Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 01 - Aula 2
Produto de vetores

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Produto de vetores

- Quando multiplicamos um vetor por outro temos um produto de vetores.
- Há dois tipos de produtos de vetores:
  - Produto escalar (o resultado é um número real)
  - Produto vetorial (o resultado é um novo vetor)

Produto escalar

Produto escalar

1 **Definição** Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, então o **produto escalar** de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é o número $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ dado por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Produto escalar

$\boxed{1}$ **Definição** Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, então o **produto escalar** de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é o número $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ dado por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

- O produto escalar é também conhecido como produto interno.
- O produto escalar de vetores bidimensionais é definido de forma análoga, com duas componentes.

Produto escalar

Exemplo 1 Calcule os produtos escalares entre $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$

Produto escalar

Exemplo 1 Calcule os produtos escalares entre $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$

$$\langle 2, 4 \rangle \cdot \langle 3, -1 \rangle = 2(3) + 4(-1) = 2$$

Produto escalar

Exemplo 1 Calcule os produtos escalares entre $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$

$$\langle 2, 4\rangle \cdot \langle 3, -1\rangle = 2(3) + 4(-1) = 2$$

$$\langle -1, 7, 4\rangle \cdot \langle 6, 2, -\tfrac{1}{2}\rangle = (-1)(6) + 7(2) + 4\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 6$$

Produto escalar

Exemplo 1 Calcule os produtos escalares entre $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$

$$\langle 2, 4 \rangle \cdot \langle 3, -1 \rangle = 2(3) + 4(-1) = 2$$

$$\langle -1, 7, 4 \rangle \cdot \langle 6, 2, -\tfrac{1}{2} \rangle = (-1)(6) + 7(2) + 4\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 6$$

$$(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 1(0) + 2(2) + (-3)(-1) = 7$$

Produto escalar

$\boxed{2}$ **Propriedades do Produto Escalar** Se $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ são vetores em V_3 e c é um escalar, então

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
4. $(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{b})$
5. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$

Muitas das regras são as mesmas regras algébricas para os números reais.

Produto escalar: interpretação geométrica

3 **Teorema** Se θ é o ângulo entre os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, então

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\, |\mathbf{b}| \cos\theta$$

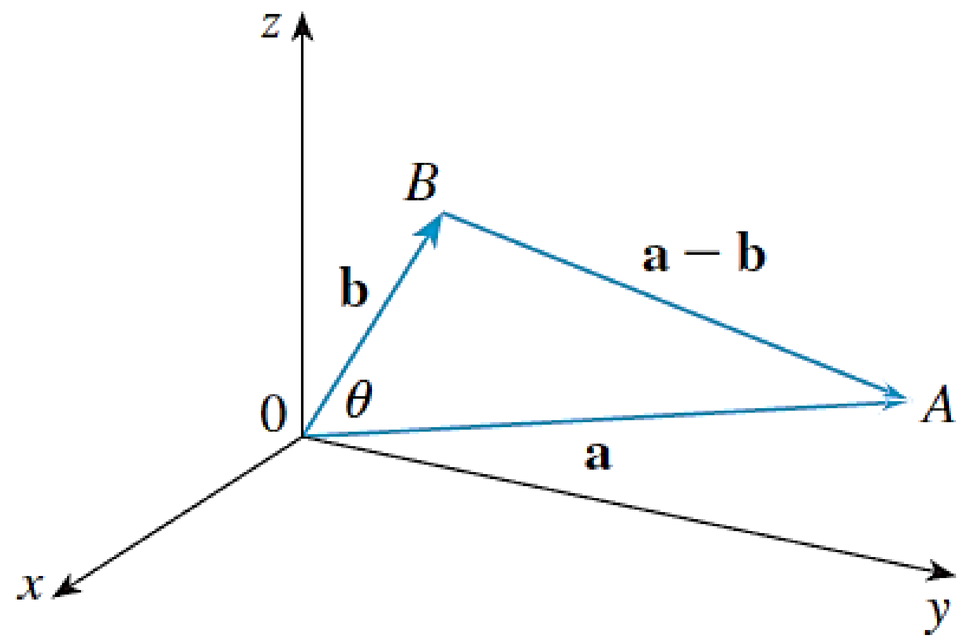


FIGURA 1

Produto escalar: interpretação geométrica

3 **Teorema** Se θ é o ângulo entre os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, então

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta$$

- Se **a** e **b** são paralelos, então $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.
- Consequência do teorema:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

