Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 01 - Aula 3
Retas e planos

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Equações de retas

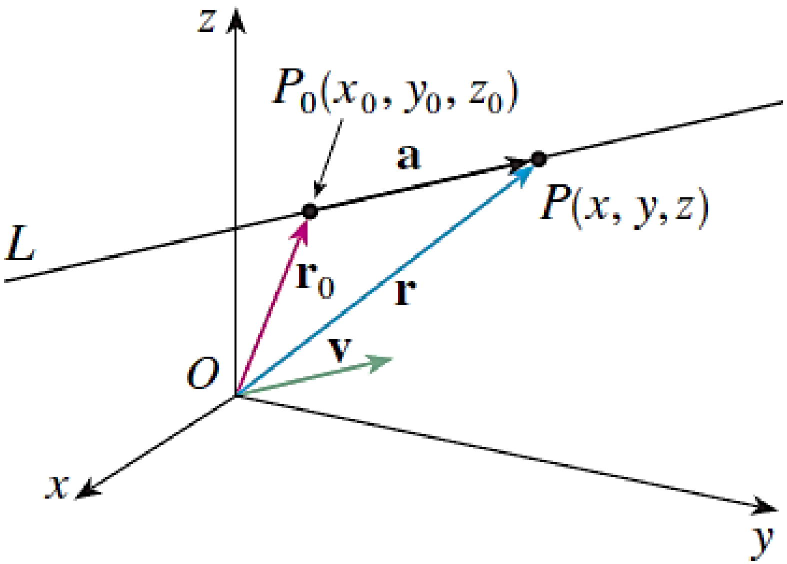


FIGURA 1

- Seja uma reta ***L*** no espaço.

Equações de retas

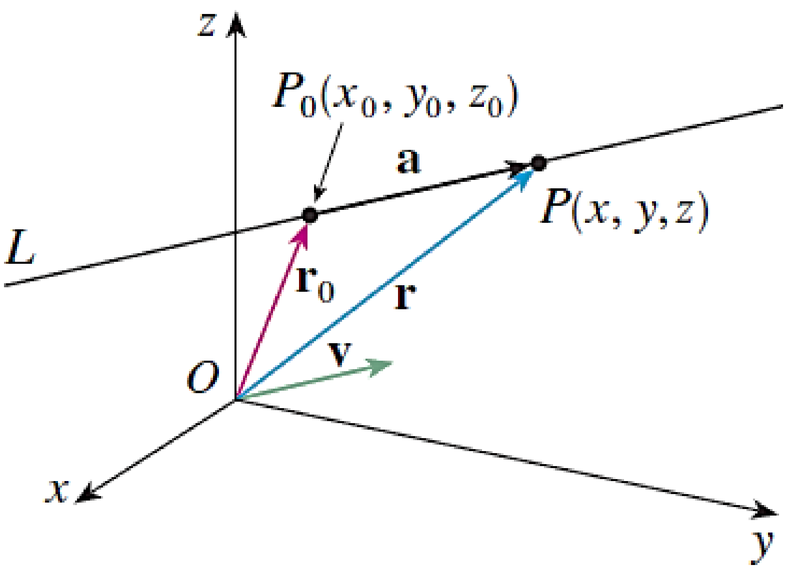


FIGURA 1

- Seja uma reta ***L*** no espaço.
- A direção de ***L*** pode ser descrita por um vetor ***v*** paralelo a ela.

