

Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 02 - Aula 2

Curvas de nível

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

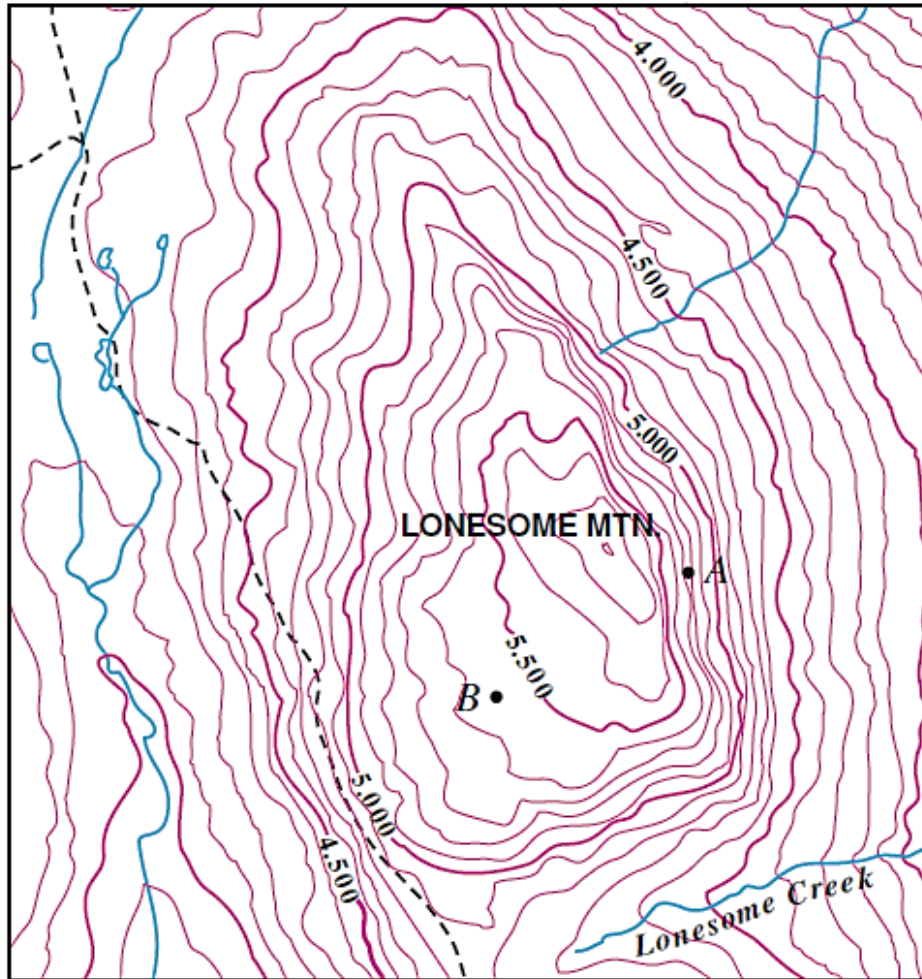
Curvas de nível

- Uma outra forma para visualizar funções são as chamadas curvas de nível.

Curvas de nível

- Uma outra forma para visualizar funções são as chamadas curvas de nível.
- Este método é utilizado pelos cartógrafos que chamam essas curvas de curvas de contorno.
- Em um mapa, os pontos com elevações constantes são ligados para formar cada curva de nível.

Curvas de nível



- Mapa topográfico de regiões montanhosas.