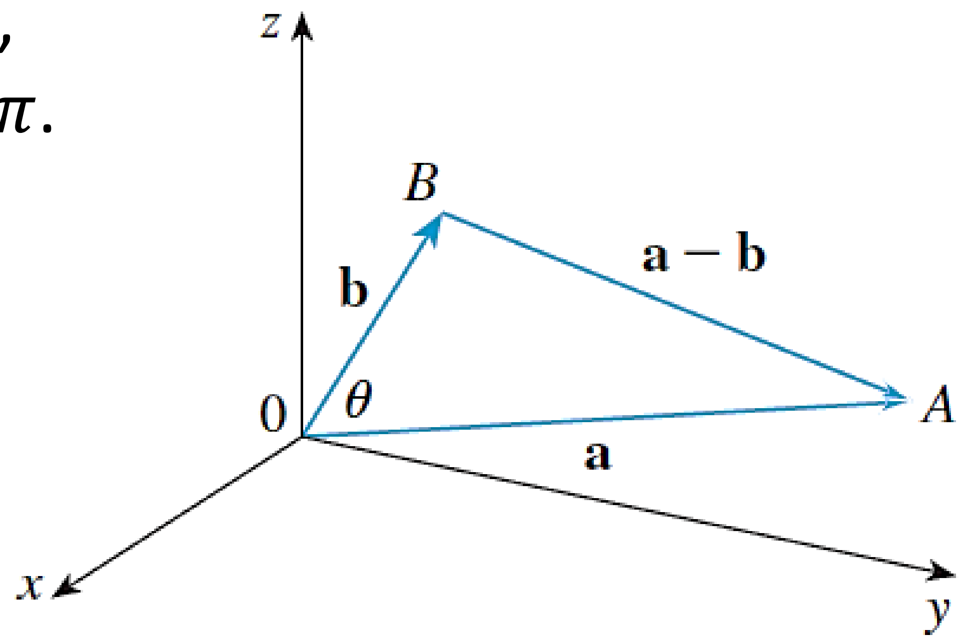


FIGURA 1

Produto escalar

Exemplo 3 Determine o ângulo entre $\boldsymbol{a} = \langle 2, 2, -1 \rangle$ e $\boldsymbol{b} = \langle 5, -3, 2 \rangle$.

Produto escalar

Exemplo 3 Determine o ângulo entre $\boldsymbol{a} = \langle 2, 2, -1 \rangle$ e $\boldsymbol{b} = \langle 5, -3, 2 \rangle$.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3 \quad \text{e} \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$$

Produto escalar

Exemplo 3 Determine o ângulo entre $\boldsymbol{a} = \langle 2, 2, -1 \rangle$ e $\boldsymbol{b} = \langle 5, -3, 2 \rangle$.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3 \quad \text{e} \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$$

e uma vez que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2(5) + 2(-3) + (-1)(2) = 2$$

Produto escalar

Exemplo 3 Determine o ângulo entre $\boldsymbol{a} = \langle 2, 2, -1 \rangle$ e $\boldsymbol{b} = \langle 5, -3, 2 \rangle$.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3 \quad \text{e} \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$$

e uma vez que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2(5) + 2(-3) + (-1)(2) = 2$$

temos,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{2}{3\sqrt{38}}$$

Produto escalar

Exemplo 3 Determine o ângulo entre $\boldsymbol{a} = \langle 2, 2, -1 \rangle$ e $\boldsymbol{b} = \langle 5, -3, 2 \rangle$.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3 \quad \text{e} \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$$

e uma vez que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2(5) + 2(-3) + (-1)(2) = 2$$

temos,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{2}{3\sqrt{38}}$$

Assim, o ângulo entre **a** e **b** é

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{38}}\right) \approx 1.46 \quad (\text{ou } 84°)$$

Produto escalar: resultado relevante

- Se dois vetores não nulos **a** e **b** são ortogonais ou perpendiculares, então o ângulo entre eles é $\pi/2$.
- Em consequência:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |a||b| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Produto escalar: resultado relevante

- Se dois vetores não nulos **a** e **b** são ortogonais ou perpendiculares, então o ângulo entre eles é $\pi/2$.
- Em consequência:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |a||b| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- Reciprocamente:

se $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ então $\cos\theta = 0$, portanto $\theta = \pi/2$.