Equações de retas

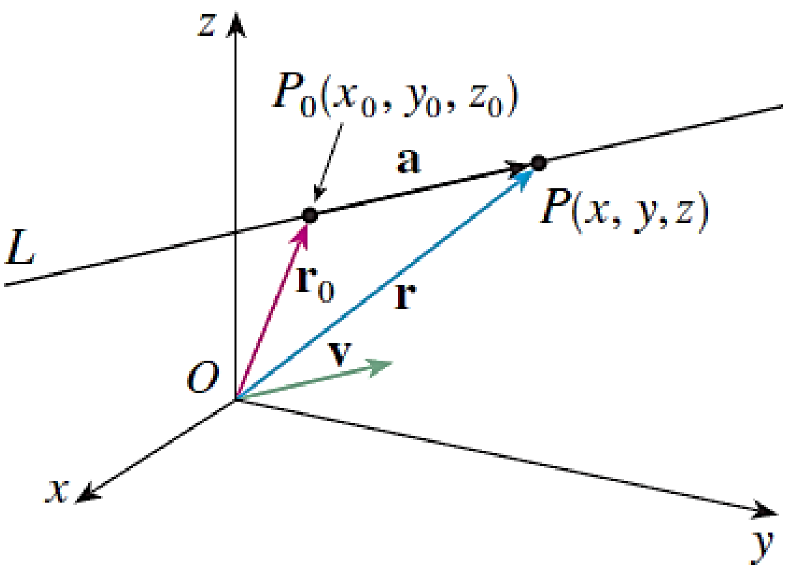


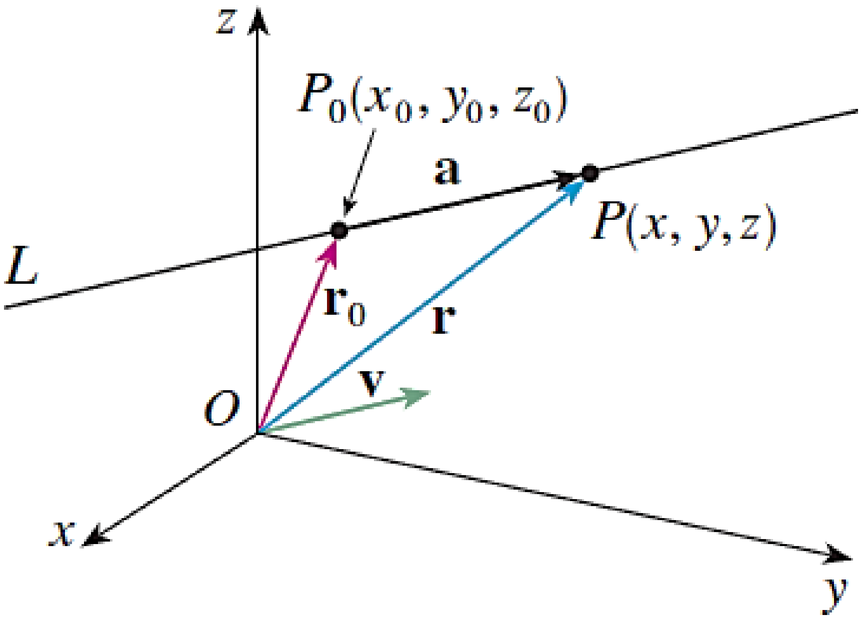
FIGURA 1

- Seja uma reta ***L*** no espaço.
- A direção de ***L*** pode ser descrita por um vetor ***v*** paralelo a ela.
- Conhecendo-se um ponto ***P*****(*****x*****,** ***y*****,** ***z*****)** podemos encontrar a equação vetorial desta reta ***L.***

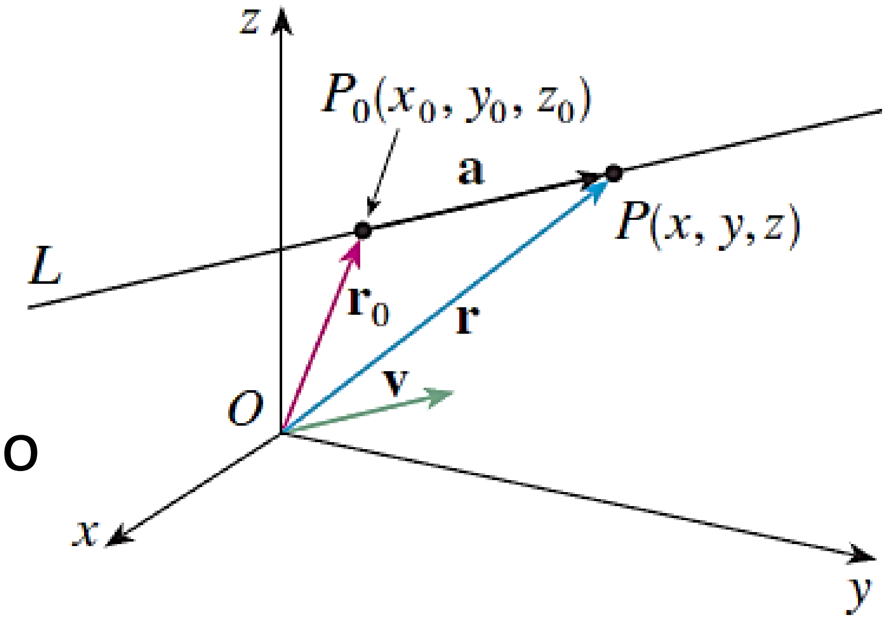
Equações de retas

- Pela soma de vetores:

$$\boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}$$



Equações de retas



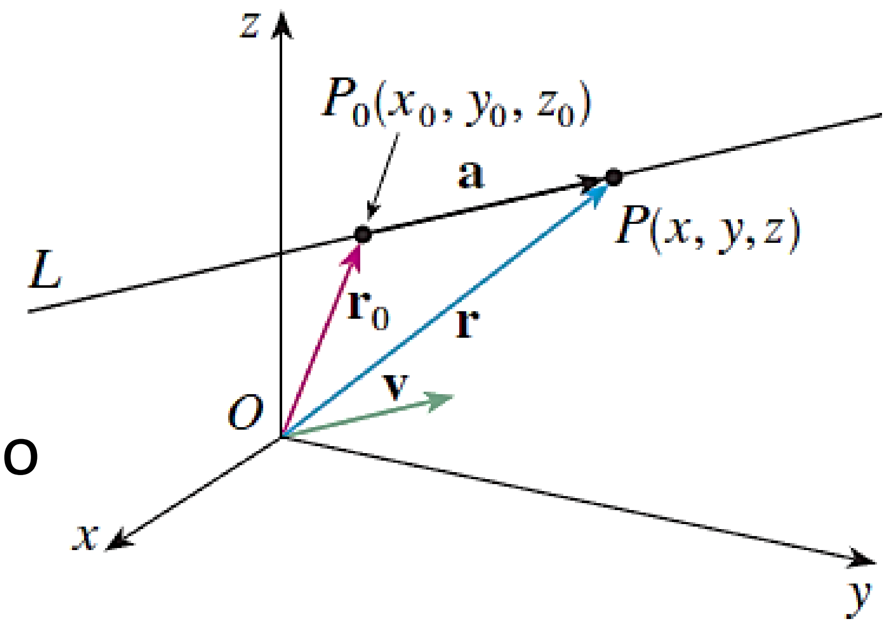
- Pela soma de vetores:

$$\boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}$$

- Mas os vetores $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{v}$ são paralelos então:

$$\boldsymbol{a} = t\boldsymbol{v} \quad \text{sendo: } t \in \mathbb{R} \ (t\text{: parâmetro})$$

