Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 02 - Aula 1
Funções de várias variáveis

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Funções de várias variáveis

- Uma função pode ser considerada de quatro modos:
  - Verbalmente (pela descrição em palavras).
  - Numericamente (por uma tabela de valores).
  - Algebricamente (por uma fórmula explícita).
  - Visualmente (por um gráfico ou curvas de nível).

Funções de duas variáveis

- O volume *V* de um cilindro circular depende de seu raio *r* e de sua altura *h*.
- Sabemos que: $V = \pi r^2 h$.

Funções de duas variáveis

- O volume V de um cilindro circular depende de seu raio r e de sua altura h.
- Sabemos que: $V = \pi r^2 h$.
- Podemos dizer que V é uma função de r e de h, ou seja, uma função de duas variáveis:

$$V(r, h) = \pi r^2 h$$

Funções de duas variáveis

Definição Uma **função f de duas variáveis** é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um conjunto D um único valor real, denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o **domínio** de f e sua **imagem** é o conjunto de valores possíveis de f, ou seja, $\{f(x, y) | (x, y) \in D\}$.

Funções de duas variáveis

Definição Uma **função f de duas variáveis** é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um conjunto D um único valor real, denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o **domínio** de f e sua **imagem** é o conjunto de valores possíveis de f, ou seja, $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$.

- Frequentemente escrevemos $z = f(x, y)$.
- As variáveis $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são variáveis independentes e $\boldsymbol{z}$ é a variável dependente..

Funções de duas variáveis

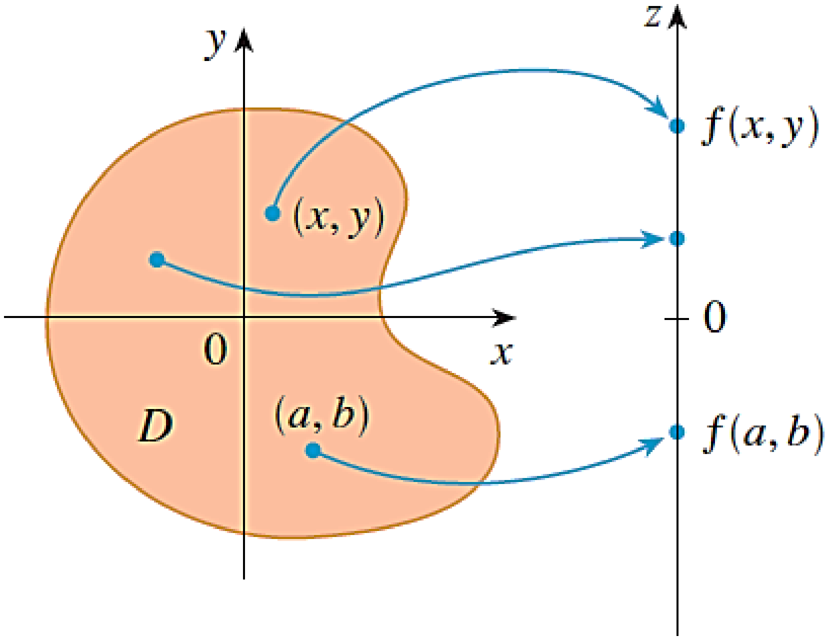


FIGURA 1

Funções de duas variáveis

- **Domínio** de uma função de duas variáveis:
  - Subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