FIGURA 12

Curvas de nível

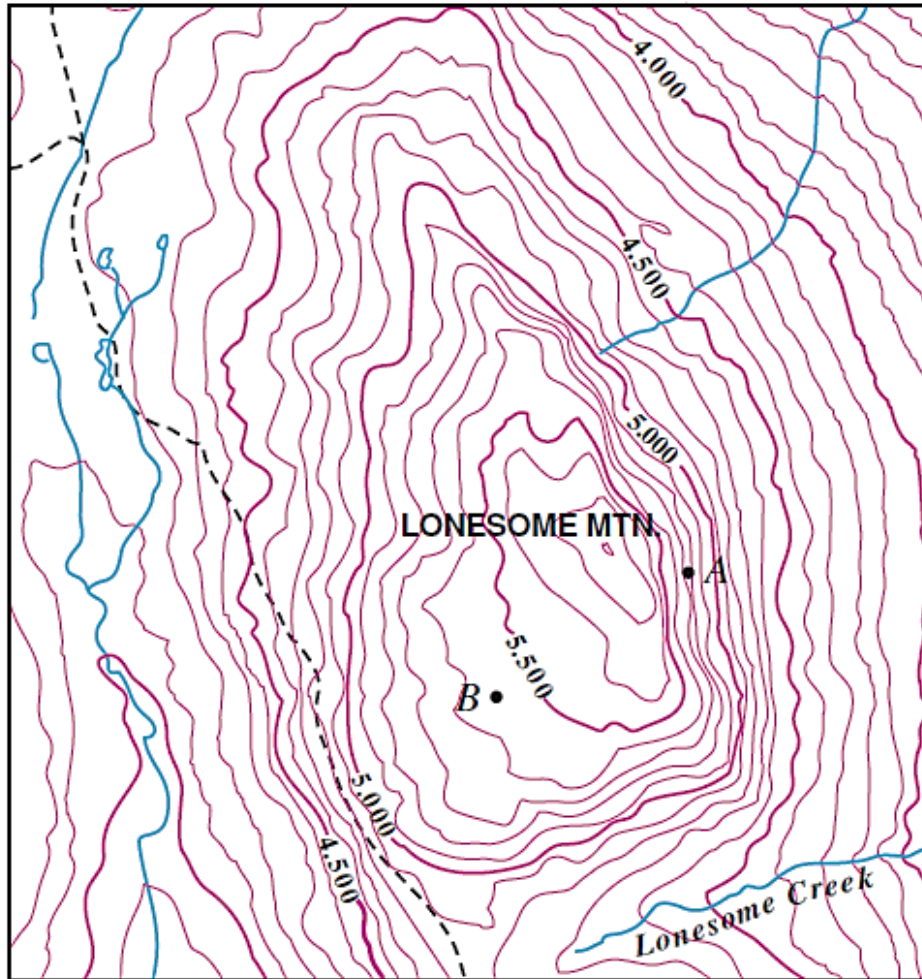


FIGURA 12

- Mapa topográfico de regiões montanhosas.
- As curvas de nível indicam a mesma elevação em relação ao nível do mar.

Curvas de nível

Definição As **curvas de nível** de uma função f de duas variáveis são aquelas com equação $f(x, y) = k$, onde k é uma constante (na imagem de f).

Curvas de nível

Definição As **curvas de nível** de uma função f de duas variáveis são aquelas com equação $f(x, y) = k$, onde k é uma constante (na imagem de f).

