Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 03 - Aula 1
Derivadas parciais

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Derivadas parciais

- O serviço metereológico canadense definiu o *humidex* como medida para temperatura aparente.

Derivadas parciais

- O serviço metereológico canadense definiu o *humidex* como medida para temperatura aparente.
- O *humidex I* é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real for *T* e a umidade relativa for *H*.

$$I = f(T, H)$$

Derivadas parciais

- O serviço metereológico canadense definiu o *humidex* como medida para temperatura aparente.
- O *humidex I* é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real for *T* e a umidade relativa for *H*.

$$I = f(T, H)$$

- Em um dia quente a umidade mais alta aumenta a sensação do calor.

Derivadas parciais

Umidade relativa (%)

Temperatura real (°C) T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

TABELA 1 Índice de calor I como função da temperatura e umidade

Derivadas parciais

Umidade relativa (%)

T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

Temperatura real (°C)

TABELA 1 Índice de calor *I* como função da temperatura e umidade

- Estudaremos as taxas de variação, hora fixando a temperatura em 30ºC, hora a umidade em 60%.

Derivadas parciais

- Fixando H = 60% na tabela *humidex:* $g(T) = f(T, 60)$

Derivadas parciais

- Fixando *H* = 60% na tabela *humidex:* $g(T) = f(T, 60)$

$$g'(30) = \lim_{h \to 0} \frac{g(30 + h) - g(30)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(30 + h, 60) - f(30, 60)}{h}$$

Derivadas parciais

- Fixando *H* = 60% na tabela *humidex:* $g(T) = f(T, 60)$

$$g'(30) = \lim_{h \to 0} \frac{g(30 + h) - g(30)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(30 + h, 60) - f(30, 60)}{h}$$

$$g'(30) \approx \frac{g(32) - g(30)}{2} = \frac{f(32, 60) - f(30, 60)}{2} = \frac{42 - 38}{2} = 2$$

Derivadas parciais

- Fixando *H* = 60% na tabela *humidex:* $g(T) = f(T, 60)$

$$g'(30) = \lim_{h \to 0} \frac{g(30+h) - g(30)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(30+h, 60) - f(30, 60)}{h}$$

$$g'(30) \approx \frac{g(32) - g(30)}{2} = \frac{f(32, 60) - f(30, 60)}{2} = \frac{42 - 38}{2} = 2$$

$$g'(30) \approx \frac{g(28) - g(30)}{-2} = \frac{f(28, 60) - f(30, 60)}{-2} = \frac{35 - 38}{-2} = 1{,}5$$

Derivadas parciais

- Fixando $H = 60\%$ na tabela *humidex:* $g(T) = f(T, 60)$

$$g'(30) = \lim_{h \to 0} \frac{g(30 + h) - g(30)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(30 + h, 60) - f(30, 60)}{h}$$

$$g'(30) \approx \frac{g(32) - g(30)}{2} = \frac{f(32, 60) - f(30, 60)}{2} = \frac{42 - 38}{2} = 2$$

$$g'(30) \approx \frac{g(28) - g(30)}{-2} = \frac{f(28, 60) - f(30, 60)}{-2} = \frac{35 - 38}{-2} = 1{,}5$$

- Podemos aproximar a derivada: $g'(30) = 1{,}75$.

Derivadas parciais

- Fixando *H* = 60% na tabela *humidex:* $g(T) = f(T, 60)$

$$g'(30) = \lim_{h \to 0} \frac{g(30 + h) - g(30)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(30 + h, 60) - f(30, 60)}{h}$$

$$g'(30) \approx \frac{g(32) - g(30)}{2} = \frac{f(32, 60) - f(30, 60)}{2} = \frac{42 - 38}{2} = 2$$

$$g'(30) \approx \frac{g(28) - g(30)}{-2} = \frac{f(28, 60) - f(30, 60)}{-2} = \frac{35 - 38}{-2} = 1{,}5$$

- Podemos aproximar a derivada: $g'(30) = 1{,}75$.
- A temperatura aparente aumenta de 1,75ºC para cada grau da temperatura real.

