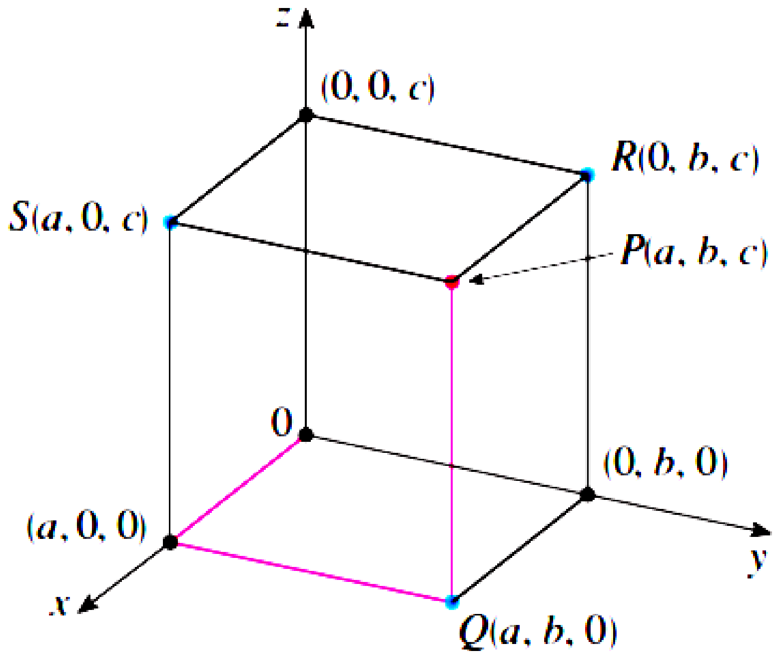



FIGURA 5

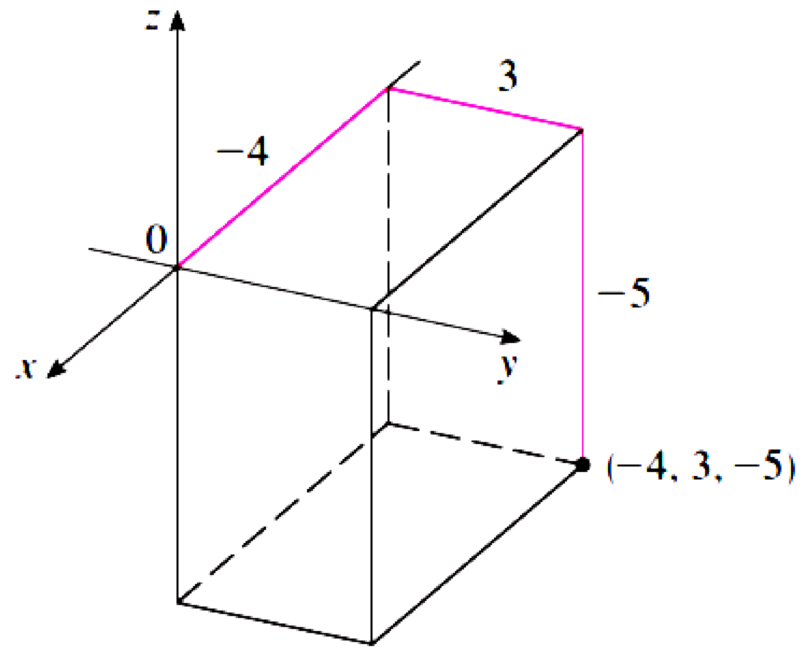



FIGURA 6

# Vetores

- Usados para indicar quantidades com magnitude (módulo), direção e sentido.
- **Ex.**: deslocamento, velocidade, força, dentre outras.
- Estas grandezas são chamadas vetoriais, pois para serem definidas não basta somente a magnitude.

# Vetores

- Usados para indicar quantidades com magnitude (módulo), direção e sentido.
- **Ex.**: deslocamento, velocidade, força, dentre outras.
- Estas grandezas são chamadas vetoriais, pois para serem definidas não basta somente a magnitude.

**Grandeza escalar**: definida somente por um número e uma unidade

# Vetores

- Um vetor é representado por um segmento de reta orientado que indica a direção e o sentido.
- É denotado por uma letra em negrito ($\boldsymbol{v}$) ou uma letra com uma seta acima ($\vec{v}$).

# Vetores

- Um vetor é representado por um segmento de reta orientado que indica a direção e o sentido.
- É denotado por uma letra em negrito ($\boldsymbol{v}$) ou uma letra com uma seta acima ($\vec{v}$).
- Vetores com o mesmo tamanho, a mesma direção e mesmo sentido são equivalentes ($\vec{v} = \vec{u}$).