Equações de retas



- Pela soma de vetores:

$$\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}$$

- Mas os vetores $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{v}$ são paralelos então:

$$\boldsymbol{a} = t\boldsymbol{v}$$ sendo: $t \in \mathbb{R}$ (t: parâmetro)

- Portanto:

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v}}$$ Equação vetorial da reta

Equações de retas

- Reescrevendo os vetores em termos de componentes:

$$\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle \quad \Longrightarrow \quad t\boldsymbol{v} = \langle t\boldsymbol{a}, t\boldsymbol{b}, t\boldsymbol{c} \rangle$$

$$\boldsymbol{r} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle \qquad \boldsymbol{r_0} = \langle \boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0} \rangle$$

Equações de retas

- Reescrevendo os vetores em termos de componentes:

$$\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle \quad \Longrightarrow \quad t\boldsymbol{v} = \langle t\boldsymbol{a}, t\boldsymbol{b}, t\boldsymbol{c} \rangle$$

$$\boldsymbol{r} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle \qquad \boldsymbol{r_0} = \langle \boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0} \rangle$$

- Substituindo na equação vetorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + t\boldsymbol{v}$:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x_0} + t\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y_0} + t\boldsymbol{b}, \boldsymbol{z_0} + t\boldsymbol{c} \rangle$$

Equações de retas

- Reescrevendo os vetores em termos de componentes:

$$\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle \quad \Longrightarrow \quad t\boldsymbol{v} = \langle t\boldsymbol{a}, t\boldsymbol{b}, t\boldsymbol{c} \rangle$$

$$\boldsymbol{r} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle \qquad \boldsymbol{r}_0 = \langle \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{z}_0 \rangle$$

- Substituindo na equação vetorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v}$:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}_0 + t\boldsymbol{b}, \boldsymbol{z}_0 + t\boldsymbol{c} \rangle$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{y}_0 + t\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{z} &= \boldsymbol{z}_0 + t\boldsymbol{c} \end{aligned}$$

Equações paramétricas da reta

Exemplo 1

(a) Determine a equações vetorial e paramétricas de uma reta que passa pelo ponto $(5, 1, 3)$ e é paralela ao vetor $v = \langle 1, 4, -2 \rangle$.

(b) Determine outros dois pontos na reta.

Exemplo 1

(a) Determine a equações vetorial e paramétricas de uma reta que passa pelo ponto $(5, 1, 3)$ e é paralela ao vetor $v = \langle 1, 4, -2 \rangle$.

(b) Determine outros dois pontos na reta.

Solução (a)

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + t\boldsymbol{v}\textbf{:}$$

$$\langle x, y, z \rangle = \langle 5, 1,3 \rangle + t\langle 1, 4, -2 \rangle$$

Exemplo 1

(a) Determine a equações vetorial e paramétricas de uma reta que passa pelo ponto $(5, 1, 3)$ e é paralela ao vetor $v = \langle 1, 4, -2 \rangle$.

(b) Determine outros dois pontos na reta.

Solução (a)

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + t\boldsymbol{v}:$$

$$\langle x, y, z \rangle = \langle 5, 1,3 \rangle + t\langle 1, 4, -2 \rangle$$

$$x = 5 + t$$
$$y = 1 + 4t$$
$$z = 3 - 2t$$

Exemplo 1

(a) Determine a equações vetorial e paramétricas de uma reta que passa pelo ponto $(5, 1, 3)$ e é paralela ao vetor $v = \langle 1, 4, -2 \rangle$.

(b) Determine outros dois pontos na reta.

Solução (a)

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v}\text{:}$$

$$\langle x, y, z \rangle = \langle 5, 1{,}3 \rangle + t\langle 1, 4, -2 \rangle$$

$$\begin{aligned} x &= 5 + t \\ y &= 1 + 4t \\ z &= 3 - 2t \end{aligned}$$

Solução (b)

P/ $t = 1$: $x = 6$, $y = 5$, $z = 1$: $P_1(6, 5, 1)$

Exemplo 1

(a) Determine a equações vetorial e paramétricas de uma reta que passa pelo ponto $(5, 1, 3)$ e é paralela ao vetor $v = \langle 1, 4, -2 \rangle$.

(b) Determine outros dois pontos na reta.

