Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 03 - Aula 2
Interpretação das derivadas parciais

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

Interpretação das derivadas parciais

- A equação $z = f\,(x, y)$ representa o gráfico de f.

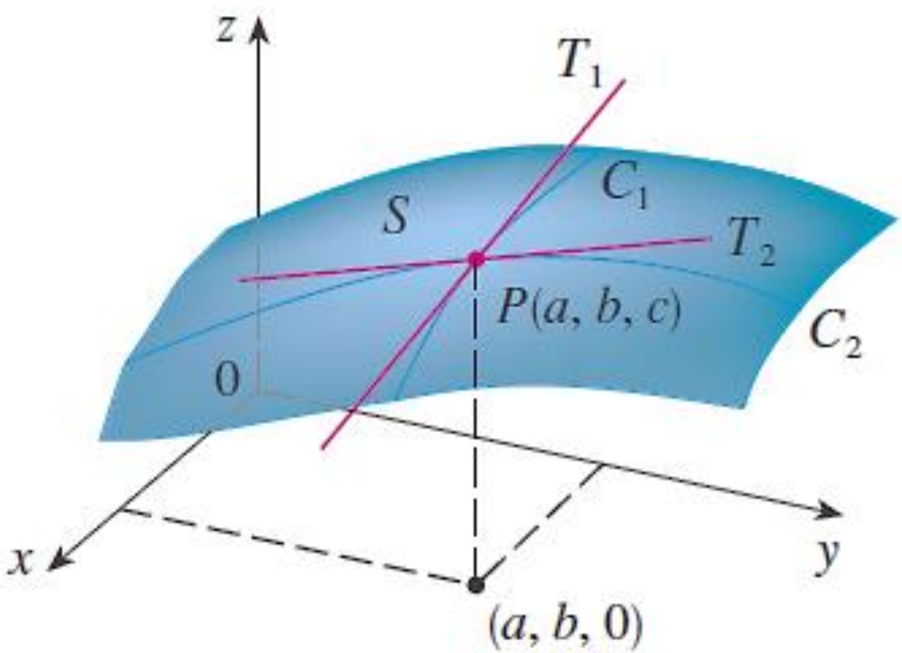


FIGURA 1

Interpretação das derivadas parciais

- A equação $z = f(x, y)$ representa o gráfico de f.

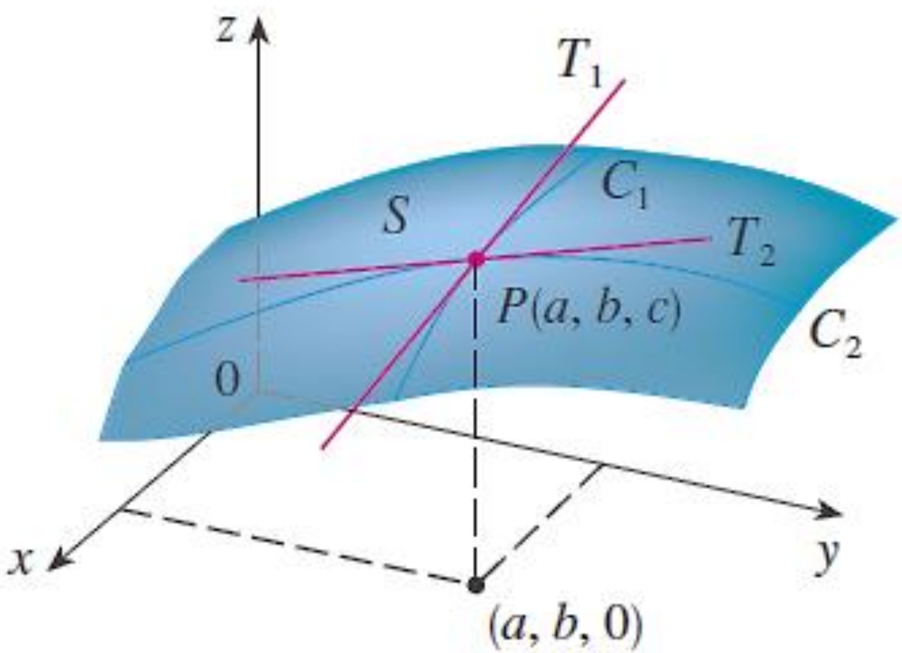


FIGURA 1

- A curva C_1 é o gráfico da função $g(x) = f(x, b)$, de modo que a inclinação da tangente T_1 em P é $g'(a) = f_x(a, b)$.