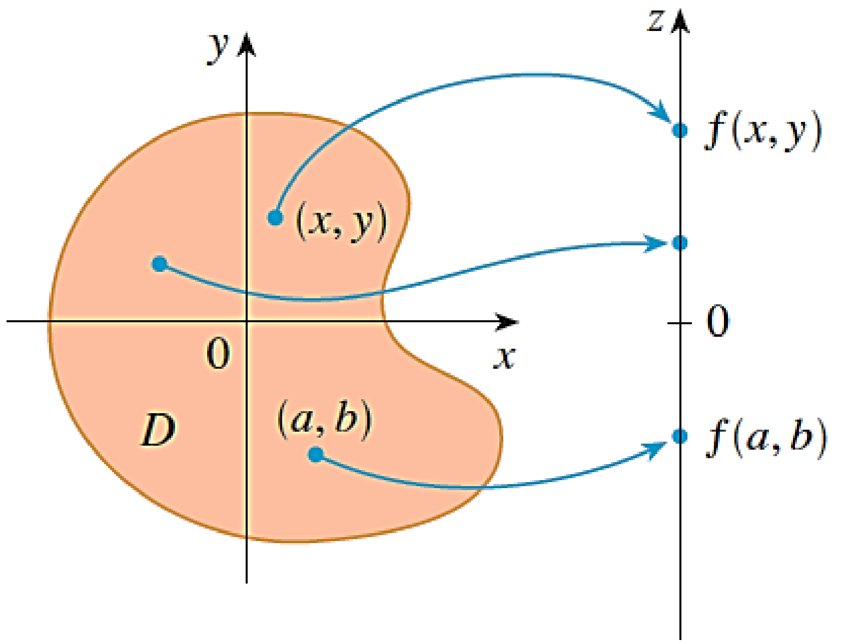


FIGURA 1

Funções de duas variáveis

- **Domínio** de uma função de duas variáveis:
  - Subconjunto de $\mathbb{R}^2$.
- **Imagem** de uma função de duas variáveis:
  - Subconjunto de $\mathbb{R}$.

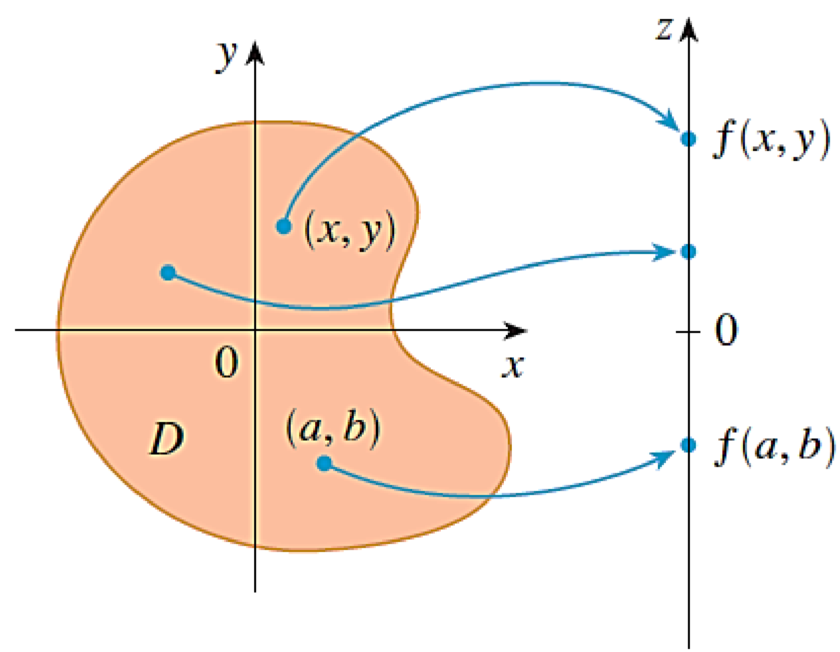


FIGURA 1

Funções de duas variáveis

Exemplo 1 calcule $f(3, 2)$ e encontre o domínio.

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$$

Funções de duas variáveis

Exemplo 1 calcule $f(3, 2)$ e encontre o domínio.

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1} \Rightarrow f(3, 2) = \frac{\sqrt{3 + 2 + 1}}{3 - 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Funções de duas variáveis

Exemplo 1 calcule $f(3, 2)$ e encontre o domínio.

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1} \quad \Rightarrow \quad f(3, 2) = \frac{\sqrt{3 + 2 + 1}}{3 - 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

A expressão para *f* está bem definida se o denominador for diferente de 0 e o número na raiz quadrada for ≥ 0.

$$x \neq 1$$

Funções de duas variáveis

Exemplo 1 calcule $f(3, 2)$ e encontre o domínio.

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1} \quad \Rightarrow \quad f(3, 2) = \frac{\sqrt{3 + 2 + 1}}{3 - 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

A expressão para *f* está bem definida se o denominador for diferente de 0 e o número na raiz quadrada for ≥ 0.

$$x \neq 1 \qquad \text{e} \qquad x + y + 1 \geqslant 0, \text{ ou } y \geqslant -x - 1$$

Funções de duas variáveis

Exemplo 1 calcule $f(3, 2)$ e encontre o domínio.