Solução (a)

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + t\boldsymbol{v}:$$

$$\langle x, y, z \rangle = \langle 5, 1,3 \rangle + t\langle 1, 4, -2 \rangle$$

$$x = 5 + t$$
$$y = 1 + 4t$$
$$z = 3 - 2t$$

Solução (b)

P/ $t = 1$: $x = 6$, $y = 5$, $z = 1$:

$$P_1(6, 5, 1)$$

P/ $t = -1$: $x = 4$, $y = -3$, $z = 5$:

$$P_2(4, -3, 5)$$

Equações de retas

- Isolando o parâmetro *t* nas equações paramétricas:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x_0} + t\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{y_0} + t\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{z} &= \boldsymbol{z_0} + t\boldsymbol{c} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{x - x_0}}{\boldsymbol{a}}, \qquad \boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{y - y_0}}{\boldsymbol{b}}, \qquad \boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{z - z_0}}{\boldsymbol{c}}$$

Equações de retas

- Isolando o parâmetro *t* nas equações paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb \\ z &= z_0 + tc \end{aligned} \qquad t = \frac{x-x_0}{a}, \qquad t = \frac{y-y_0}{b}, \qquad t = \frac{z-z_0}{c}$$

- Igualando as expressões em *t*:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Equações simétricas da reta

Planos

Equações de planos

- Como um vetor ortogonal ao plano define de modo completo sua "direção", um plano no espaço fica determinado se conhecermos:
  - ✓ Um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e
  - ✓ Um vetor ***n*** que seja ortogonal a esse plano.