Dois vetores $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são ortogonais se e somente se $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

Produto escalar: resultado relevante

- Uma vez que o sinal do produto escalar determina o sinal do ângulo θ, porque:

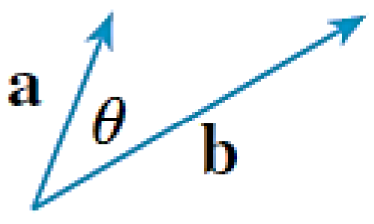
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

Produto escalar: resultado relevante

- Uma vez que o sinal do produto escalar determina o sinal do ângulo θ, porque:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

- Então:



$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} > 0$

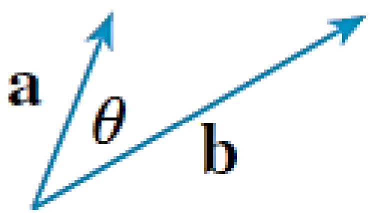
θ agudo

Produto escalar: resultado relevante

- Uma vez que o sinal do produto escalar determina o sinal do ângulo θ, porque:

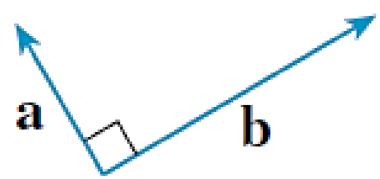
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

- Então:



$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} > 0$

θ agudo



$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$

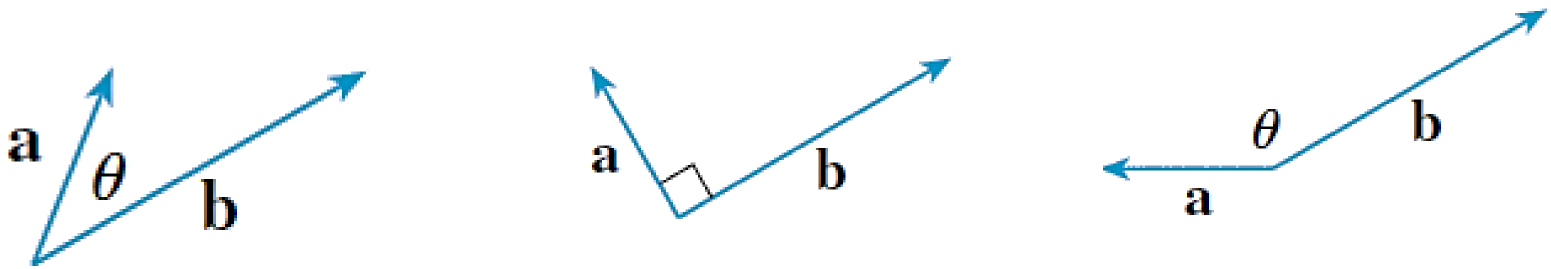
$\theta = \pi/2$

Produto escalar: resultado relevante

- Uma vez que o sinal do produto escalar determina o sinal do ângulo θ, porque:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

- Então:



$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} > 0$
θ agudo

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$
$\theta = \pi/2$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} < 0$
θ obtuso

Produto escalar

Exemplo 4

Mostre que $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ é perpendicular ao vetor $\boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

Produto escalar

Exemplo 4

Mostre que $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ é perpendicular ao vetor $\boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) \cdot (5\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) =$$

Produto escalar

Exemplo 4

Mostre que $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ é perpendicular ao vetor $\boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) \cdot (5\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) =$$

$$= 2(5) + 2(-4) + (-1)(2) = \mathbf{0}.$$

Produto escalar

Exemplo 4

Mostre que $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ é perpendicular ao vetor $\boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) \cdot (5\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) =$$

$$= 2(5) + 2(-4) + (-1)(2) = \mathbf{0}.$$

Portanto:

$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b},$ como queríamos demonstrar.