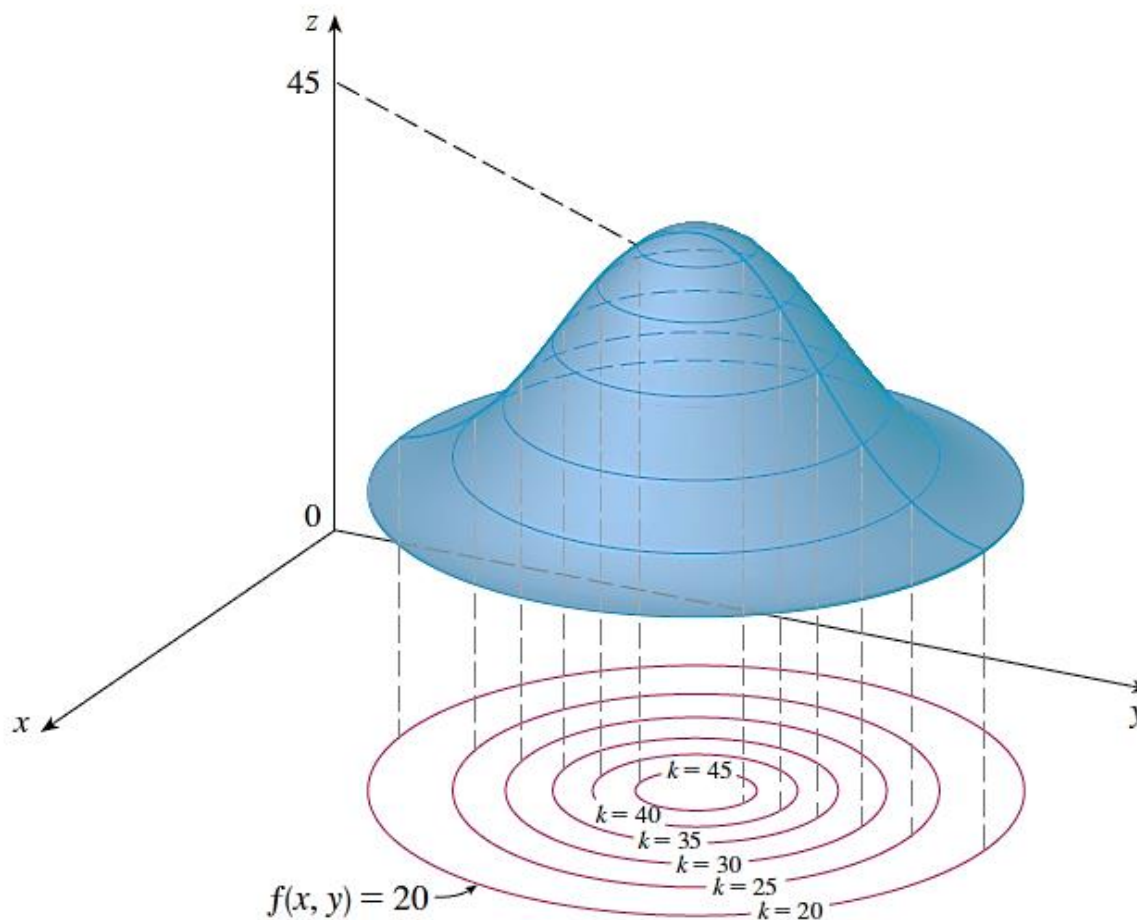


FIGURA 11

Funções de várias variáveis

Exemplo 9

Um mapa de contorno para uma função f é mostrado na Figura 14. Use-o para estimar os valores de $f(1, 3)$ e $f(4, 5)$.

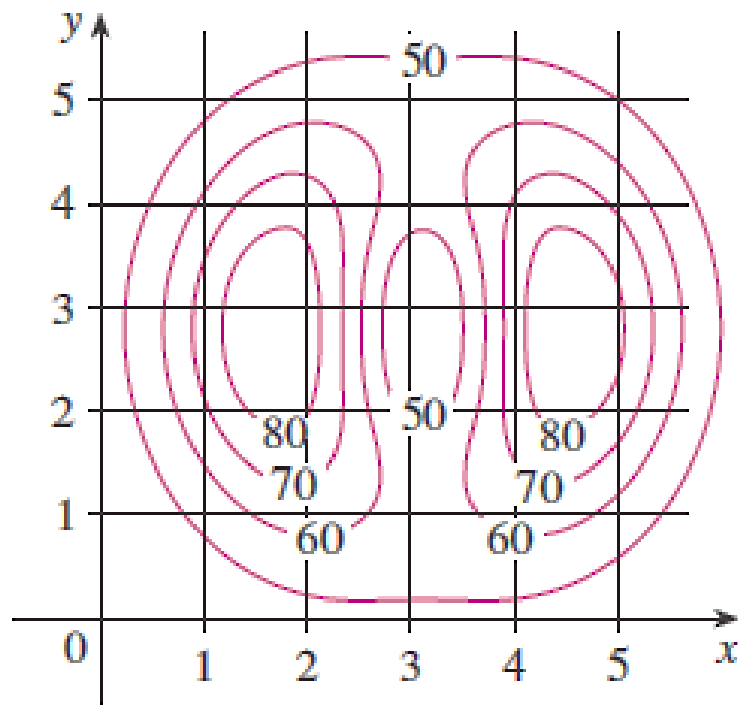
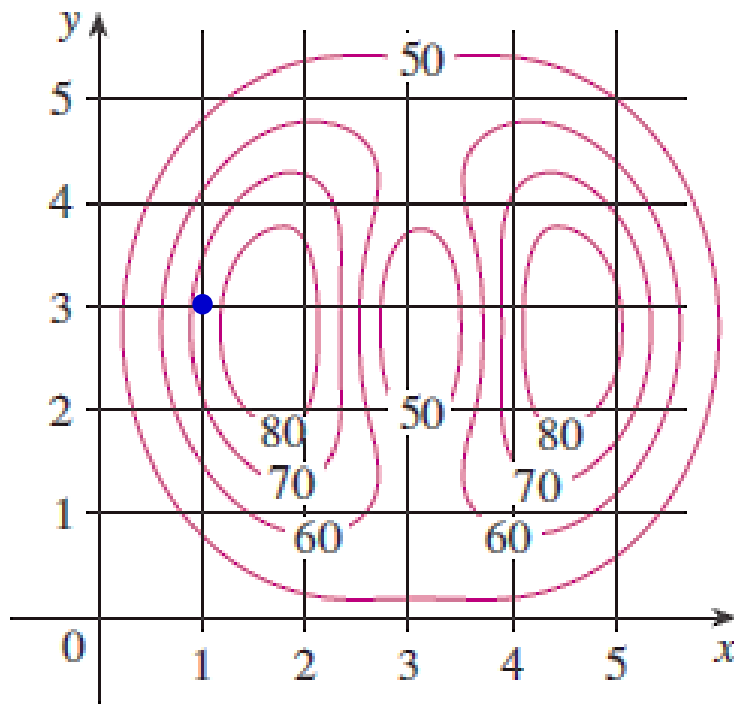