Equações de planos

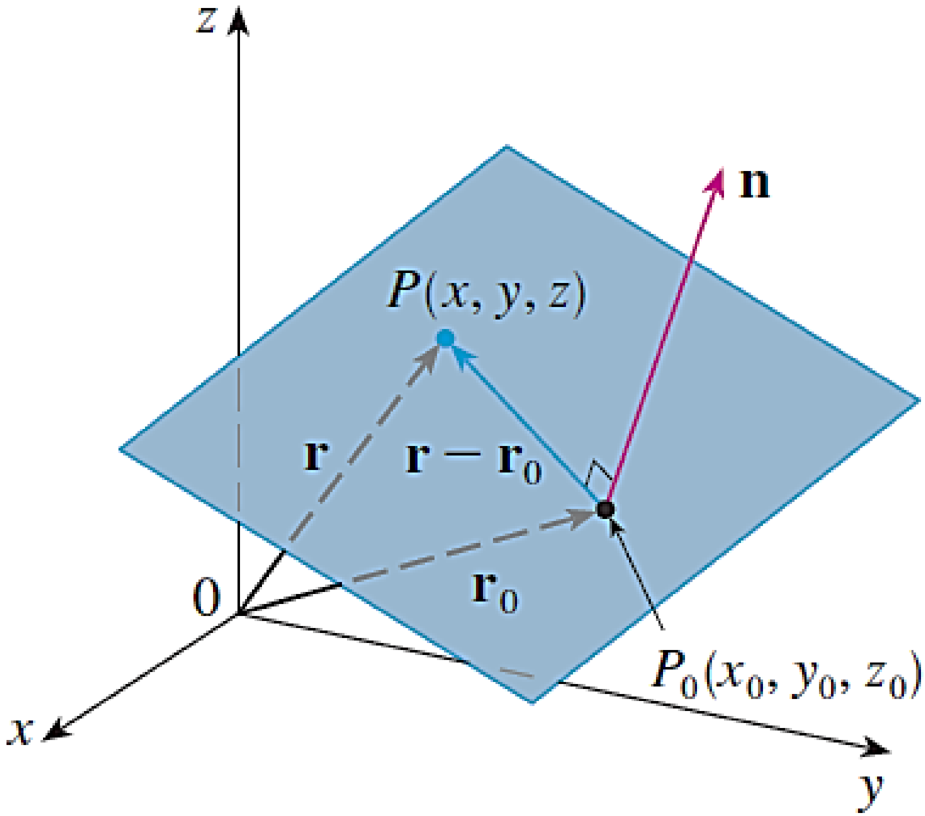


FIGURA 6

Equações de planos

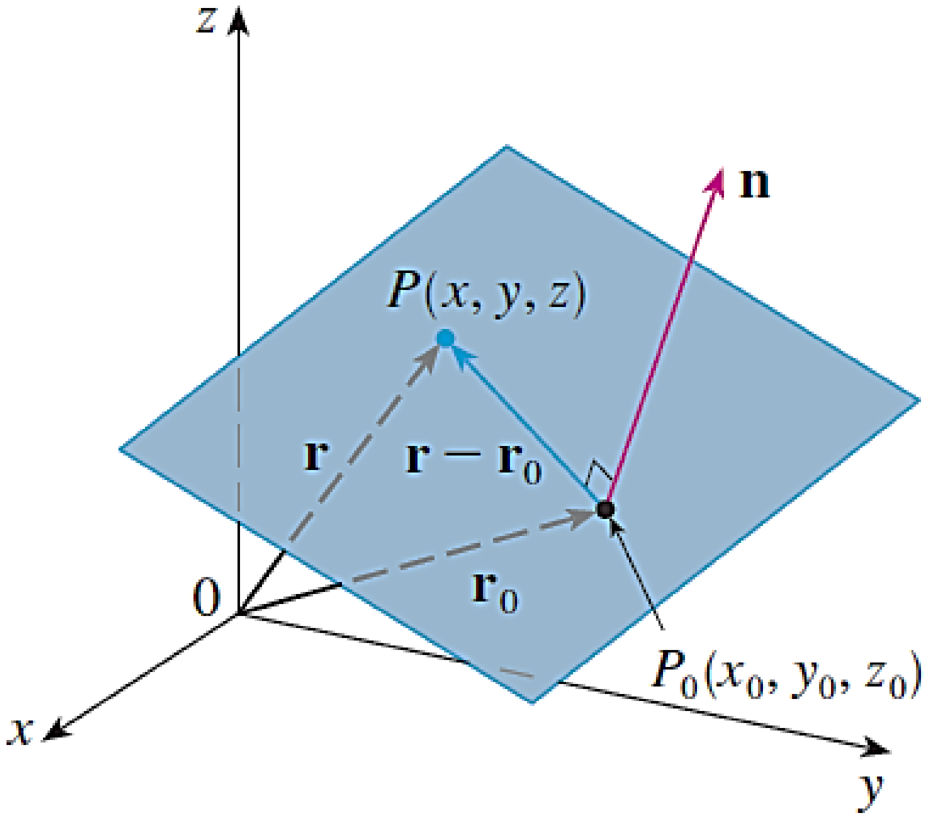


FIGURA 6

- Da Figura 6, como:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}) \perp \boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}) = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r_0} = \boldsymbol{0}$$

Equações de planos

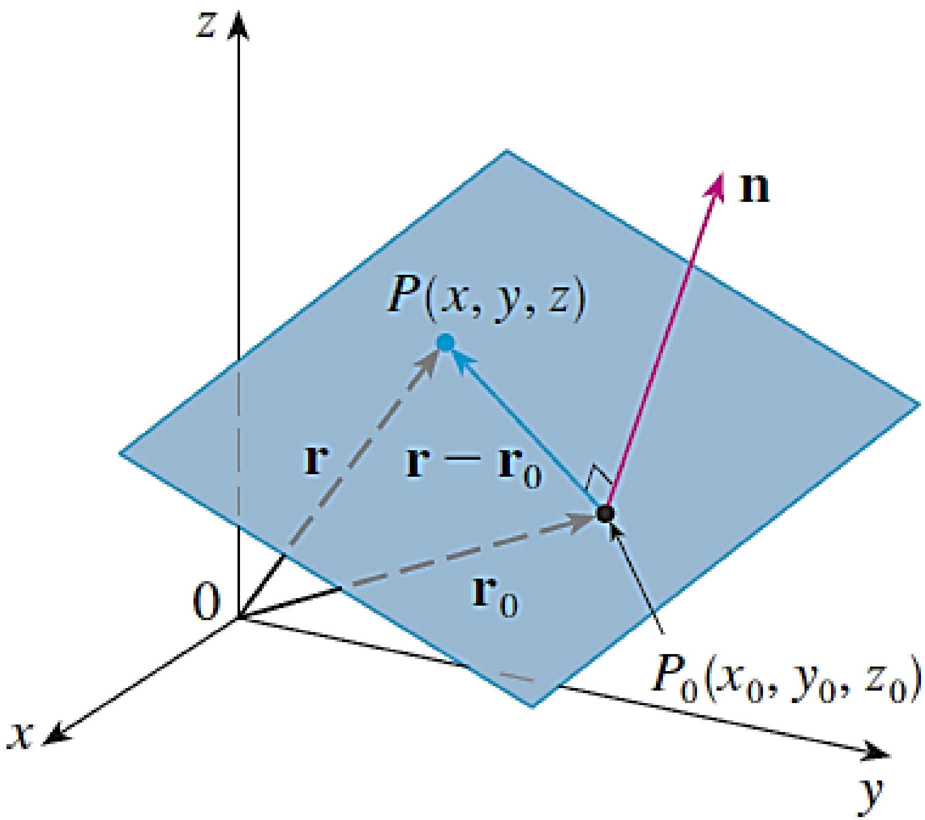


FIGURA 6

- Da Figura 6, como:

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0}) \perp \boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0}) = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r_0} = \mathbf{0}$$

Equações vetoriais do plano

Equações de planos

- Para obter a equação escalar do plano escrevemos:

$$\boldsymbol{n} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle \qquad \boldsymbol{r} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle \qquad \boldsymbol{r}_{\mathbf{0}} = \langle \boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}, \boldsymbol{y}_{\mathbf{0}}, \boldsymbol{z}_{\mathbf{0}} \rangle$$

Equações de planos

- Para obter a equação escalar do plano escrevemos:

$$\boldsymbol{n} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle \qquad \boldsymbol{r} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle \qquad \boldsymbol{r_0} = \langle \boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0} \rangle$$

- Substituindo na equação vetorial: $\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}) = \boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0}) + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_0}) = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} + \boldsymbol{cz} + (-\boldsymbol{ax_0} - \boldsymbol{by_0} - \boldsymbol{cz_0}) = \boldsymbol{0}$$

Equações de planos

- Para obter a equação escalar do plano escrevemos:

$$\boldsymbol{n} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle \qquad \boldsymbol{r} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle \qquad \boldsymbol{r}_0 = \langle \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{z}_0 \rangle$$

- Substituindo na equação vetorial: $\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = \boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0) + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_0) = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} + \boldsymbol{cz} + \boxed{(-\boldsymbol{ax}_0 - \boldsymbol{by}_0 - \boldsymbol{cz}_0)} = \boldsymbol{0}$$

