Cálculo I

Licenciatura em Química

Aula 01
Números Reais

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

Introdução

- O estudo do Cálculo Diferencial e Integral utiliza o conjunto dos números reais;

- Os conceitos de limites, derivadas e integração estão definidos nesse conjunto numérico

Conjuntos

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

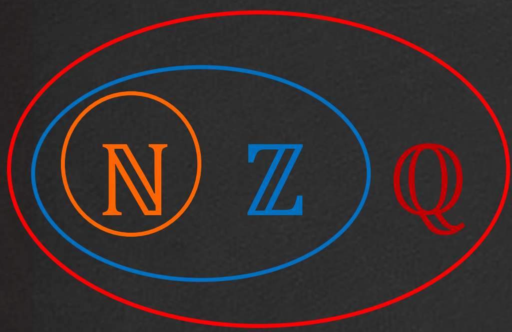
$\mathbb{N}$

Conjuntos

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

Conjuntos

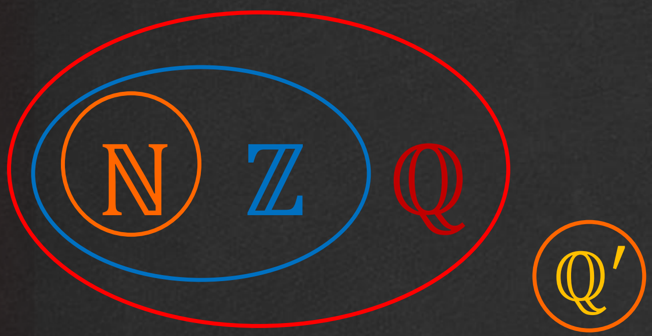


$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{m}{n}, m \ e \ n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

Conjuntos



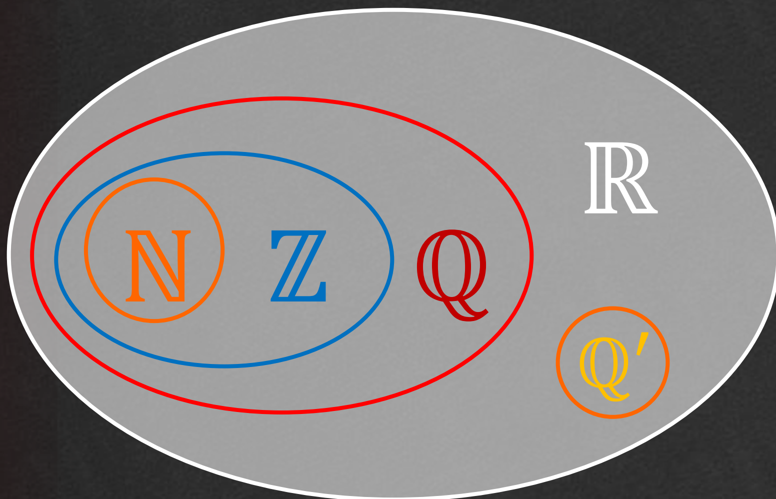
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{m}{n}, m \ e \ n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

$\mathbb{Q}'$: $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$; $\pi = 3{,}1415\ldots$; $e = 2{,}7182\ldots$

Conjuntos



$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{m}{n}, m \text{ e } n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$$

$\mathbb{Q}'$: $\sqrt{2} = 1{,}414\dots$; $\pi = 3{,}1415\dots$; $e = 2{,}7182\dots$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

Adição e multiplicação

Sejam a, b e c $\in \mathbb{R}$

1. Fechamento: $a + b\ (soma)$
   $a \times b\ (multiplicação)$

Adição e multiplicação

Sejam a, b e c $\in \mathbb{R}$

1. Fechamento: $a + b \ (soma)$
 $a \times b \ (multiplicação)$

2. Comutatividade: $a + b = b + a$
 $a \times b = b \times a$

Adição e multiplicação

Sejam a, b e c $\in \mathbb{R}$

1. Fechamento: $a + b\ (soma)$
   $a \times b\ (multiplicação)$

2. Comutatividade: $a + b = b + a$
   $a \times b = b \times a$

3. Associatividade: $a + (b + c) = (a + b) + c$
   $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

Adição e multiplicação

Sejam a, b e c $\in \mathbb{R}$

1. Fechamento: $$a + b \ (soma)$$ $$a \times b \ (multiplicação)$$

2. Comutatividade: $$a + b = b + a$$ $$a \times b = b \times a$$

3. Associatividade: $$a + (b + c) = (a + b) + c$$ $$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

4. Distributividade: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Adição e multiplicação

Sejam a, b e c $\in \mathbb{R}$

5. Elemento neutro:

$$a + 0 = a \quad (0\text{: } soma)$$
$$a \times 1 = a \quad (1\text{: } multiplicação)$$