FIGURA 14

Funções de várias variáveis

Exemplo 9

Um mapa de contorno para uma função f é mostrado na Figura 14. Use-o para estimar os valores de $f(1, 3)$ e $f(4, 5)$.



O ponto $(1, 3)$ está na parte entre as curvas de nível cujos valores de z são 70 e 80.

Estimamos que

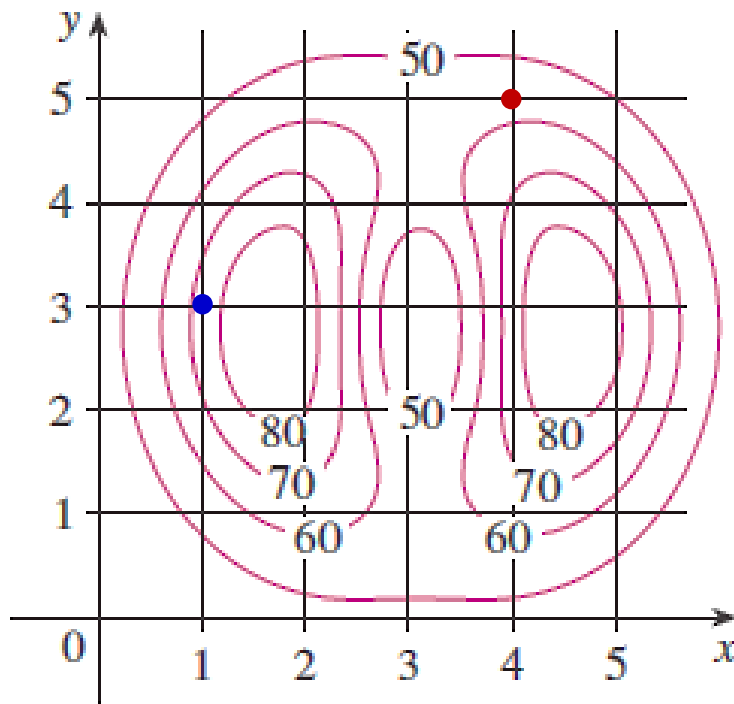
$$f(1, 3) \approx 73$$

FIGURA 14

Funções de várias variáveis

Exemplo 9

Um mapa de contorno para uma função f é mostrado na Figura 14. Use-o para estimar os valores de $f(1, 3)$ e $f(4, 5)$.