Projeção de vetores

Projeção de vetores

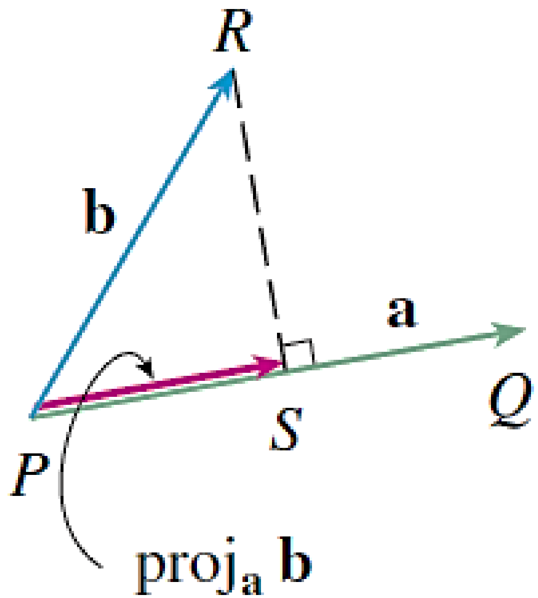


FIGURA 4
Projeção de vetores

- O vetor $\overrightarrow{PS}$ é chamado vetor projeção de **b** sobre **a**.
- A projeção pode ser pensada como a sombra de **b** sobre **a**.
- A projeção escalar de **b** sobre **a** (ou componente) é o módulo com sinal do vetor projeção.

Projeção de vetores

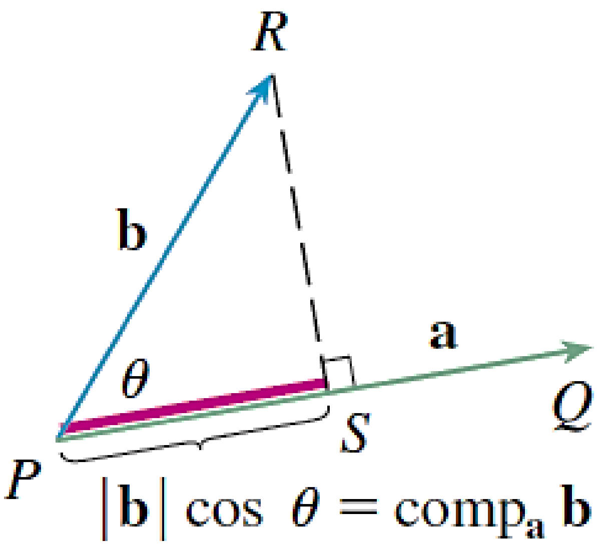
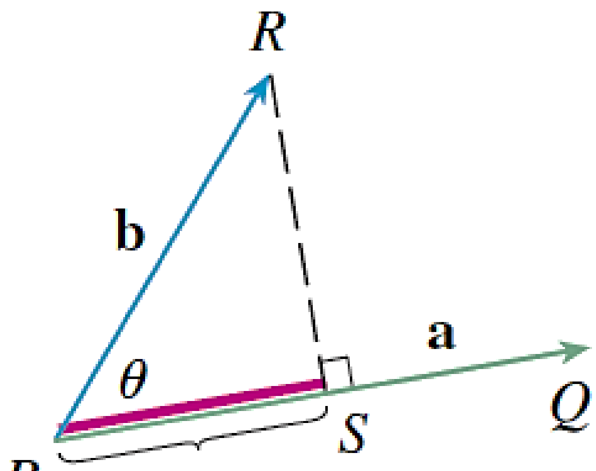


FIGURA 5
Projeção escalar

Projeção escalar de **b** sobre **a**:

$$\boxed{\text{comp}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}}$$

Projeção de vetores



$$|\mathbf{b}| \cos\,\theta = \text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$$

FIGURA 5
Projeção escalar

Projeção escalar de **b** sobre **a**:

$$\text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$$

Vetor projeção de **b** sobre **a**:

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}\right)\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\,\mathbf{a}$$

Projeção de vetores

Exemplo 6 Determine a projeção e a projeção escalar de $\boldsymbol{b} = \langle 1, 1, 2 \rangle$ sobre $\boldsymbol{a} = \langle -2, 3, 1 \rangle$.

Projeção de vetores

Exemplo 6 Determine a projeção e a projeção escalar de $\boldsymbol{b} = \langle 1, 1, 2 \rangle$ sobre $\boldsymbol{a} = \langle -2, 3, 1 \rangle$.

Como $|\mathbf{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$, a projeção escalar de $\mathbf{b}$ sobre $\mathbf{a}$ é

Projeção de vetores

Exemplo 6 Determine a projeção e a projeção escalar de $\boldsymbol{b} = \langle 1, 1, 2 \rangle$ sobre $\boldsymbol{a} = \langle -2, 3, 1 \rangle$.

Como $|\mathbf{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$, a projeção escalar de $\mathbf{b}$ sobre $\mathbf{a}$ é

$$\text{comp}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{(-2)(1) + 3(1) + 1(2)}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

Projeção de vetores

Exemplo 6 Determine a projeção e a projeção escalar de $\boldsymbol{b} = \langle 1, 1, 2\rangle$ sobre $\boldsymbol{a} = \langle -2, 3, 1\rangle$.