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1} \quad \Rightarrow \quad f(3, 2) = \frac{\sqrt{3 + 2 + 1}}{3 - 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

A expressão para *f* está bem definida se o denominador for diferente de 0 e o número na raiz quadrada for ≥ 0.

$$x \neq 1 \quad \text{e} \quad x + y + 1 \geqslant 0, \text{ ou } y \geqslant -x - 1$$

$$D = \{(x, y) \mid x + y + 1 \geqslant 0, x \neq 1\}$$

Funções de duas variáveis

Exemplo 1

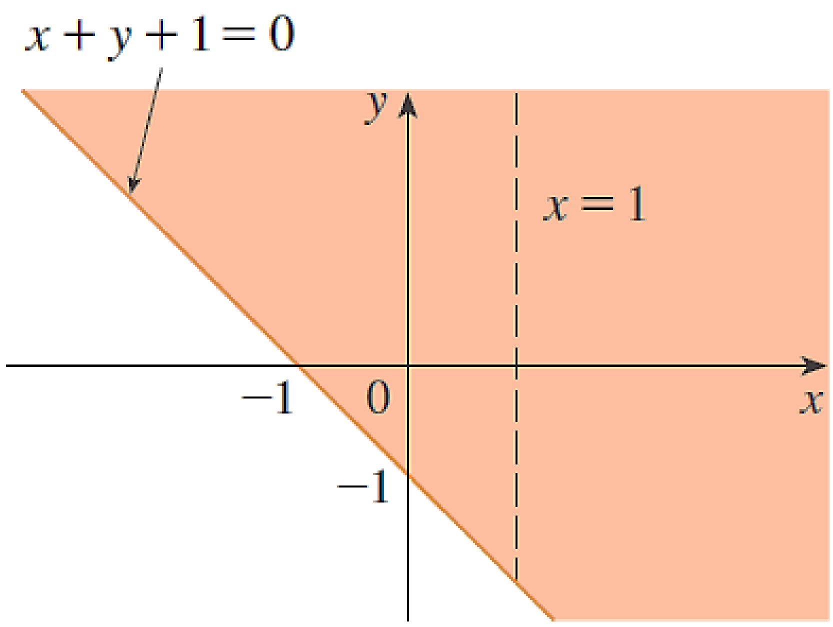


FIGURA 2

Domínio de $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$

Funções de duas variáveis

Exemplo 1

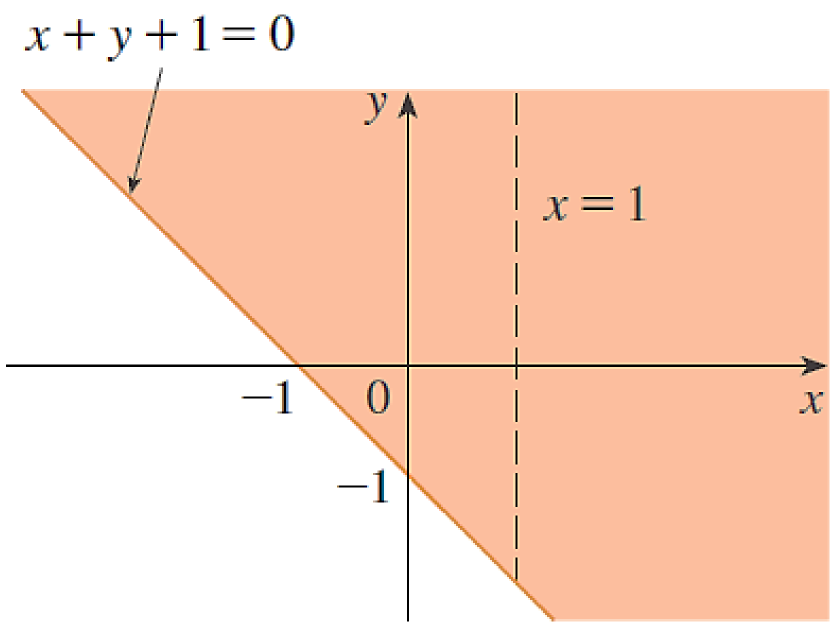


FIGURA 2

Domínio de $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$

- A desigualdade x + y + 1 = 0, descreve os pontos que estão na linha y = -x -1 ou acima dela.