$= \boldsymbol{d}$ (número real)

$$\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} + \boldsymbol{cz} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$$

Equação linear do plano

Exemplo 5 Encontre uma equação do plano que passa pelos pontos $P(1,3,2)$, $Q(3,-1,6)$ e $R(5,2,0)$

Exemplo 5 Encontre uma equação do plano que passa pelos pontos $P(1,3,2)$, $Q(3,-1,6)$ e $R(5,2,0)$

Os vetores **a** e **b** correspondentes a $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ são

$$\mathbf{a} = \langle 2, -4, 4 \rangle \qquad \mathbf{b} = \langle 4, -1, -2 \rangle$$

Exemplo 5 Encontre uma equação do plano que passa pelos pontos $P(1,3,2)$, $Q(3,-1,6)$ e $R(5,2,0)$

Os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ correspondentes a $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ são

$$\mathbf{a} = \langle 2, -4, 4 \rangle \qquad \mathbf{b} = \langle 4, -1, -2 \rangle$$

Como tanto $\mathbf{a}$ quanto $\mathbf{b}$ pertencem ao plano, seu produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é ortogonal ao plano e pode ser tomado como o vetor normal. Assim,

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 12\,\mathbf{i} + 20\,\mathbf{j} + 14\,\mathbf{k}$$

Exemplo 5 Encontre uma equação do plano que passa pelos pontos $P(1,3,2)$, $Q(3,-1,6)$ e $R(5,2,0)$

Os vetores **a** e **b** correspondentes a $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ são

$$\mathbf{a} = \langle 2, -4, 4 \rangle \qquad \mathbf{b} = \langle 4, -1, -2 \rangle$$

Como tanto **a** quanto **b** pertencem ao plano, seu produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é ortogonal ao plano e pode ser tomado como o vetor normal. Assim,

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 12\,\mathbf{i} + 20\,\mathbf{j} + 14\,\mathbf{k}$$

Com o ponto $P(1, 3, 2)$ e o vetor normal **n**, uma equação do plano é

$$12(x - 1) + 20(y - 3) + 14(z - 2) = 0$$

$$6x + 10y + 7z = 50$$

Exemplo 5 Encontre uma equação do plano que passa pelos pontos $P(1,3,2)$, $Q(3,-1,6)$ e $R(5,2,0)$

A Figura 8 mostra a parte do plano do Exemplo 5 delimitada pelo triângulo PQR.

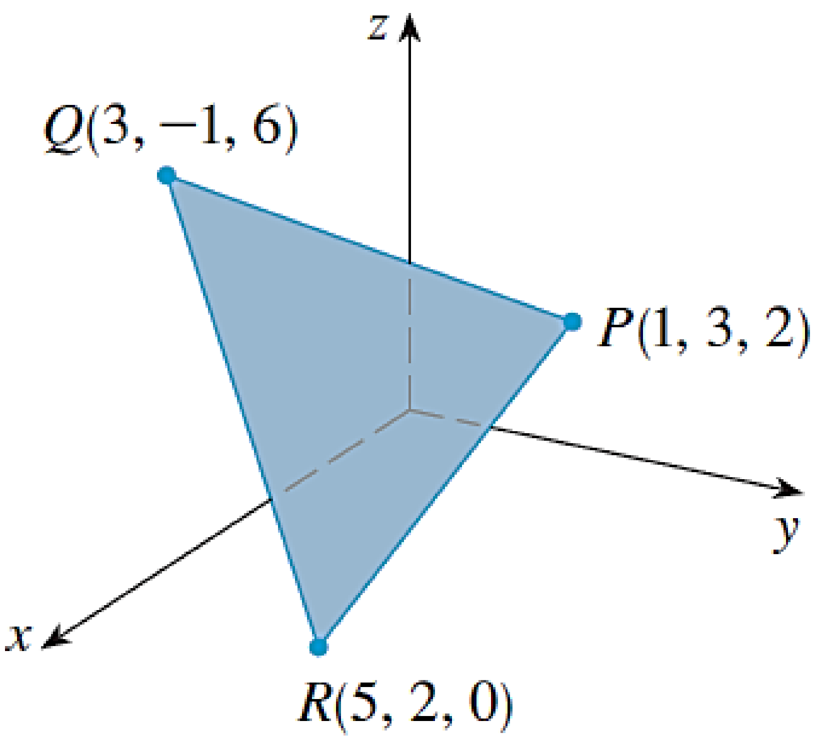


FIGURA 8

$$\boxed{6x + 10y + 7z = 50}$$

Distâncias

Distâncias

Exemplo 8 Determine a fórmula da distância D de um ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ao plano $ax + by + cz + d = 0$