Adição e multiplicação

Sejam a, b e c $\in \mathbb{R}$

5. Elemento neutro: $a + 0 = a \quad (0\colon\ soma)$
   $a \times 1 = a \quad (1\colon\ multiplicação)$

6. Simétrico ou oposto: $\exists(-a)\ tal\ que\colon a + (-a) = 0$

Adição e multiplicação

Sejam a, b e c $\in \mathbb{R}$

5. Elemento neutro:

$$a + 0 = a \quad (0: \ soma)$$
$$a \times 1 = a \quad (1: \ multiplicação)$$

6. Simétrico ou oposto:

$$\exists(-a) \ tal \ que: a + (-a) = 0$$

7. Inverso:

$$\forall \ a \neq 0 \ existe \ o \ inverso: \ \frac{1}{a}$$

Subtração e divisão

Sejam $a, \mathrm{b} \in \mathbb{R}$

8. Subtração: $a - b = a + (-b)$

Subtração e divisão

Sejam $a, \mathrm{b} \in \mathbb{R}$

8. Subtração: $a - b = a + (-b)$

9. Divisão: $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} \quad em\ que\ b \neq 0$

Desigualdades

Axioma de ordem:

Desigualdades

Houaiss

Axioma *\s.m.\ Premissa considerada necessariamente evidente e verdadeira, fundamental de uma demonstração, porém ela mesma indemonstrável.*

Axioma de ordem:

Desigualdades

Houaiss

Axioma *\ s.m. \ Premissa considerada necessariamente evidente e verdadeira, fundamental de uma demonstração, porém ela mesma indemonstrável.*

Axioma de ordem:

I. Se $a \in \mathbb{R}$, então: $a = 0$ ou $a > 0$ ou $a < 0$

II. A soma de dois números positivos é positiva;

III. O produto de dois números positivos é positivo.

Desigualdades - Definições

1. $a \in \mathbb{R}$ é negativo se e somente se $-a$ é positivo;

Desigualdades - Definições

1. $a \in \mathbb{R}$ é negativo se e somente se $-a$ é positivo;

2. Símbolos menor que (<) e maior que (>):

$$a < b \iff b - a \text{ é } positivo$$
$$a > b \iff a - b \text{ é } positivo$$

Desigualdades - Definições

1. $a \in \mathbb{R}$ é negativo se e somente se $-a$ é positivo;

2. Símbolos menor que (<) e maior que (>):

$$a < b \iff b - a \text{ é } positivo$$
$$a > b \iff a - b \text{ é } positivo$$