O ponto $(1, 3)$ está na parte entre as curvas de nível cujos valores de z são 70 e 80.

Estimamos que

$$f(1, 3) \approx 73$$

Da mesma forma

$$f(4, 5) \approx 56$$

FIGURA 14

Funções de várias variáveis

Exemplo 10 Esboce as curvas de nível da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ para os valores $k = -6, 0, 6, 12$.

Funções de várias variáveis

Exemplo 10 Esboce as curvas de nível da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ para os valores $k = -6, 0, 6, 12$.

As curvas de nível são

$$6 - 3x - 2y = k \quad \text{ou}$$

$$3x + 2y + (k - 6) = 0$$

Funções de várias variáveis

Exemplo 10 Esboce as curvas de nível da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ para os valores $k = -6, 0, 6, 12$.

As curvas de nível são

$$6 - 3x - 2y = k \quad \text{ou}$$

$$3x + 2y + (k - 6) = 0$$

Essa é uma família de retas

com inclinação $-\frac{3}{2}$.

com $k = -6, 0, 6$ e 12

Funções de várias variáveis

Exemplo 10 Esboce as curvas de nível da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ para os valores $k = -6, 0, 6, 12$.

As curvas de nível são

$$6 - 3x - 2y = k \quad \text{ou}$$

$$3x + 2y + (k - 6) = 0$$

Essa é uma família de retas
com inclinação $-\frac{3}{2}$.

com $k = -6, 0, 6$ e 12

$$3x + 2y - 12 = 0,$$

$$3x + 2y - 6 = 0,$$

$$3x + 2y = 0 \text{ e}$$

$$3x + 2y + 6 = 0.$$

Funções de várias variáveis

Exemplo 10 Esboce as curvas de nível da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ para os valores $k = -6, 0, 6, 12$.

As curvas de nível são

$$6 - 3x - 2y = k \quad \text{ou}$$

$$3x + 2y + (k - 6) = 0$$

Essa é uma família de retas com inclinação $-\frac{3}{2}$.

com $k = -6, 0, 6$ e 12

$$3x + 2y - 12 = 0,$$

$$3x + 2y - 6 = 0,$$

$$3x + 2y = 0 \text{ e}$$

$$3x + 2y + 6 = 0.$$

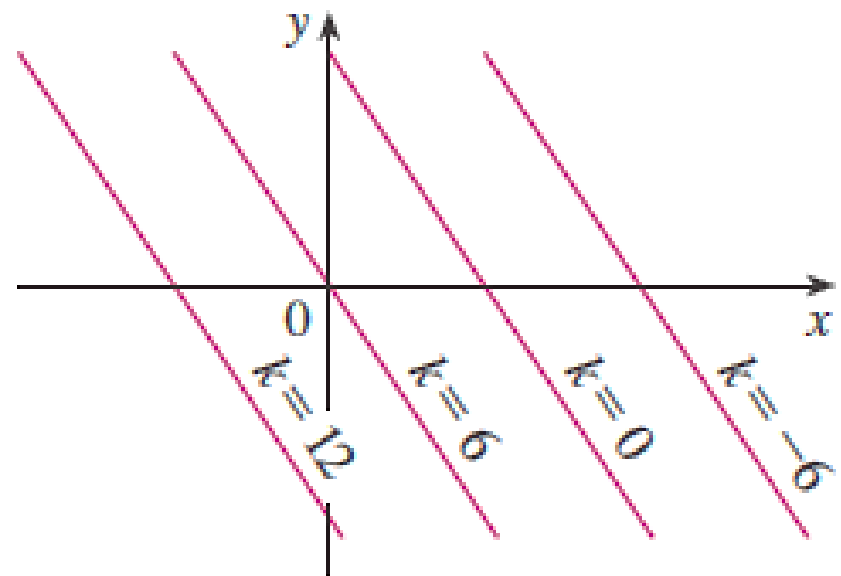


FIGURA 15

Mapa de contorno de $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$

Funções de várias variáveis

Exemplo 11 Esboce as curvas de nível da função
 $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ para $k = 0, 1, 2, 3$