Como $|\mathbf{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$, a projeção escalar de $\mathbf{b}$ sobre $\mathbf{a}$ é

$$\text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{(-2)(1) + 3(1) + 1(2)}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

O vetor de projeção é esse escalar multiplicado pelo versor de $\mathbf{a}$:

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \frac{3}{\sqrt{14}}\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{3}{14}\mathbf{a} = \left\langle -\frac{3}{7}, \frac{9}{14}, \frac{3}{14}\right\rangle$$

Produto vetorial

Produto vetorial

$\boxed{4}$ **Definição** Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, então o **produto vetorial** de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é o vetor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \langle a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \rangle$$

Produto vetorial

$\boxed{4}$ **Definição** Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, então o **produto vetorial** de **a** e **b** é o vetor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle$$

- O produto vetorial resulta em um novo vetor.
- Este produto só está definido para vetores tridimensionais.

Produto vetorial

$\boxed{4}$ **Definição** Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, então o **produto vetorial** de **a** e **b** é o vetor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \langle a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1 \rangle$$

- O produto vetorial resulta em um novo vetor.
- Este produto só está definido para vetores tridimensionais.
- O vetor resultante é ortogonal ao vetor **a** e ao vetor **b**.

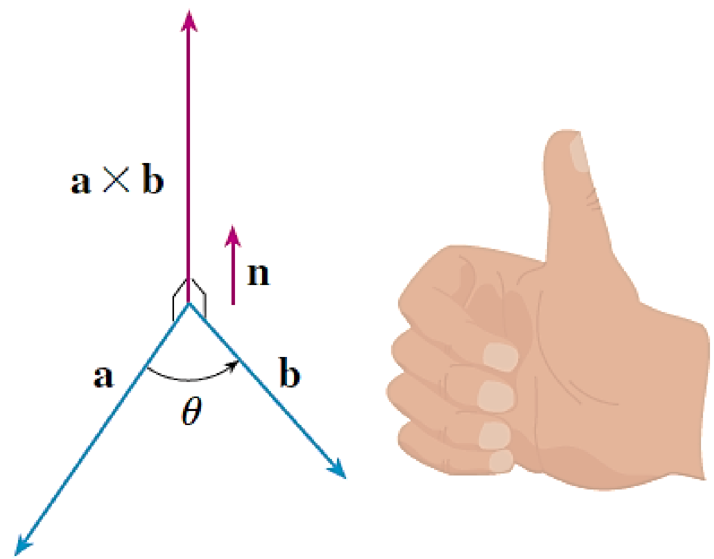


FIGURA 1
A regra da mão direita fornece a direção de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Produto vetorial

- O produto vetorial pode ser denotado e calculado por um determinante de ordem 3.
- Este determinante possui na primeira linha os vetores da base canônica.

Produto vetorial

- O produto vetorial pode ser denotado e calculado por um determinante de ordem 3.
- Este determinante possui na primeira linha os vetores da base canônica.
- Se $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Produto vetorial: propriedades

11 Teorema Se **a**, **b** e **c** são vetores e c é um escalar, então

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
2. $(c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (c\mathbf{b})$
3. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
4. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
5. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
6. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

O produto vetorial não é comutativo.

A troca de ordem implica na inversão de sentido do vetor resultante, com as mesmas componentes.

Produto vetorial

Exemplo 1 Calcule o produto vetorial $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ sendo:
$\boldsymbol{a} = \langle 1, 3, 4 \rangle$ e $\boldsymbol{b} = \langle 2, 7, -5 \rangle$

Produto vetorial

Exemplo 1 Calcule o produto vetorial $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ sendo:
$\boldsymbol{a} = \langle 1, 3, 4 \rangle$ e $\boldsymbol{b} = \langle 2, 7, -5 \rangle$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix}$$

Produto vetorial

Exemplo 1 Calcule o produto vetorial $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ sendo:
$\boldsymbol{a} = \langle 1, 3, 4 \rangle$ e $\boldsymbol{b} = \langle 2, 7, -5 \rangle$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Produto vetorial