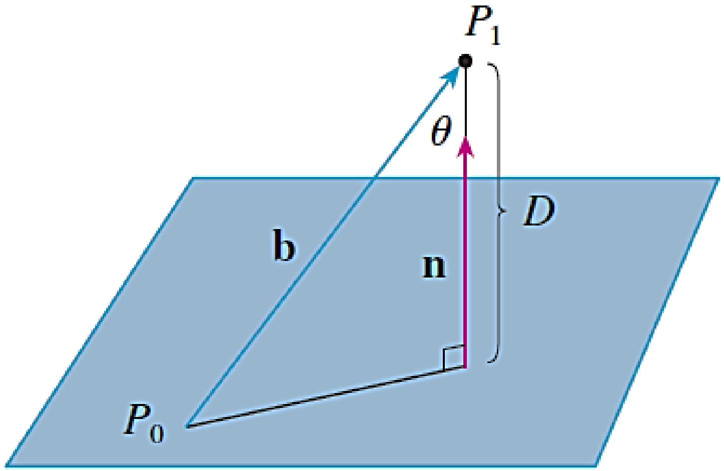


FIGURA 12

Distâncias

Exemplo 8 Determine a fórmula da distância *D* de um ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ao plano $ax + by + cz + d = 0$

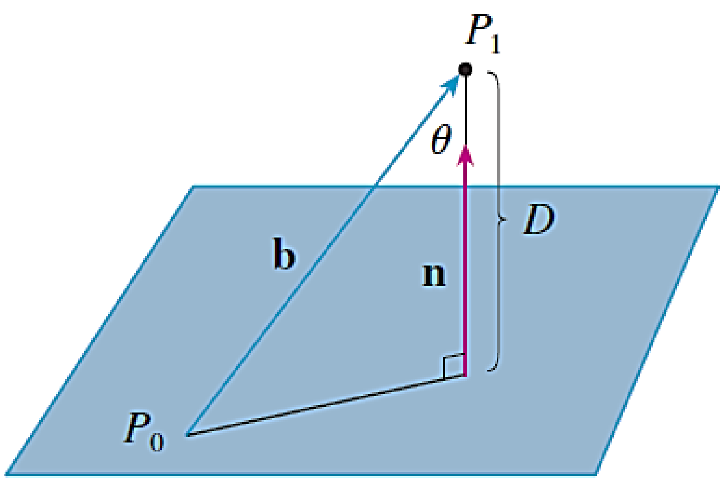


FIGURA 12

Seja $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer do plano e seja **b** o vetor correspondente a $\overrightarrow{P_0P_1}$. Então,

$$\mathbf{b} = \langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0 \rangle$$

Distâncias

Exemplo 8 Determine a fórmula da distância D de um ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ao plano $ax + by + cz + d = 0$

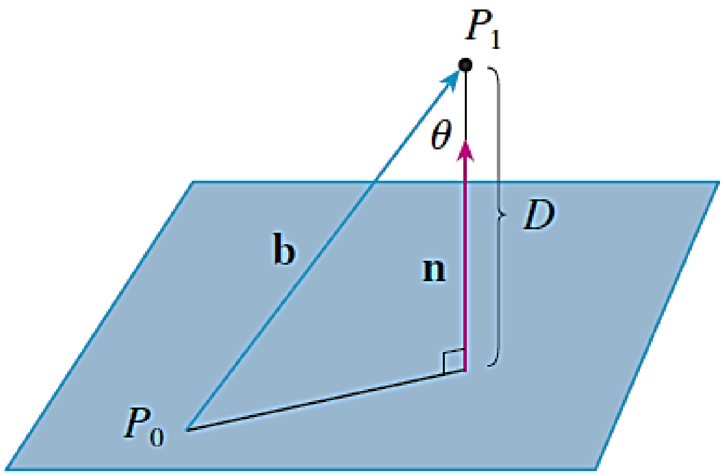


FIGURA 12

Seja $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer do plano e seja **b** o vetor correspondente a $\overrightarrow{P_0P_1}$. Então,

$$\mathbf{b} = \langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0 \rangle$$

Da Figura 12 a distância D de P_1 até o plano é igual ao valor absoluto da projeção escalar de **b** sobre o vetor normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$. Assim,

$$D = |\text{comp}_{\mathbf{n}}\,\mathbf{b}| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{n}|}$$

Distâncias

Exemplo 8 Determine a fórmula da distância D de um ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ao plano $ax + by + cz + d = 0$

$$D = |\text{comp}_{\mathbf{n}}\,\mathbf{b}| = \frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{n}|}$$

$$= \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

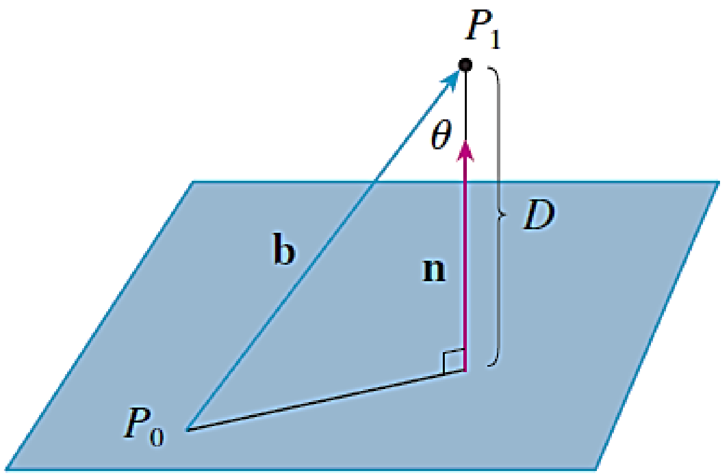


FIGURA 12

Distâncias

Exemplo 8 Determine a fórmula da distância D de um ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ao plano $ax + by + cz + d = 0$

$$D = |\text{comp}_{\mathbf{n}}\, \mathbf{b}| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{n}|}$$

$$= \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|(ax_1 + by_1 + cz_1) - (ax_0 + by_0 + cz_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