3. Símbolos menor ou igual que (≤) e maior ou igual que (≥):

$$a \leq b \iff a < b \; ou \; a = b$$
$$a \geq b \iff a > b \; ou \; a = b$$

Desigualdades - propriedades

Sejam a, b, c, d $\in \mathbb{R}$

i. Se $a > b \ e \ b > c, então \ a > c$

Desigualdades - propriedades

Sejam $a, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d} \in \mathbb{R}$

i. Se $a > b \ \ e \ b > c, então \ \ a > c$

ii. Se $a > b \ e \ c > 0, então \ \ ac > bc$

Desigualdades - propriedades

Sejam a, b, c, d $\in \mathbb{R}$

i. Se $a > b \ e \ b > c, então \ a > c$

ii. Se $a > b \ e \ c > 0, então \ ac > bc$

iii. Se $a > b \ e \ c < 0, então \ ac < bc$

Desigualdades - propriedades

Sejam a, b, c, d $\in \mathbb{R}$

i. Se $a > b \; e \; b > c, então \; a > c$

ii. Se $a > b \; e \; c > 0, então \; ac > bc$

iii. Se $a > b \; e \; c < 0, então \; ac < bc$

iv. Se $a > b, então \; a + c > b + c$

Desigualdades - propriedades

Sejam a, b, c, d $\in \mathbb{R}$

i. Se $a > b \;\; e \; b > c, então \;\; a > c$

ii. Se $a > b \; e \; c > 0, então \;\; ac > bc$

iii. Se $a > b \; e \; c < 0, então \;\; ac < bc$

iv. Se $a > b, então \;\; a + c > b + c$

v. Se $a > b \; e \; c > d \;\; \Leftrightarrow \;\; a + c > b + d$

Desigualdades - propriedades

Sejam a, b, c, d $\in \mathbb{R}$

i. Se $a > b \ e \ b > c, então \ a > c$

ii. Se $a > b \ e \ c > 0, então \ ac > bc$

iii. Se $a > b \ e \ c < 0, então \ ac < bc$

iv. Se $a > b, então \ a + c > b + c$

v. Se $a > b \ e \ c > d \iff a + c > b + d$

vi. Se $a > b > 0 \ e \ c > d > 0 \iff ac > bd$

Exemplo 1 – Resolva a inequação

$5x + 3 < 2x + 7$

Exemplo 2 – Estudar o sinal

Expressão: $\frac{x+3}{x-2}$

Exemplo 3 – Resolver a inequação

$$\frac{3x-1}{x+2} \geq 5$$

Exercício em classe – Resolver

$$\frac{2x+1}{x-4} < 0$$

Valor absoluto

Seja $a \in \mathbb{R}$

Notação do valor absoluto: $|a|$

Definição:

$$|a| = a \quad se \quad a \geq 0$$

$$|a| = -a \quad se \quad a < 0$$

Exemplo 4

a) $|5| = 5$ b) $|-3| = -(-3) = 3$

Exemplo 5

Mostre que, para todo $x \in \mathbb{R}$: $|x|^2 = x^2$

Interpretação geométrica

- O valor absoluto de $a \in \mathbb{R}$ também é chamado de módulo de a;

- Representa a distância entre a e 0:

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

Exemplo 6

Supondo $a > 0$, resolver a equação: $|x| = a$

Valor absoluto - propriedades

Sejam $a, \mathrm{b}, \in \mathbb{R}$

i. $|x| < a \iff -a < x < a \quad para \;\; (a > 0)$

Valor absoluto - propriedades

Sejam a, b, $\in \mathbb{R}$

i. $|x| < a \iff -a < x < a \quad para \;\; (a > 0)$

ii. $|x| > a \iff x > a \;\; ou \;\; x < -a \quad (a > 0)$

Valor absoluto - propriedades

Sejam a, b, $\in \mathbb{R}$

i. $|x| < a \iff -a < x < a \quad para \ (a > 0)$

ii. $|x| > a \iff x > a \ ou \ x < -a \quad (a > 0)$

iii. $|a.b| = |a|.|b|$

Valor absoluto - propriedades

Sejam $a, \mathrm{b}, \in \mathbb{R}$

i. $|x| < a \iff -a < x < a \quad para \ (a > 0)$

ii. $|x| > a \iff x > a \ ou \ x < -a \quad (a > 0)$

iii. $|a.b| = |a|.|b|$

iv. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Valor absoluto - propriedades

Sejam $a, \mathrm{b}, \in \mathbb{R}$

i. $|x| < a \iff -a < x < a \quad para \ (a > 0)$

ii. $|x| > a \iff x > a \ ou \ x < -a \quad (a > 0)$

iii. $|a.b| = |a|.|b|$

iv. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

v. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Desigualdade triangular)

Exemplo 7 – resolva as inequações

$$|7x - 1| = |2x + 5|$$

Tarefas para depois desta aula:

- Reler o capítulo 1 do livro texto;
- Resolver os exemplos dados em aula;
- Realizar a lista de exercícios observando as propriedades;

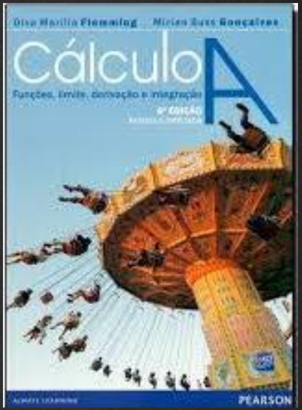
Próxima aula teórica:

- 1ª Atividade diagnóstica (um exercício da lista);
- Revisão de funções

Bibliografia

3. GONÇALVES, Mirian B.; FLEMMING, Diva M. Cálculo A. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2007.

(Revisão de números reais)



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br