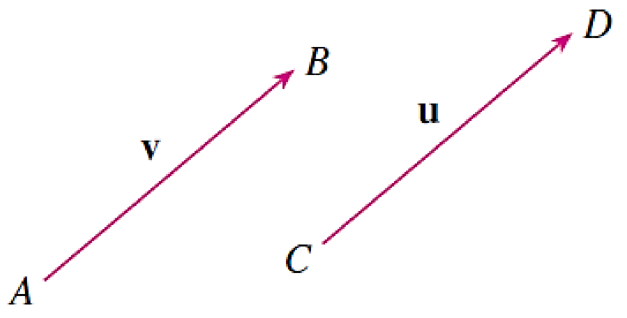



**FIGURA 1**
Vetores equivalentes

# Adição e subtração de vetores

# Adição de vetores

**Definição da Adição de Vetores** Se **u** e **v** são vetores posicionados de maneira que o ponto inicial de **v** é o ponto terminal de **u**, então a **soma** $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é o vetor do ponto inicial de **u** ao ponto final de **v**.

# Adição de vetores

**Definição da Adição de Vetores** Se **u** e **v** são vetores posicionados de maneira que o ponto inicial de **v** é o ponto terminal de **u**, então a **soma u + v** é o vetor do ponto inicial de **u** ao ponto final de **v**.

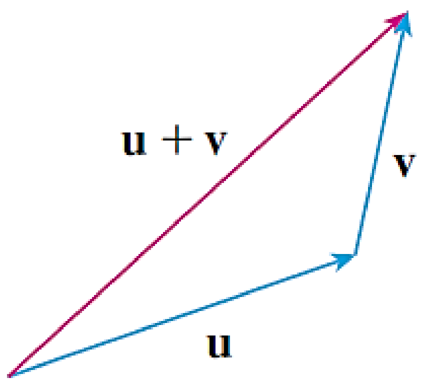



**FIGURA 3** Lei do Triângulo

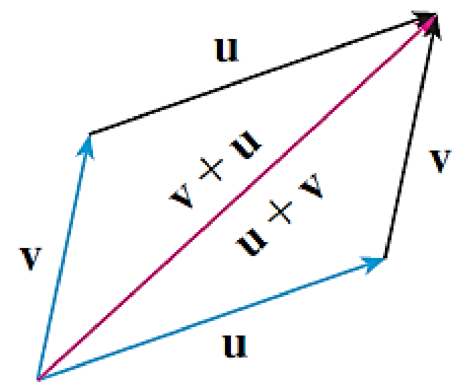



**FIGURA 4** Lei do Paralelogramo

# Adição de vetores

## Exemplo 1

Desenhe a soma dos vetores **a** e **b** da Figura 5.

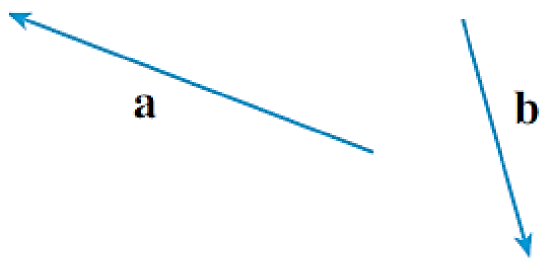



FIGURA 5

# Adição de vetores

## Exemplo 1

Desenhe a soma dos vetores **a** e **b** da Figura 5.

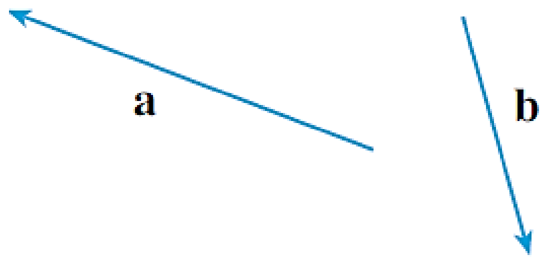
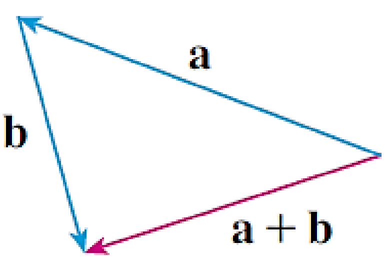
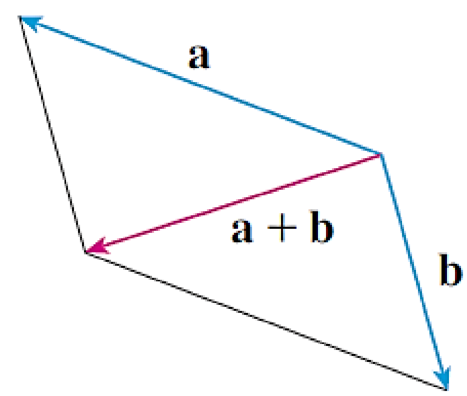