Derivadas parciais

- Fixando T = 30ºC na tabela *humidex:* $G(T) = f(30, H)$

Derivadas parciais

- Fixando $T = 30^{o}C$ na tabela *humidex:* $G(T) = f(30, H)$

$$G'(60) = \lim_{h \to 0} \frac{G(60 + h) - G(60)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(30, 60 + h) - f(30, 60)}{h}$$

Derivadas parciais

- Fixando $T = 30^oC$ na tabela *humidex:* $G(T) = f(30, H)$

$$G'(60) = \lim_{h \to 0} \frac{G(60+h) - G(60)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(30, 60+h) - f(30, 60)}{h}$$

$$G'(60) \approx \frac{G(65) - G(60)}{5} = \frac{f(30, 65) - f(30, 60)}{5} = \frac{40 - 38}{5} = 0{,}4$$

Derivadas parciais

- Fixando $T = 30^{o}C$ na tabela *humidex:* $G(T) = f(30, H)$

$$G'(60) = \lim_{h \to 0} \frac{G(60+h) - G(60)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(30, 60+h) - f(30, 60)}{h}$$

$$G'(60) \approx \frac{G(65) - G(60)}{5} = \frac{f(30, 65) - f(30, 60)}{5} = \frac{40 - 38}{5} = 0{,}4$$

$$G'(60) \approx \frac{G(55) - G(60)}{-5} = \frac{f(30, 55) - f(30, 60)}{-5} = \frac{37 - 38}{-5} = 0{,}2$$

Derivadas parciais

- Fixando $T = 30$ºC na tabela *humidex:* $G(T) = f(30, H)$

$$G'(60) = \lim_{h\to 0} \frac{G(60+h) - G(60)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(30, 60+h) - f(30, 60)}{h}$$

$$G'(60) \approx \frac{G(65) - G(60)}{5} = \frac{f(30, 65) - f(30, 60)}{5} = \frac{40 - 38}{5} = 0{,}4$$

$$G'(60) \approx \frac{G(55) - G(60)}{-5} = \frac{f(30, 55) - f(30, 60)}{-5} = \frac{37 - 38}{-5} = 0{,}2$$

- Podemos aproximar a derivada: $G'(30) = 0{,}3$.

Derivadas parciais

- Fixando *T* = 30ºC na tabela *humidex:* $G(T) = f(30, H)$

$$G'(60) = \lim_{h \to 0} \frac{G(60 + h) - G(60)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(30, 60 + h) - f(30, 60)}{h}$$

$$G'(60) \approx \frac{G(65) - G(60)}{5} = \frac{f(30, 65) - f(30, 60)}{5} = \frac{40 - 38}{5} = 0{,}4$$

$$G'(60) \approx \frac{G(55) - G(60)}{-5} = \frac{f(30, 55) - f(30, 60)}{-5} = \frac{37 - 38}{-5} = 0{,}2$$

- Podemos aproximar a derivada: $G'(30) = 0{,}3$.
- A temperatura aparente aumenta de 0,3ºC para cada ponto percentual na umidade relativa.

Derivadas parciais

- Em geral, se $f = f\,(x, y)$ a derivada parcial de f em relação a x, mantendo fixo y = b é denotada por:

$$f_x(a, b) = g'(a) \qquad \text{onde} \qquad g(x) = f\,(x, b)$$

Derivadas parciais

- Em geral, se $f = f(x, y)$ a derivada parcial de f em relação a x, mantendo fixo y = b é denotada por:

$$f_x(a, b) = g'(a) \qquad \text{onde} \qquad g(x) = f(x, b)$$

$$f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

Derivadas parciais

- Em geral, se $f = f(x, y)$ a derivada parcial de f em relação a x, mantendo fixo y = b é denotada por:

$$f_x(a, b) = g'(a) \qquad \text{onde} \qquad g(x) = f(x, b)$$

$$f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

- Por outro lado, se $f = f(x, y)$ a derivada parcial de f em relação a y, mantendo fixo x = a é denotada por:

$$f_y(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

Derivadas parciais

- Sendo $z = f(x, y)$, temos as seguintes notações para as derivadas parciais:

Derivadas parciais

- Sendo $z = f(x, y)$, temos as seguintes notações para as derivadas parciais:

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

Derivadas parciais

- Sendo $z = f(x, y)$, temos as seguintes notações para as derivadas parciais:

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Derivadas parciais

- Sendo $z = f(x, y)$, temos as seguintes notações para as derivadas parciais:

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

- Para determinar as derivadas parciais:

1. Para determinar f_x, trate y como uma constante e derive $f(x, y)$ com relação a x.
2. Para determinar f_y, trate x como uma constante e derive $f(x, y)$ com relação a y.

Derivadas parciais

Exemplo 1 Se $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, encontre $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.

Derivadas parciais

Exemplo 1 Se $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, encontre $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.

Solução:

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

Derivadas parciais

Exemplo 1 Se $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, encontre $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.

Solução:

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

$$f_x(2, 1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16$$

Derivadas parciais

Exemplo 1 Se $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, encontre $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.

Solução:

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

$$f_x(2, 1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16$$

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

Derivadas parciais

Exemplo 1 Se $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, encontre $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.