Funções de duas variáveis

Exemplo 1

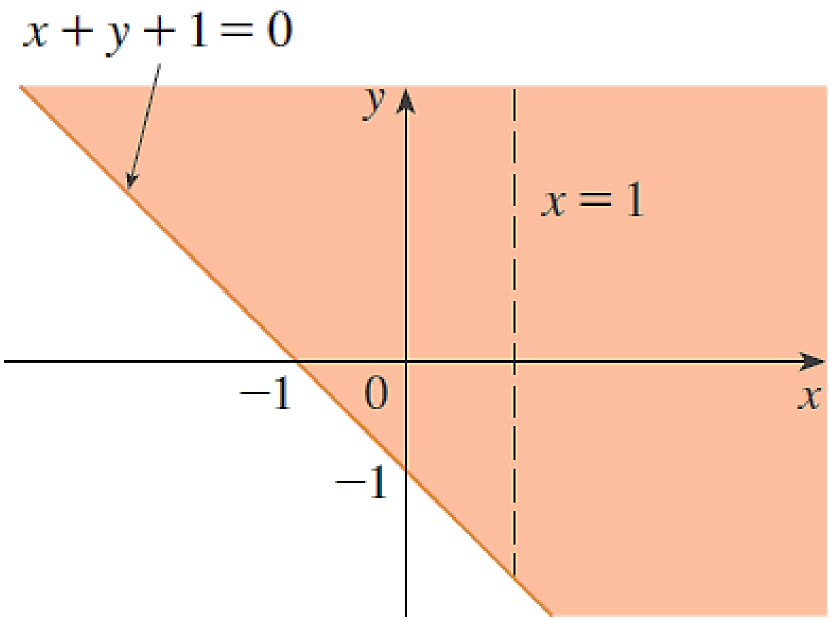


FIGURA 2

Domínio de $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$

- A desigualdade x + y + 1 = 0, descreve os pontos que estão na linha
  y = -x -1 ou acima dela.
- Os pontos da linha x = 1 também devem estar excluídos do domínio da função *f*.

Funções de duas variáveis

Exemplo 2 O índice de sensação térmica (*W*) mede a temperatura que depende da temperatura real *T* e da velocidade do vento, *v*. $W = f(T, v)$

Funções de duas variáveis

Exemplo 2 O índice de sensação térmica (W) mede a temperatura que depende da temperatura real T e da velocidade do vento, v. $W = f(T, v)$

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C)

T \ v	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
5	4	3	2	1	1	0	−1	−1	−2	−2	−3
0	−2	−3	−4	−5	−6	−6	−7	−8	−9	−9	−10
−5	−7	−9	−11	−12	−12	−13	−14	−15	−16	−16	−17
−10	−13	−15	−17	−18	−19	−20	−21	−22	−23	−23	−24
−15	−19	−21	−23	−24	−25	−26	−27	−29	−30	−30	−31
−20	−24	−27	−29	−30	−32	−33	−34	−35	−36	−37	−38
−25	−30	−33	−35	−37	−38	−39	−41	−42	−43	−44	−45
−30	−36	−39	−41	−43	−44	−46	−48	−49	−50	−51	−52

Gráficos

Gráficos

Definição Se f é uma função de duas variáveis com domínio D, então o **gráfico** de f é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x, y)$ e (x, y) pertença a D.

Gráficos

Definição Se f é uma função de duas variáveis com domínio D, então o **gráfico** de f é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x, y)$ e (x, y) pertença a D.

- O gráfico de uma função f com duas variáveis é uma superfície S com equação $z = f(x, y)$.

Gráficos

Definição Se f é uma função de duas variáveis com domínio D, então o **gráfico** de f é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x, y)$ e (x, y) pertença a D.

- O gráfico de uma função *f* com duas variáveis é uma superfície S com equação $z = f(x, y)$.
- Este gráfico pode ser visualizado acima ou abaixo de seu domínio D no plano xy.