Funções de várias variáveis

Exemplo 11 Esboce as curvas de nível da função
 $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ para $k = 0, 1, 2, 3$

As curvas de nível são

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k \quad \text{ou}$$

$$x^2 + y^2 = 9 - k^2 \quad .$$

Funções de várias variáveis

Exemplo 11 Esboce as curvas de nível da função
 $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ para $k = 0, 1, 2, 3$

As curvas de nível são

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k \quad \text{ou}$$

$$x^2 + y^2 = 9 - k^2$$

circunferências concêntricas

com centro em $(0, 0)$ e

raio $\sqrt{9 - k^2}$.

Funções de várias variáveis

Exemplo 11 Esboce as curvas de nível da função
 $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ para $k = 0, 1, 2, 3$

As curvas de nível são

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k \quad \text{ou}$$

$$x^2 + y^2 = 9 - k^2$$

circunferências concêntricas
com centro em $(0, 0)$ e
raio $\sqrt{9 - k^2}$.

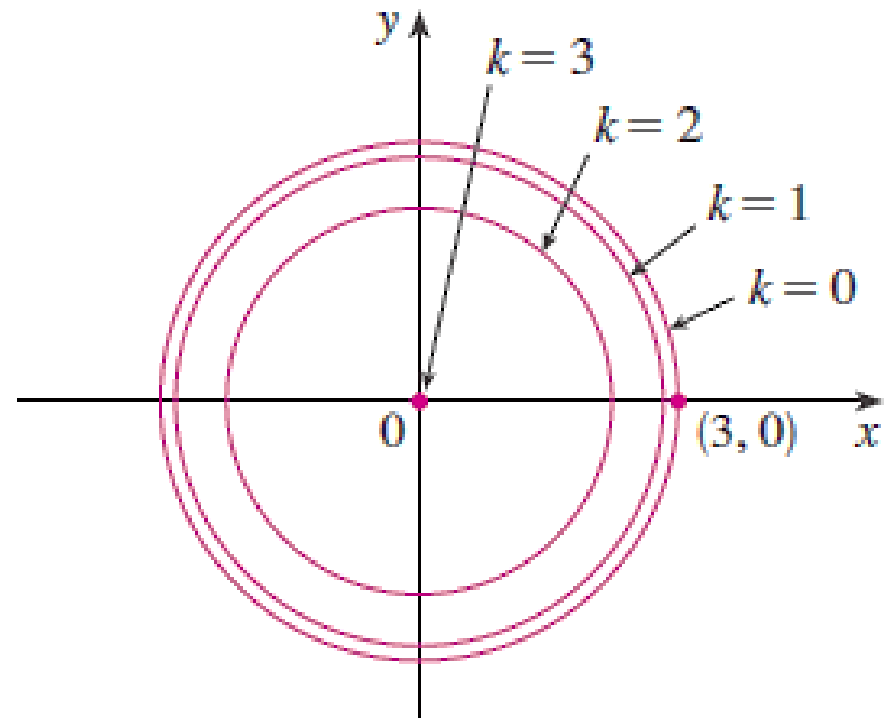


FIGURA 16

Funções de várias variáveis

Exemplo 12 Esboce algumas curvas de nível da função

$$h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1.$$

Funções de várias variáveis

Exemplo 12 Esboce algumas curvas de nível da função

$$h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1.$$

As curvas de nível são

$$4x^2 + y^2 + 1 = k \quad \text{ou}$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}(k-1)} + \frac{y^2}{k-1} = 1$$