Solução:

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

$$f_x(2, 1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16$$

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

$$f_y(2, 1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8$$

Derivadas parciais

Exemplo 2 Encontre $\partial f / \partial y$ se $f(x, y) = y \text{ sen } xy$.

Derivadas parciais

Exemplo 2 Encontre $\partial f/\partial y$ se $f(x, y) = y \operatorname{sen} xy$.

Solução:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y \operatorname{sen} xy)$$

Derivadas parciais

Exemplo 2 Encontre $\partial f/\partial y$ se $f(x, y) = y \operatorname{sen} xy$.

Solução:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y \operatorname{sen} xy) = y \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{sen} xy + (\operatorname{sen} xy) \frac{\partial}{\partial y}(y)$$

Derivadas parciais

Exemplo 2 Encontre $\partial f/\partial y$ se $f(x, y) = y \text{ sen } xy$.

Solução:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y \,\text{sen}\, xy) = y\frac{\partial}{\partial y}\text{sen}\, xy + (\text{sen}\, xy)\frac{\partial}{\partial y}(y)$$

$$= (y \cos xy)\frac{\partial}{\partial y}(xy) + \text{sen}\, xy$$

Derivadas parciais

Exemplo 2 Encontre $\partial f/\partial y$ se $f(x, y) = y \operatorname{sen} xy$.

Solução:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y \operatorname{sen} xy) = y \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{sen} xy + (\operatorname{sen} xy) \frac{\partial}{\partial y}(y)$$

$$= (y \cos xy) \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \operatorname{sen} xy = xy \cos xy + \operatorname{sen} xy.$$

Derivadas parciais

Exemplo 3

Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ se z é definido implicitamente como uma função de x e y pela equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

Derivadas parciais

Exemplo 3 Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ se z é definido implicitamente como uma função de x e y pela equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

Solução:

$$3x^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Derivadas parciais

Exemplo 3 Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ se z é definido implicitamente como uma função de x e y pela equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

Solução:

$$3x^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

Derivadas parciais

Exemplo 3 Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ se z é definido implicitamente como uma função de x e y pela equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

Solução:

$$3x^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

Derivadas parciais

Exemplo 4 Encontre $\partial z/\partial x$ se a equação $yz - \ln z = x + y$

Derivadas parciais

Exemplo 4 Encontre $\partial z/\partial x$ se a equação $yz - \ln z = x + y$

Solução:

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial x}\ln z = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}$$

Derivadas parciais

Exemplo 4 Encontre $\partial z/\partial x$ se a equação $yz - \ln z = x + y$

Solução:

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial x}\ln z = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}$$

Com y constante,

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz) = y\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Derivadas parciais

Exemplo 4 Encontre $\partial z/\partial x$ se a equação $yz - \ln z = x + y$

Solução:

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial x}\ln z = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}$$

Com y constante,

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz) = y\frac{\partial z}{\partial x}.$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + 0$$

Derivadas parciais

Exemplo 4 Encontre $\partial z/\partial x$ se a equação $yz - \ln z = x + y$

Solução:

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial x}\ln z = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}$$

Com y constante,

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz) = y\frac{\partial z}{\partial x}.$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + 0$$

$$\left(y - \frac{1}{z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

Derivadas parciais

Exemplo 4 Encontre $\partial z/\partial x$ se a equação $yz - \ln z = x + y$

Solução:

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial x}\ln z = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}$$

Com y constante,

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz) = y\frac{\partial z}{\partial x}.$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + 0$$

$$\left(y - \frac{1}{z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{yz - 1}.$$

Para depois desta aula:

- Estudar seção 14.3 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

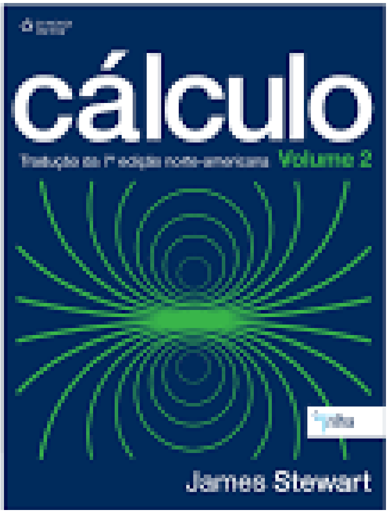
Próxima aula:

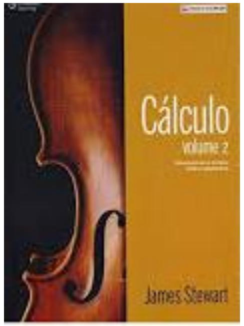
- Interpretação geométrica.
- Derivadas de ordem mais alta.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed.





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br