Gráficos – funções de duas variáveis

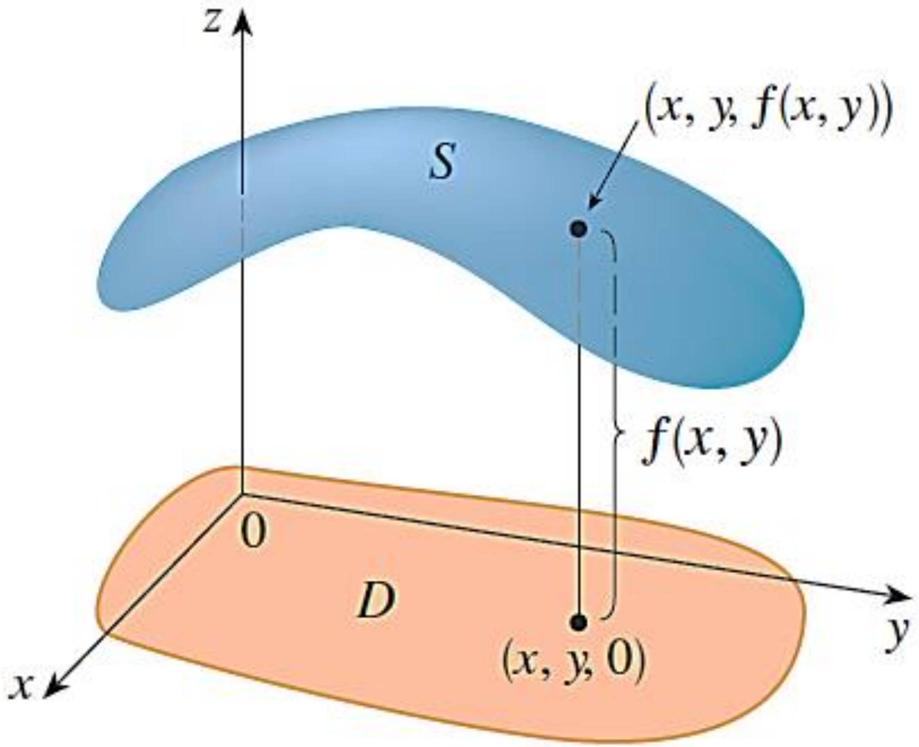


FIGURA 5

Gráficos – funções de duas variáveis

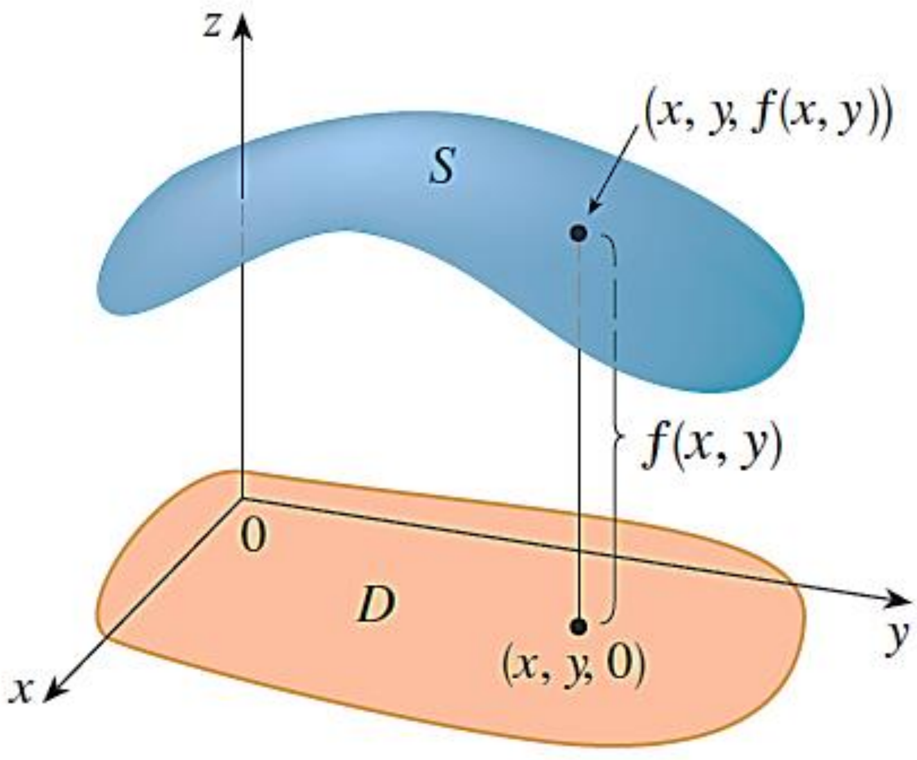


FIGURA 5

- Função

$$z = f(x, y)$$

- Domínio D é um subconjunto do plano xy
- O gráfico *S* é uma superfície no espaço.

Funções de duas variáveis

Exemplo 5 Esboce o gráfico da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

Funções de duas variáveis

Exemplo 5 Esboce o gráfico da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

O gráfico de f tem a equação $z = 6 - 3x - 2y$, ou $3x + 2y + z = 6$, que representa um plano.

Funções de duas variáveis

Exemplo 5 Esboce o gráfico da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

O gráfico de f tem a equação $z = 6 - 3x - 2y$, ou $3x + 2y + z = 6$, que representa um plano.

Para: $x = y = 0 \rightarrow z = 6$

Para: $x = z = 0 \rightarrow y = 3$

Para: $y = z = 0 \rightarrow x = 2$

Funções de duas variáveis

Exemplo 5 Esboce o gráfico da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

O gráfico de f tem a equação $z = 6 - 3x - 2y$, ou $3x + 2y + z = 6$, que representa um plano.