FIGURA 5



# Componentes de vetores

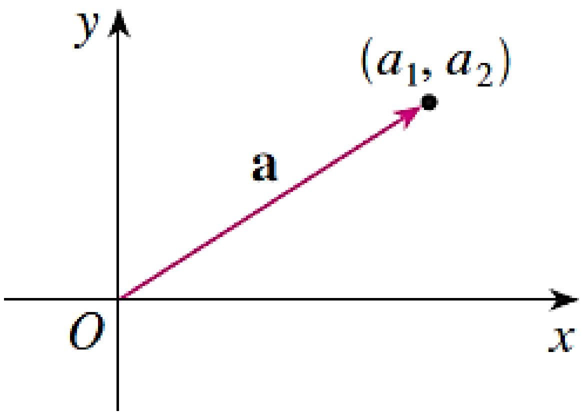
- Para muitos caso é conveniente tratar os vetores algebricamente.
- Posicionamos o ponto inicial de um vetor **a** na origem de um sistema de coordenadas.
- O ponto final de **a** tem coordenadas da forma $(a_1, a_2)$ no plano ou $(a_1, a_2, a_3)$ se no espaço.

# Componentes de vetores

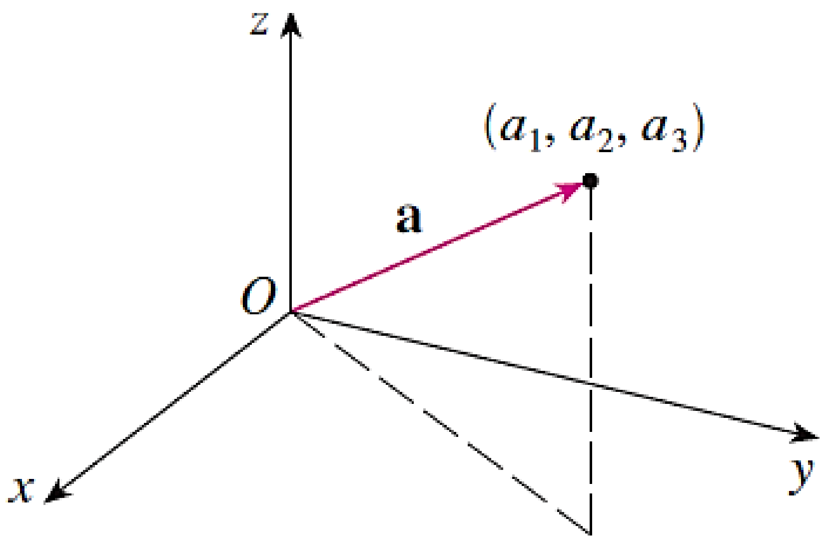
- Para muitos caso é conveniente tratar os vetores algebricamente.
- Posicionamos o ponto inicial de um vetor **a** na origem de um sistema de coordenadas.
- O ponto final de **a** tem coordenadas da forma $(a_1, a_2)$ no plano ou $(a_1, a_2, a_3)$ se no espaço.
- Essas coordenadas são denominadas componentes de **a** e escrevemos:

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

# Componentes de vetores




$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$$




$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

# Componentes de vetores

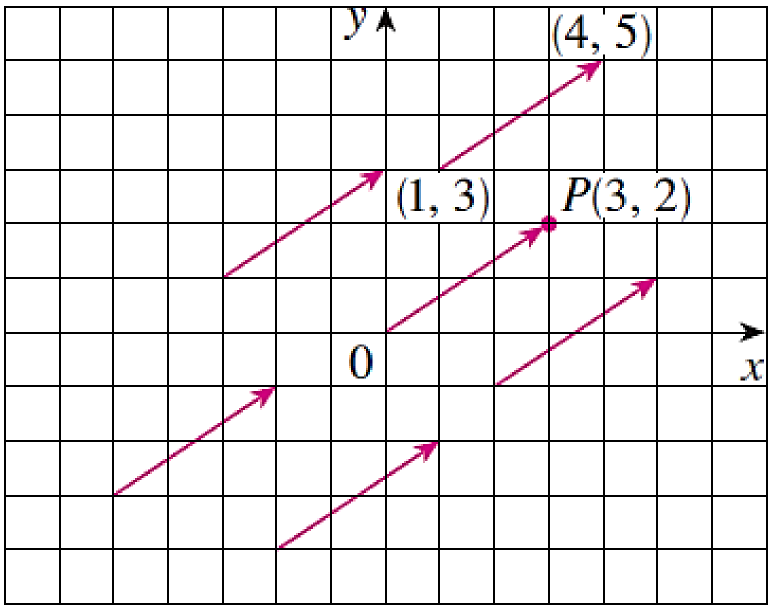



**FIGURA 12**
Representações do vetor **a** = ⟨3, 2⟩

- Os vetores na Figura 12 são todos equivalentes ao vetor $\overrightarrow{OP} = \langle 3, 2 \rangle$.