Funções de várias variáveis

Exemplo 12 Esboce algumas curvas de nível da função

$$h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1.$$

As curvas de nível são

$$4x^2 + y^2 + 1 = k \quad \text{ou}$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}(k-1)} + \frac{y^2}{k-1} = 1$$

para $k > 1$, descrevem uma família

de elipses com semieixos

$$\frac{1}{2}\sqrt{k-1} \text{ e } \sqrt{k-1}.$$

Funções de várias variáveis

Exemplo 12 Esboce algumas curvas de nível da função

$$h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1.$$

As curvas de nível são

$$4x^2 + y^2 + 1 = k \quad \text{ou}$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}(k-1)} + \frac{y^2}{k-1} = 1$$

para $k > 1$, descrevem uma família de elipses com semieixos

$$\frac{1}{2}\sqrt{k-1} \text{ e } \sqrt{k-1}.$$

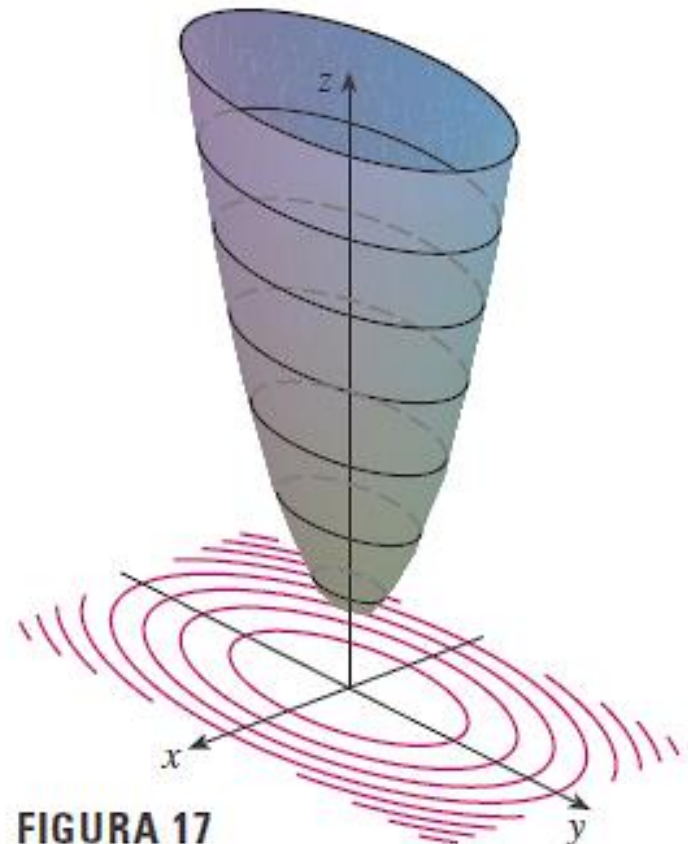


FIGURA 17

$$= \int_0^2 dy \int_{\frac{a}{2}}^a f(x, y) dx + \int_{\frac{a\sqrt{3}}{2}}^a dy \int_{a-\sqrt{3}y}^a f(x, y) dx$$

Funções de três ou mais variáveis



Funções de três ou mais variáveis

- Uma função com três variáveis f é uma regra que associa a cada tripla ordenada (x, y, z) em um domínio $D \subset \mathbb{R}^3$ a um único número real.

Funções de três ou mais variáveis

- Uma função com três variáveis f é uma regra que associa a cada tripla ordenada (x, y, z) em um domínio $D \subset \mathbb{R}^3$ a um único número real.
- Por exemplo, a temperatura T em um ponto da superfície terrestre depende da latitude x e da longitude y do ponto e do tempo t , de modo que podemos escrever:

$$T = f(x, y, t)$$

Funções de várias variáveis

Exemplo 14 Encontre o domínio de f se

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \operatorname{sen} z$$

Funções de várias variáveis

Exemplo 14 Encontre o domínio de f se

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \operatorname{sen} z$$

$f(x, y, z)$ é definida enquanto $z - y > 0$,

assim, o domínio de f é

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > y\}$$

Funções de várias variáveis

Exemplo 14 Encontre o domínio de f se

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \operatorname{sen} z$$

$f(x, y, z)$ é definida enquanto $z - y > 0$,

assim, o domínio de f é

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > y\}$$

Esse é um semiespaço que consiste em

todos pontos que estão acima do plano $z = y$.

Funções de várias variáveis

Exemplo 14 Encontre o domínio de f se

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \operatorname{sen} z$$

$f(x, y, z)$ é definida enquanto $z - y > 0$,

assim, o domínio de f é

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > y\}$$

Esse é um semiespaço que consiste em

todos pontos que estão acima do plano $z = y$.

superfícies de nível, equações $f(x, y, z) = k$,

onde k é uma constante.