Para: $x = y = 0 \rightarrow z = 6$

Para: $x = z = 0 \rightarrow y = 3$

Para: $y = z = 0 \rightarrow x = 2$

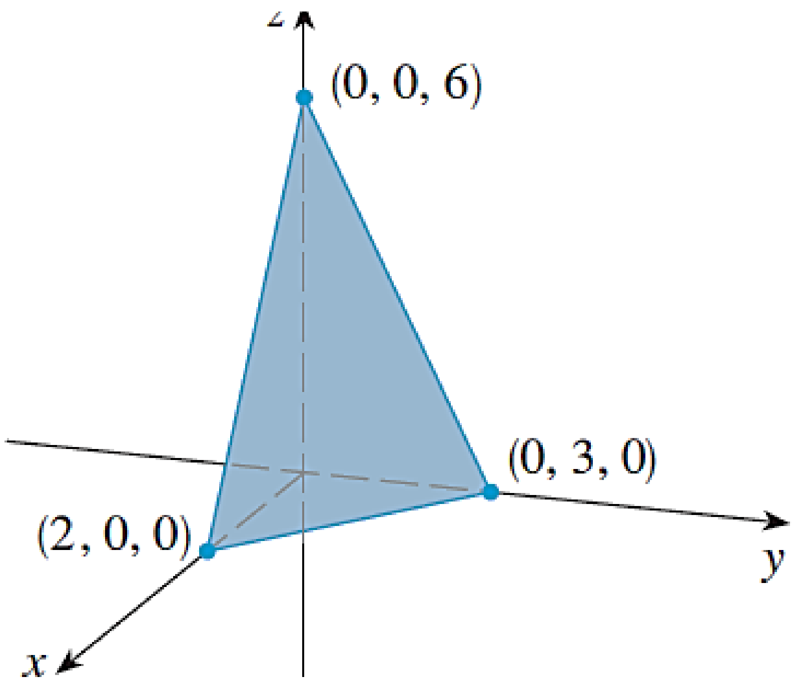


FIGURA 6

Funções de duas variáveis

Exemplo 6 Esboce o gráfico de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Funções de duas variáveis

Exemplo 6 Esboce o gráfico de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

Funções de duas variáveis

Exemplo 6 Esboce o gráfico de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

$$z^2 = 9 - x^2 - y^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

Funções de duas variáveis

Exemplo 6 Esboce o gráfico de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

$$z^2 = 9 - x^2 - y^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

- **Mas:**

$$z \geqslant 0$$

Funções de duas variáveis

Exemplo 6 Esboce o gráfico de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

$$z^2 = 9 - x^2 - y^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

- **Mas:**

$$z \geqslant 0$$

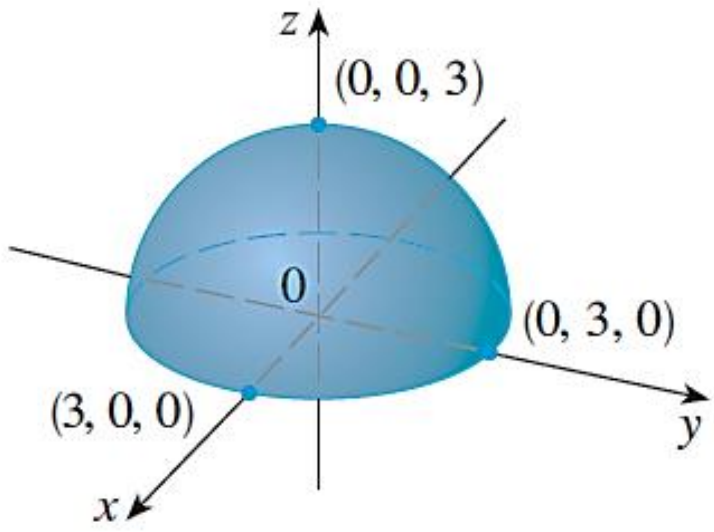


FIGURA 7
Gráfico de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Funções de duas variáveis

Exemplo 8 Determine o domínio e a imagem e esboce o gráfico de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

Funções de duas variáveis

Exemplo 8 Determine o domínio e a imagem e esboce o gráfico de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

- **Domínio** *h* (*x*, *y*): $\mathbb{R}^2$

Funções de duas variáveis

Exemplo 8 Determine o domínio e a imagem e esboce o gráfico de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

- **Domínio** $h\ (x, y)$: $\mathbb{R}^2$
- **Imagem** $h\ (x, y)$: $[0, +\infty)$

Funções de duas variáveis

Exemplo 8 Determine o domínio e a imagem e esboce o gráfico de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