# Componentes de vetores

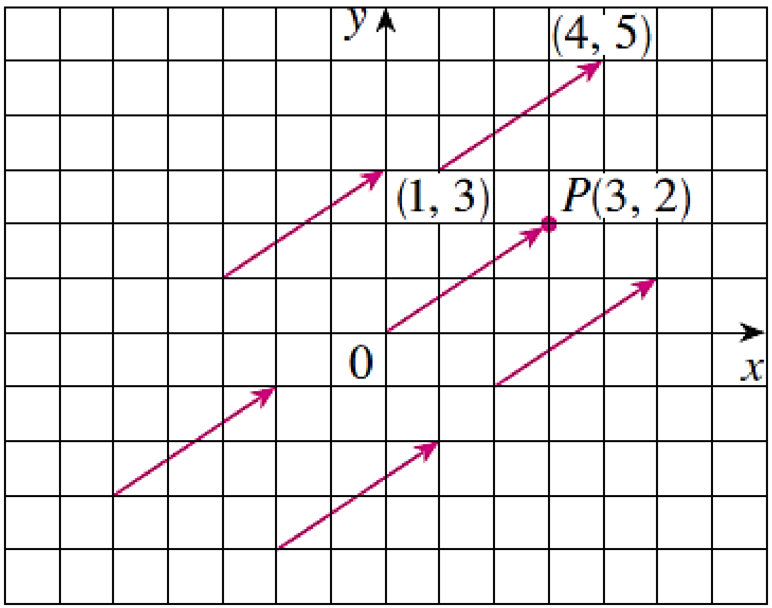



**FIGURA 12**
Representações do vetor $\mathbf{a} = \langle 3, 2 \rangle$

- Os vetores na Figura 12 são todos equivalentes ao vetor $\overrightarrow{OP} = \langle 3, 2 \rangle$.
- Todos esses vetores são representações do vetor algébrico $\overrightarrow{OP}$.
- A representação $\overrightarrow{OP}$ com início na origem é chamado vetor posição do ponto P.

# Componentes de vetores

Dados os pontos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$, o vetor **a** com representação $\overrightarrow{AB}$ é

$$\mathbf{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

# Componentes de vetores

Dados os pontos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$, o vetor $\mathbf{a}$ com representação $\overrightarrow{AB}$ é

$$\mathbf{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

## Exemplo 2

Encontre o vetor representado pelo segmento de reta orientado com ponto inicial A(2, -3, 4) e ponto final B(-2, 1, 1)

o vetor correspondente a $\overrightarrow{AB}$ é

$$\mathbf{a} = \langle -2 - 2, 1 - (-3), 1 - 4 \rangle = \langle -4, 4, -3 \rangle$$

# Magnitude ou comprimento de vetores

- A magnitude ou módulo de um vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ é o comprimento de qualquer de suas representações.
- É denotado por:

$$|\vec{v}| \text{ ou } ||\vec{v}|| \quad \text{(Magnitude ou módulo)}$$

# Magnitude ou comprimento de vetores

- A magnitude ou módulo de um vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ é o comprimento de qualquer de suas representações.
- É denotado por:

$|\vec{v}|$ ou $\|\vec{v}\|$ (Magnitude ou módulo)

O comprimento de um vetor bidimensional $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ é

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

O comprimento de um vetor tridimensional $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ é

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

# Soma algébrica dos componentes de vetores

- Somamos as componentes dos vetores.

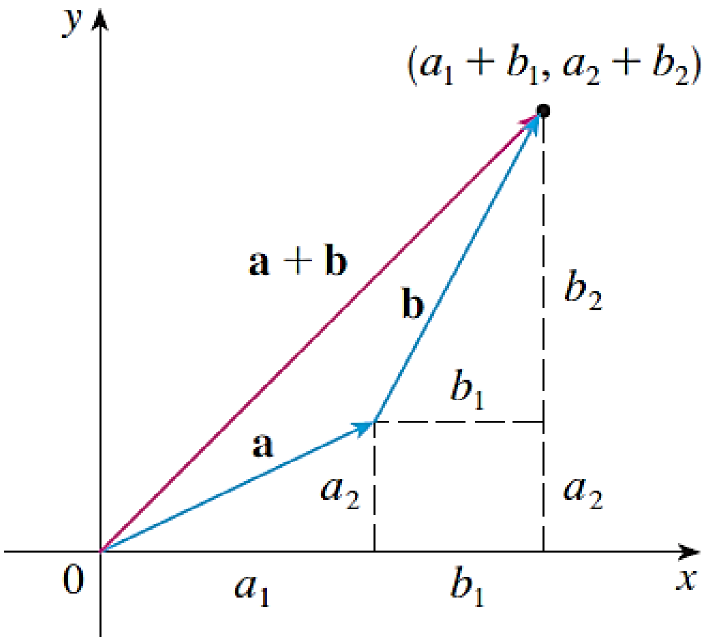



FIGURA 14

Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, então

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$$

# Multiplicação de vetor por escalar

# Multiplicação de vetor por escalar

**Definição de Multiplicação Escalar** Se $c$ é um escalar e $\mathbf{v}$ é um vetor, então a **multiplicação escalar** $c\mathbf{v}$ é o vetor cujo comprimento é $|c|$ vezes o comprimento de $\mathbf{v}$ e cuja direção e sentido são os mesmos de $\mathbf{v}$ se $c > 0$ e sentido oposto a $\mathbf{v}$ se $c < 0$. Se $c = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