Exemplo 1 Calcule o produto vetorial $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ sendo:
$\boldsymbol{a} = \langle 1, 3, 4 \rangle$ e $\boldsymbol{b} = \langle 2, 7, -5 \rangle$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= (-15 - 28)\,\mathbf{i} - (-5 - 8)\,\mathbf{j} + (7 - 6)\,\mathbf{k}$$

Produto vetorial

Exemplo 1 Calcule o produto vetorial $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ sendo:
$\boldsymbol{a} = \langle 1, 3, 4 \rangle$ e $\boldsymbol{b} = \langle 2, 7, -5 \rangle$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= (-15 - 28)\,\mathbf{i} - (-5 - 8)\,\mathbf{j} + (7 - 6)\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -43\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Produto vetorial: interpretação geométrica

$\boxed{8}$ **Teorema** O vetor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é ortogonal tanto a $\mathbf{a}$ quanto a $\mathbf{b}$.

$\boxed{9}$ **Teorema** Se θ é o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ (portanto $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$), então

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta$$

Produto vetorial: interpretação geométrica

$\boxed{8}$ **Teorema** O vetor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é ortogonal tanto a $\mathbf{a}$ quanto a $\mathbf{b}$.

$\boxed{9}$ **Teorema** Se θ é o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ (portanto $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$), então

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta$$

O módulo do produto cruzado $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é igual à área do paralelogramo determinado por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

$$A = |\mathbf{a}|(|\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

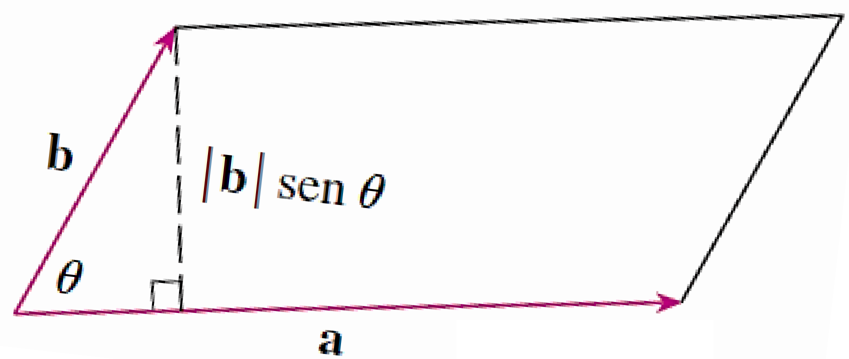


FIGURA 2

Produto vetorial

Se aplicarmos os Teoremas 8 e 9 aos vetores da base canônica **i**, **j** e **k** usando $\theta = \pi/2$, obtemos

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

Produto vetorial

Se aplicarmos os Teoremas 8 e 9 aos vetores da base canônica $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ usando $\theta = \pi/2$, obtemos

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$
$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

Observe que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} \neq \mathbf{j} \times \mathbf{i}$$

Portanto, o produto vetorial não é comutativo. Também

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

Enquanto

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

Produto vetorial

Se aplicarmos os Teoremas 8 e 9 aos vetores da base canônica **i**, **j** e **k** usando $\theta = \pi/2$, obtemos

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

Observe que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} \neq \mathbf{j} \times \mathbf{i}$$

Portanto, o produto vetorial não é comutativo. Também

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

Enquanto

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

Logo, a propriedade associativa da multiplicação também não vale obrigatoriamente aqui; ou seja, em geral, temos

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Para depois desta aula:

- Reler o capítulo 12 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

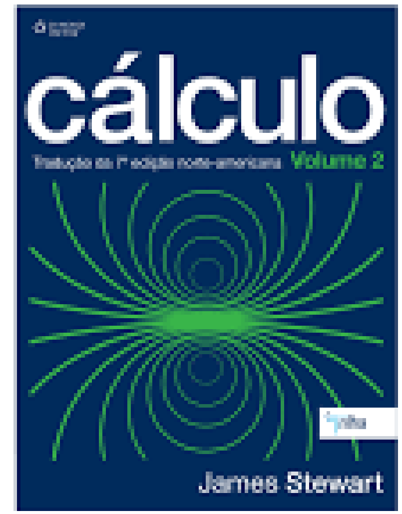
Próxima aula:

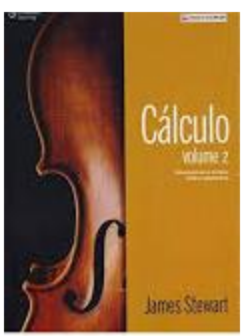
- Retas e planos

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed.





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br