Funções de várias variáveis

Exemplo 15 Encontre as superfícies de nível da função.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Funções de várias variáveis

Exemplo 15 Encontre as superfícies de nível da função.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

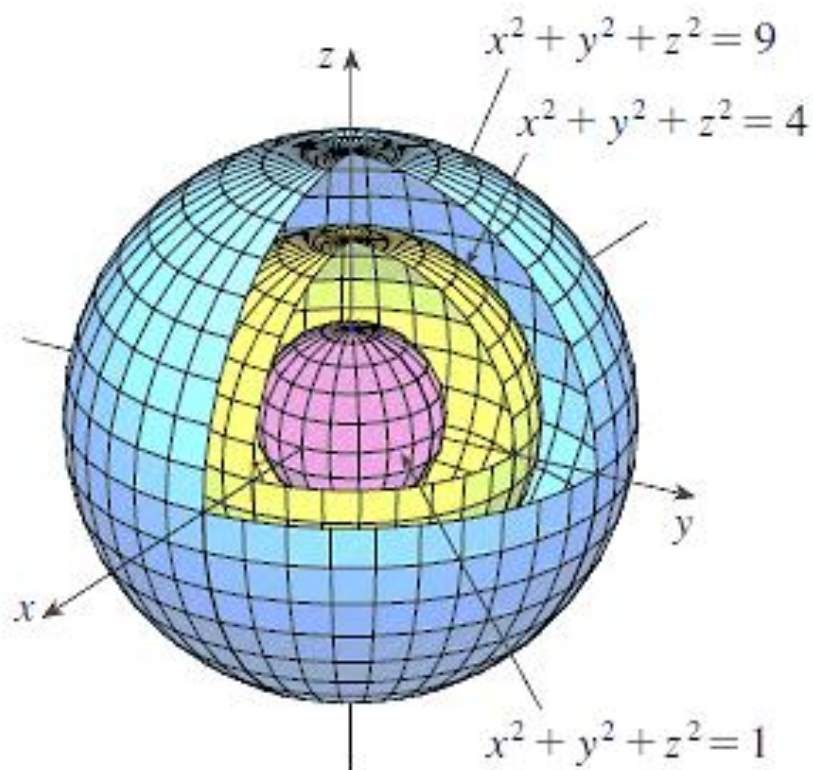
As superfícies de nível são
uma família de esferas concêntricas
com raio \sqrt{k} .

$$x^2 + y^2 + z^2 = k, \quad \text{onde } k \geq 0.$$

Funções de várias variáveis

Exemplo 15 Encontre as superfícies de nível da função.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$



As superfícies de nível são uma família de esferas concêntricas com raio \sqrt{k} .

$$x^2 + y^2 + z^2 = k, \quad \text{onde } k \geq 0.$$

Para depois desta aula:

- Estudar o capítulo 14 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

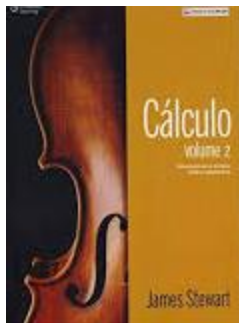
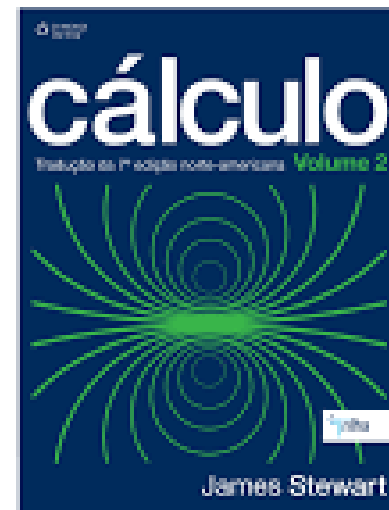
Próxima aula:

- Limites e continuidade de funções de várias variáveis.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios
com base na 7^a ed. ►



STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.**
São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com



henrique.faria@unesp.br