# Multiplicação de vetor por escalar

**Definição de Multiplicação Escalar** Se $c$ é um escalar e $\mathbf{v}$ é um vetor, então a **multiplicação escalar** $c\mathbf{v}$ é o vetor cujo comprimento é $|c|$ vezes o comprimento de $\mathbf{v}$ e cuja direção e sentido são os mesmos de $\mathbf{v}$ se $c > 0$ e sentido oposto a $\mathbf{v}$ se $c < 0$. Se $c = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

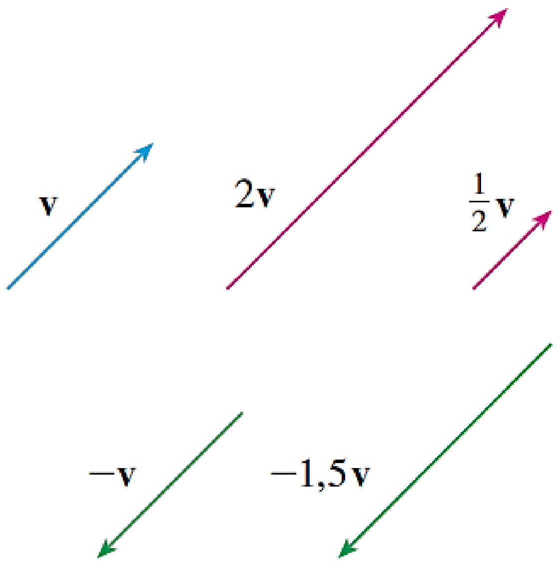



**FIGURA 7**
Múltiplos escalares de **v**

# Multiplicação de vetor por escalar

**Definição de Multiplicação Escalar** Se $c$ é um escalar e $\mathbf{v}$ é um vetor, então a **multiplicação escalar** $c\mathbf{v}$ é o vetor cujo comprimento é $|c|$ vezes o comprimento de $\mathbf{v}$ e cuja direção e sentido são os mesmos de $\mathbf{v}$ se $c > 0$ e sentido oposto a $\mathbf{v}$ se $c < 0$. Se $c = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

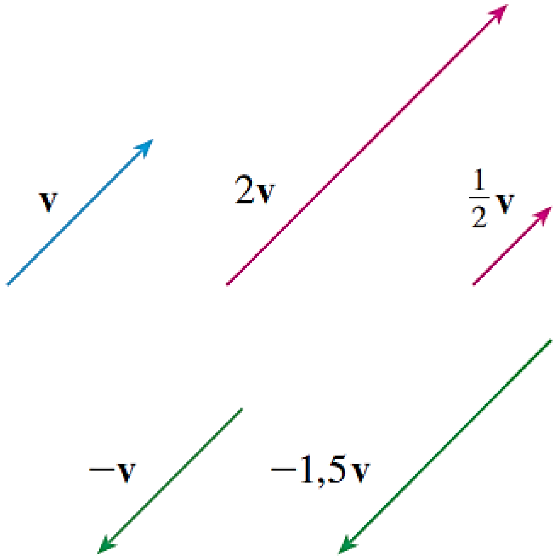
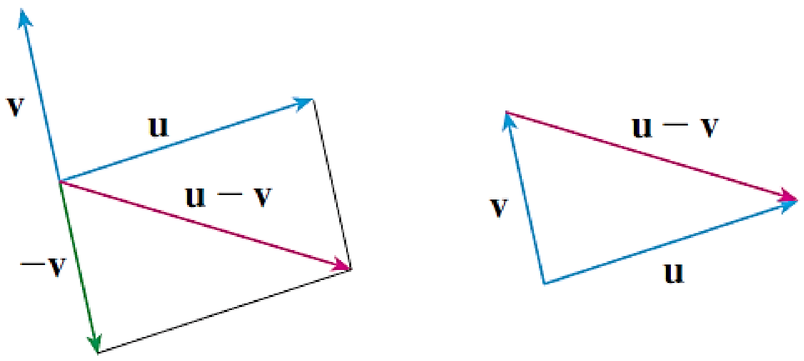



**FIGURA 7**
Múltiplos escalares de **v**

## Subtração de vetores



# Multiplicação de vetor por escalar

- Para multiplicarmos um vetor por um escalar multiplicamos cada componente por esse escalar.

Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$

$$c\mathbf{a} = \langle ca_1, ca_2 \rangle$$

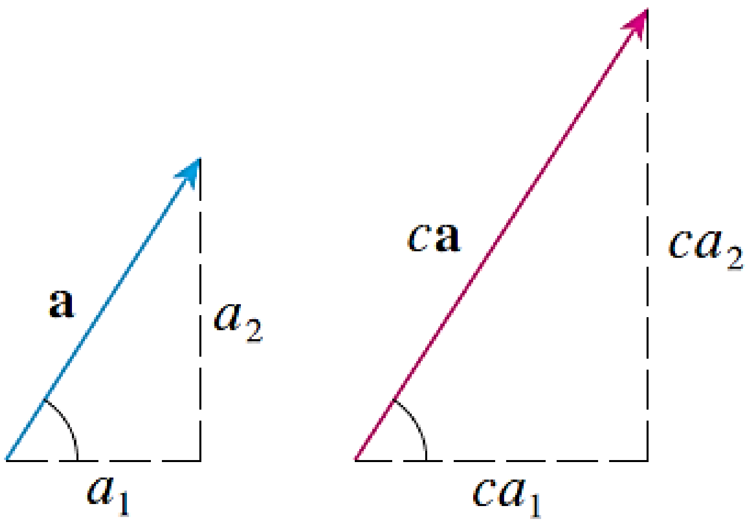



**FIGURA 15**

# Multiplicação de vetor por escalar

## Exemplo 3

Se **a** e **b** são os vetores mostrados na Figura 9, desenhe **a + (-**2**b)**.

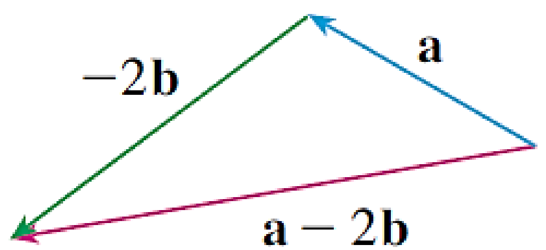

FIGURA 9

# Multiplicação de vetor por escalar

## Exemplo 3

Se **a** e **b** são os vetores mostrados na Figura 9, desenhe **a + (-**2**b)**.


FIGURA 9



# Exemplo 4

Se $\boldsymbol{a} = \langle 4, 0, 3 \rangle$ e $\boldsymbol{b} = \langle -2, 1, 5 \rangle$, encontre $|\boldsymbol{a}|$ e os vetores **a +  b**, **a - b**, 3**b** e 2**a + **5**b**.

# Exemplo 4

Se $\boldsymbol{a} = \langle 4, 0, 3 \rangle$ e $\boldsymbol{b} = \langle -2, 1, 5 \rangle$, encontre $|\boldsymbol{a}|$ e os vetores **a + b**, **a - b**, 3**b** e 2**a + **5**b**.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

## Exemplo 4

Se $\boldsymbol{a} = \langle 4, 0, 3 \rangle$ e $\boldsymbol{b} = \langle -2, 1, 5 \rangle$, encontre $|\boldsymbol{a}|$ e os vetores **a + b**, **a - b**, 3**b** e 2**a** + 5**b**.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \langle 4, 0, 3 \rangle + \langle -2, 1, 5 \rangle \\ &= \langle 4 + (-2), 0 + 1, 3 + 5 \rangle = \langle 2, 1, 8 \rangle \end{aligned}$$

# Exemplo 4

Se $\boldsymbol{a} = \langle 4, 0, 3 \rangle$ e $\boldsymbol{b} = \langle -2, 1, 5 \rangle$, encontre $|\boldsymbol{a}|$ e os vetores **a +  b**, **a - b**, 3**b** e 2**a** + 5**b**.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle 4, 0, 3 \rangle + \langle -2, 1, 5 \rangle$$

$$= \langle 4 + (-2), 0 + 1, 3 + 5 \rangle = \langle 2, 1, 8 \rangle$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle 4, 0, 3 \rangle - \langle -2, 1, 5 \rangle$$

$$= \langle 4 - (-2), 0 - 1, 3 - 5 \rangle = \langle 6, -1, -2 \rangle$$

# Exemplo 4

Se $\boldsymbol{a} = \langle 4, 0, 3\rangle$ e $\boldsymbol{b} = \langle -2, 1, 5\rangle$, encontre $|\boldsymbol{a}|$ e os vetores **a +  b**, **a - b**, 3**b** e 2**a** + 5**b**.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= \langle 4, 0, 3\rangle + \langle -2, 1, 5\rangle \\ &= \langle 4 + (-2), 0 + 1, 3 + 5\rangle = \langle 2, 1, 8\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a} - \mathbf{b} &= \langle 4, 0, 3\rangle - \langle -2, 1, 5\rangle \\ &= \langle 4 - (-2), 0 - 1, 3 - 5\rangle = \langle 6, -1, -2\rangle\end{aligned}$$

$$3\mathbf{b} = 3\langle -2, 1, 5\rangle = \langle 3(-2), 3(1), 3(5)\rangle = \langle -6, 3, 15\rangle$$