- **Domínio** $h(x, y)$: $\mathbb{R}^2$
- **Imagem** $h(x, y)$: $[0, +\infty)$
- **Gráfico:** $h(x, y)$:

$$h(x, y) \geq 0$$

$$Paraboloide\ elíptico$$

Funções de duas variáveis

Exemplo 8 Determine o domínio e a imagem e esboce o gráfico de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

- **Domínio** $h\ (x, y)$: $\mathbb{R}^2$
- **Imagem** $h\ (x, y)$: $[0, +\infty)$
- **Gráfico:** $h\ (x, y)$:

$$h(x,y) \geq 0$$

$$Paraboloide\ elíptico$$

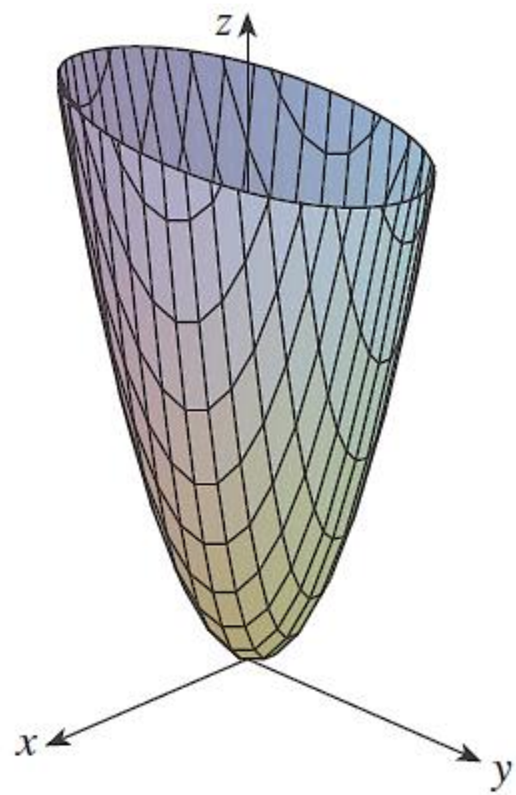
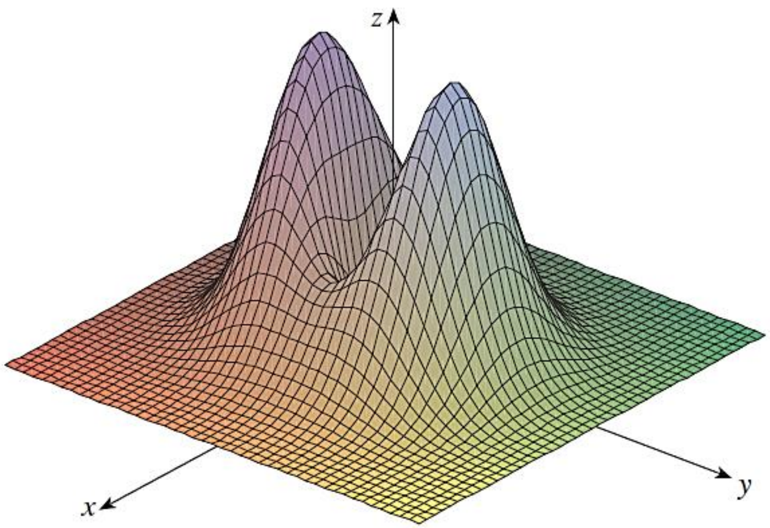
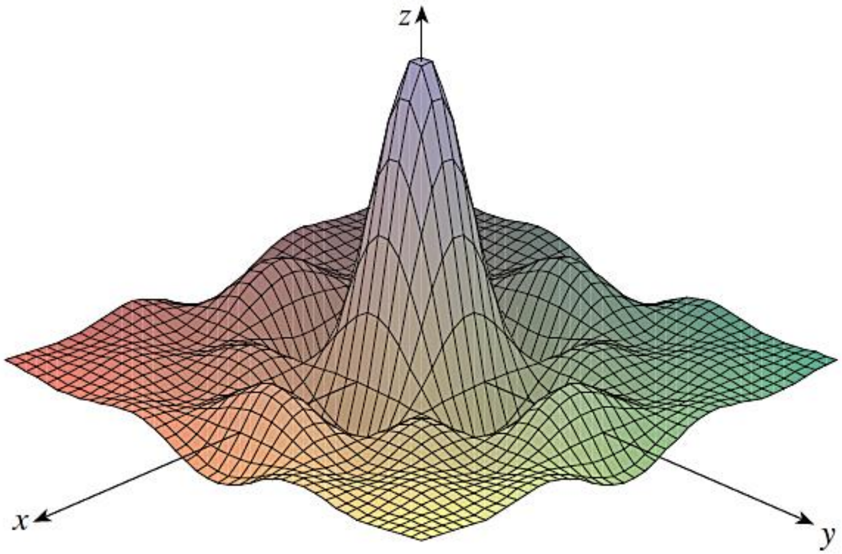