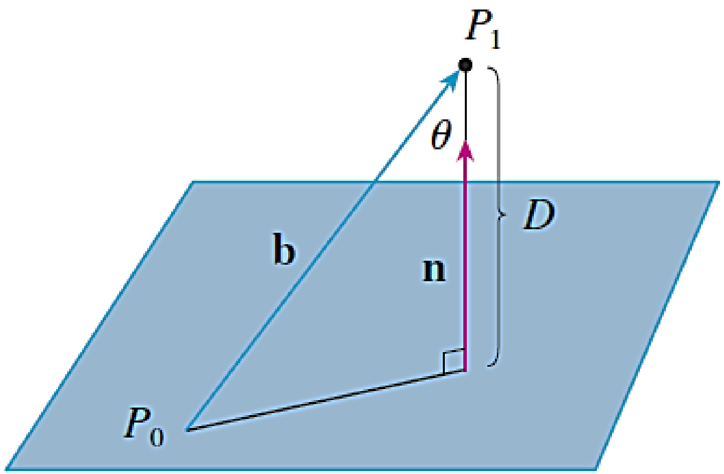


FIGURA 12

Distâncias

Exemplo 8 Determine a fórmula da distância D de um ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ao plano $ax + by + cz + d = 0$

$$D = |\operatorname{comp}_{\mathbf{n}} \mathbf{b}| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{n}|}$$

$$= \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|(ax_1 + by_1 + cz_1) - (ax_0 + by_0 + cz_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

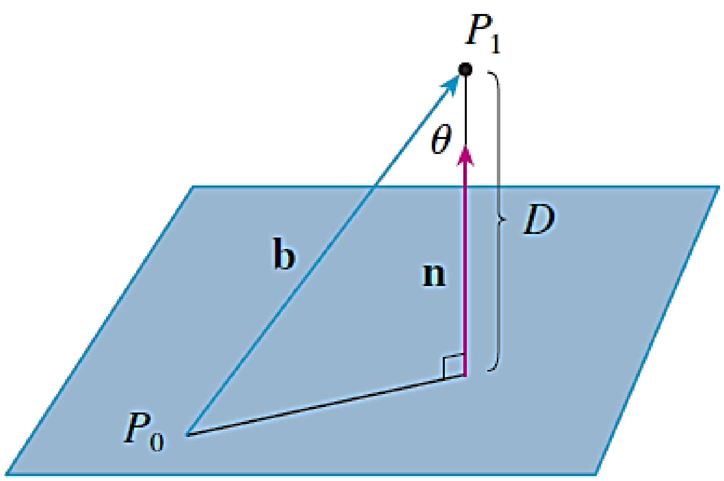


FIGURA 12

9 $$\boxed{D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Exemplo 9 Determine a distância entre os dois planos paralelos $10x + 2y - 2z = 5$ e $5x + y - z = 1$.

Exemplo 9 Determine a distância entre os dois planos paralelos 10x + 2y - 2z = 5 e 5x + y - z = 1.

Solução

P/ $y = z = 0$ no primeiro plano: $10x = 5 \rightarrow x = 1/2$

Exemplo 9 Determine a distância entre os dois planos paralelos $10x + 2y - 2z = 5$ e $5x + y - z = 1$.

Solução

P/ $y = z = 0$ no primeiro plano: $10x = 5 \rightarrow x = 1/2$

Portanto:

$P(1/2, \ 0, 0)$ é um ponto deste plano.

Exemplo 9 Determine a distância entre os dois planos paralelos 10x + 2y - 2z = 5 e 5x + y - z = 1.

Solução

P/ $y = z = 0$ no primeiro plano: $10x = 5 \rightarrow \quad x = 1/2$

Portanto:

$P(1/2, \quad 0, 0)$ é um ponto deste plano.

Assim, a distância ao outro plano será:

$$D = \frac{\left|5\left(\frac{1}{2}\right) + 1(0) - 1(0) - 1\right|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3/2}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

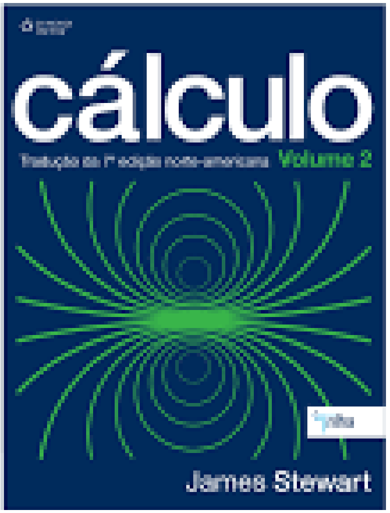
Para depois desta aula:

- Reler o capítulo 12 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

Próxima aula:

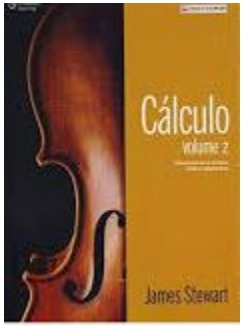
- Funções de várias variáveis.

Bibliografia



1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed. ▶



STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br