# Exemplo 4

Se $\boldsymbol{a} = \langle 4, 0, 3 \rangle$ e $\boldsymbol{b} = \langle -2, 1, 5 \rangle$, encontre $|\boldsymbol{a}|$ e os vetores **a + b**, **a - b**, 3**b** e 2**a** + 5**b**.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle 4, 0, 3 \rangle + \langle -2, 1, 5 \rangle$$

$$= \langle 4 + (-2), 0 + 1, 3 + 5 \rangle = \langle 2, 1, 8 \rangle$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle 4, 0, 3 \rangle - \langle -2, 1, 5 \rangle$$

$$= \langle 4 - (-2), 0 - 1, 3 - 5 \rangle = \langle 6, -1, -2 \rangle$$

$$3\mathbf{b} = 3\langle -2, 1, 5 \rangle = \langle 3(-2), 3(1), 3(5) \rangle = \langle -6, 3, 15 \rangle$$

$$2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} = 2\langle 4, 0, 3 \rangle + 5\langle -2, 1, 5 \rangle$$

$$= \langle 8, 0, 6 \rangle + \langle -10, 5, 25 \rangle = \langle -2, 5, 31 \rangle$$

# Propriedades dos vetores

Se $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ são vetores em $V_n$ e $c$ e $d$ são escalares, então

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
2. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
3. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
4. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
5. $c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$
6. $(c + d)\mathbf{a} = c\mathbf{a} + d\mathbf{a}$
7. $(cd)\mathbf{a} = c(d\mathbf{a})$
8. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

$V_2$: conjunto de vetores no plano.
$V_3$: conjunto de vetores no espaço.
$V_n$: conjunto de vetores na dimensão n.

# Base canônica

# Vetores da base canônica (*i*, *j*, *k*)

- São vetores que possuem comprimento unitário.
- Têm a mesma direção e sentido dos eixos x, y e z.
- São ortogonais entre si.

# Vetores da base canônica (*i*, *j*, *k*)

- São vetores que possuem comprimento unitário.
- Têm a mesma direção e sentido dos eixos x, y e z.
- São ortogonais entre si.

$$\boldsymbol{i} = \langle 1, 0 \rangle$$

$$\boldsymbol{j} = \langle 0, 1 \rangle$$

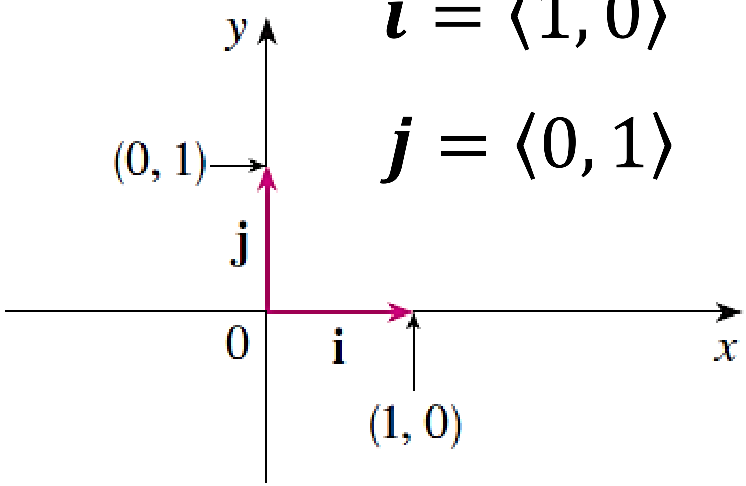



**FIGURA 17**

Vetores da base canônica em $V_2$ e $V_3$

# Vetores da base canônica ($i$, $j$, $k$)

- São vetores que possuem comprimento unitário.
- Têm a mesma direção e sentido dos eixos x, y e z.
- São ortogonais entre si.