FIGURA 9 Gráfico de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$

Funções de duas variáveis

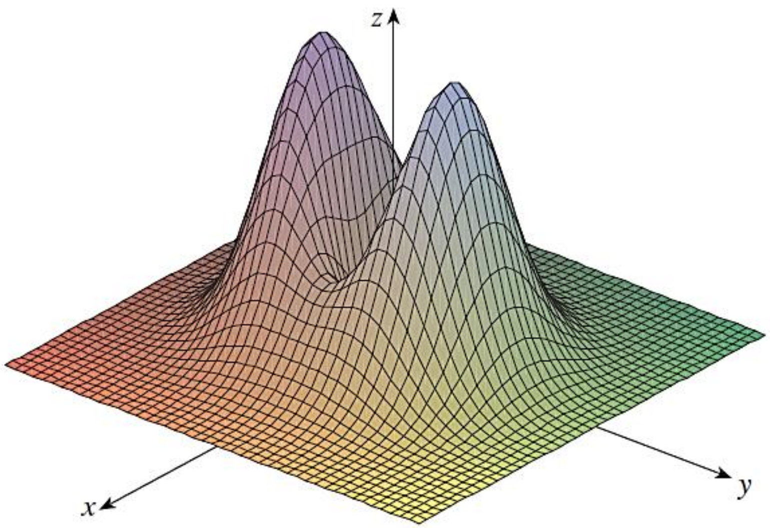


(a) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$

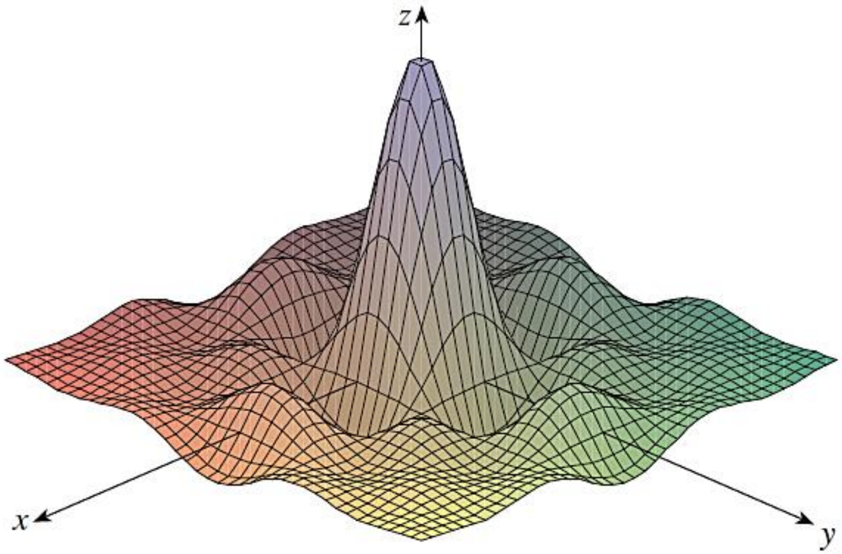


(d) $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{xy}$

Funções de duas variáveis



(a) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$



(d) $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{xy}$

- **Softwares**

GeoGebra 3D | Winplot | Gnuplot | Wolfram

Para depois desta aula:

- Estudar o capítulo 14 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

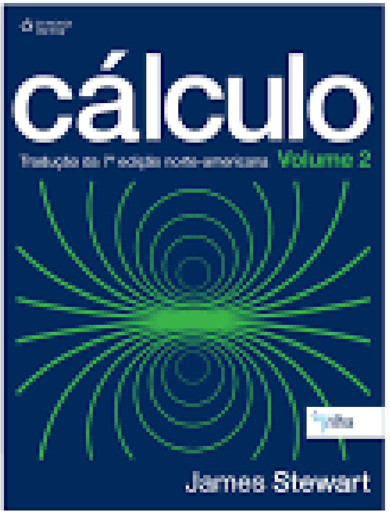
Próxima aula:

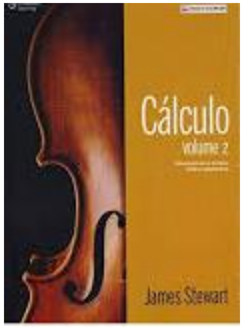
- Curvas de nível.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed. ▶





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br