$$\boldsymbol{i} = \langle 1, 0 \rangle$$

$$\boldsymbol{j} = \langle 0, 1 \rangle$$

$$\boldsymbol{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$$

$$\boldsymbol{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

$$\boldsymbol{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

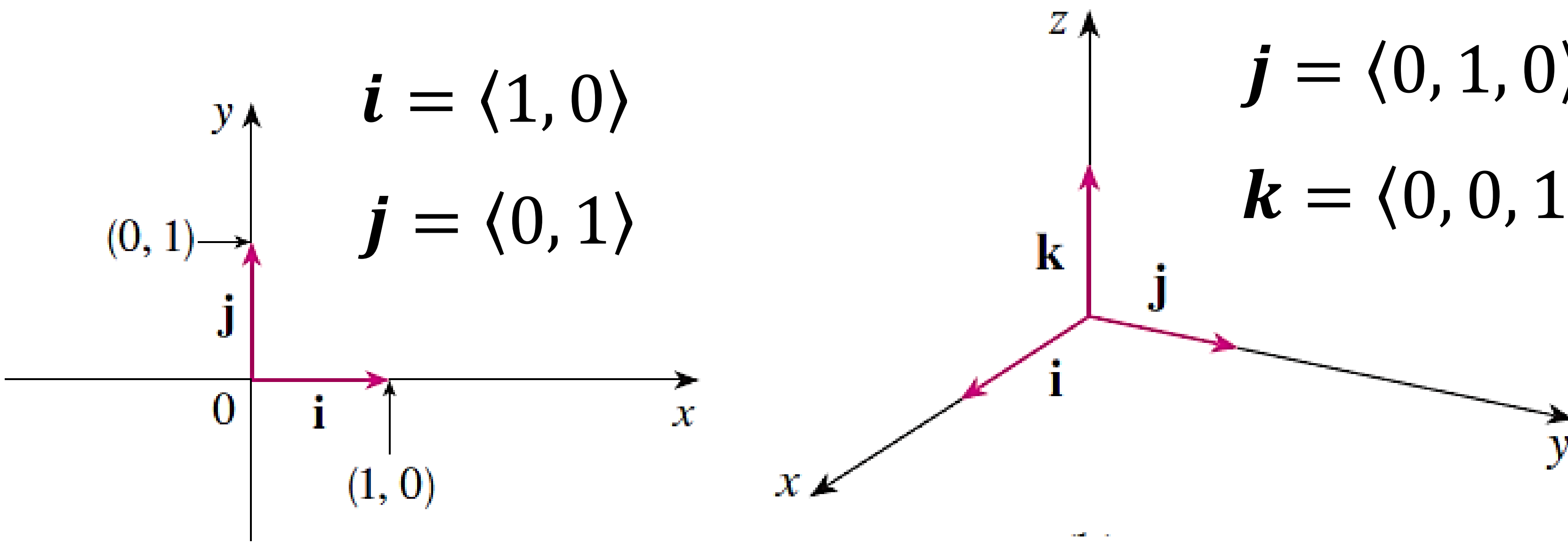



**FIGURA 17**

Vetores da base canônica em $V_2$ e $V_3$

# Representação de vetores na base canônica

Podemos escreve um vetor $\boldsymbol{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ utilizando a base canônica como:

$$\boldsymbol{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$$

Outras notações para representação na base canônica:

$$a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}$$

# Adição de vetores na base canônica

## Exemplo 5

Se $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{b} = \mathbf{4}\boldsymbol{i} + \mathbf{7}\boldsymbol{k}$, expresse o vetor 2**a** + 3**b**.

# Adição de vetores na base canônica

## Exemplo 5

Se $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{4i} + \boldsymbol{7k}$, expresse o vetor 2**a** + 3**b**.

$$2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = 2(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + 3(4\mathbf{i} + 7\mathbf{k})$$

$$= 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k} + 12\mathbf{i} + 21\mathbf{k} = 14\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$$

# Definição de versor

- Um versor ou vetor unitário é um vetor de módulo 1.
- Os vetores, ***i***, ***j*** e ***k*** são exemplos versores.
- Se **a** ≠ 0, então o vetor unitário **u** de mesma direção e mesmo sentido de **a**, chamado versor de **a**, é calculado por:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\,\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

# Definição de versor

## Exemplo 6

Determine o versor de $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$

# Definição de versor

## Exemplo 6

Determine o versor de $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$

O vetor dado tem módulo

$$|2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

# Definição de versor

## Exemplo 6

Determine o versor de $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$

O vetor dado tem módulo

$$|2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

portanto, pela Equação 4, o versor é

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\,\mathbf{a} = \tfrac{1}{3}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \tfrac{2}{3}\,\mathbf{i} - \tfrac{1}{3}\,\mathbf{j} - \tfrac{2}{3}\,\mathbf{k}$$

# Para depois desta aula:

- Ler o capítulo 12 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

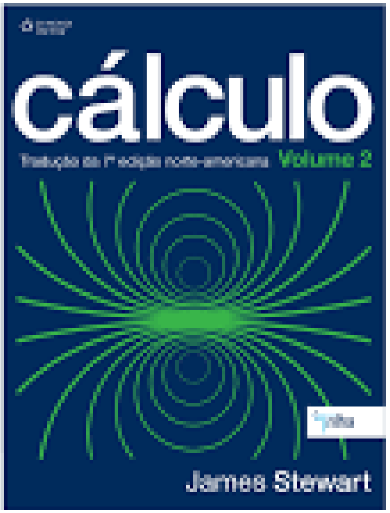
# Próxima aula:

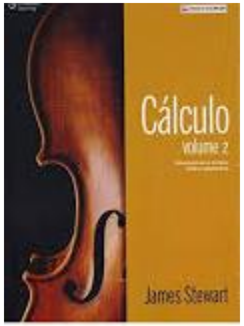
- Produto de vetores

# Bibliografia


**1**. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.


Numeração dos exercícios com base na 7ª ed.





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

# Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br