Interpretação das derivadas parciais

- A equação $z = f(x, y)$ representa o gráfico de f.

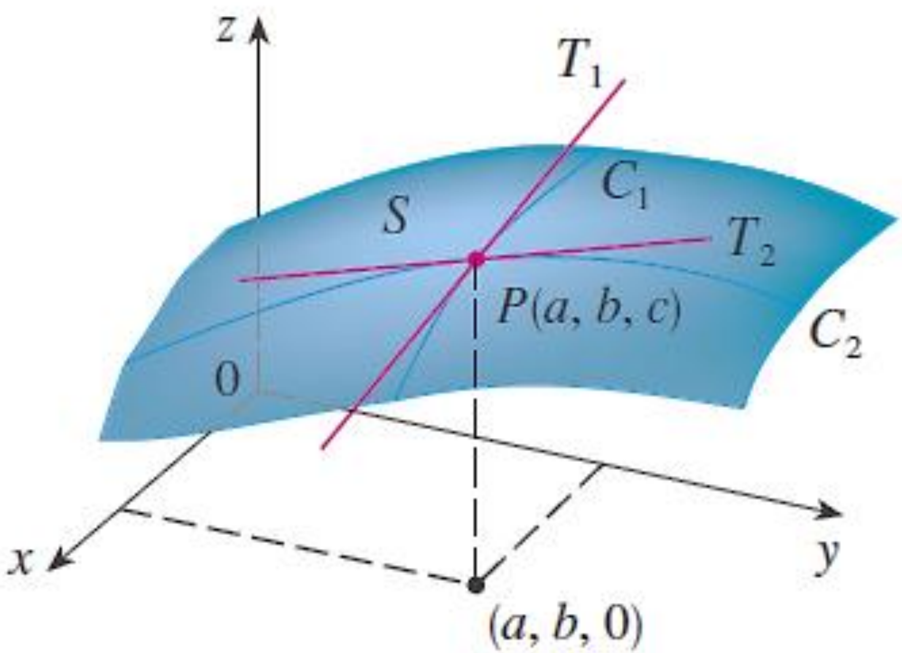


FIGURA 1

- A curva C_1 é o gráfico da função $g(x) = f(x, b)$, de modo que a inclinação da tangente T_1 em P é $g'(a) = f_x(a, b)$.

- Para C_2: $G(y) = f(a, y)$ e a inclinação da tangente T_2 em P é $G'(y) = f_y(a, b)$.

Interpretação das derivadas parciais

- As derivadas parciais f_x(a, b) e f_y (a, b) podem ser interpretadas geometricamente como as inclinações das retas tangentes em $P(a, b, c)$.

Interpretação das derivadas parciais

- As derivadas parciais $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ podem ser interpretadas geometricamente como as inclinações das retas tangentes em $P(a, b, c)$.
- Por outro lado, no exemplo do *humidex*, as derivadas parciais podem ser interpretadas como taxas de variação.

Interpretação das derivadas parciais

- As derivadas parciais f_x(a, b) e f_y (*a*, *b*) podem ser interpretadas geometricamente como as inclinações das retas tangentes em *P*(*a, b, c*).
- Por outro lado, no exemplo do *humidex*, as derivadas parciais podem ser interpretadas como taxas de variação.
- Se *z* = *f*(*x*, *y*), então $\frac{\partial z}{\partial x}$ representa a taxa de variação de *z* com relação a *x* quando *y* é mantido fixo.

Interpretação das derivadas parciais

- As derivadas parciais f_x(a, b) e f_y (*a*, *b*) podem ser interpretadas geometricamente como as inclinações das retas tangentes em *P*(*a, b, c*).
- Por outro lado, no exemplo do *humidex*, as derivadas parciais podem ser interpretadas como taxas de variação.
- Se *z* = *f*(*x*, *y*), então $\frac{\partial z}{\partial x}$ representa a taxa de variação de *z* com relação a *x* quando *y* é mantido fixo.
- Da mesma forma, $\frac{\partial z}{\partial y}$ representa a taxa de variação de *z* em relação a *y* quando *x* é mantido fixo.

Interpretação geométrica

Exemplo 1 Se $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, determine $f_x(1, 1)$ e $f_y(1, 1)$ e interprete esses números como inclinações.

Interpretação geométrica

Exemplo 1 Se $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, determine $f_x(1, 1)$ e $f_y(1, 1)$ e interprete esses números como inclinações.

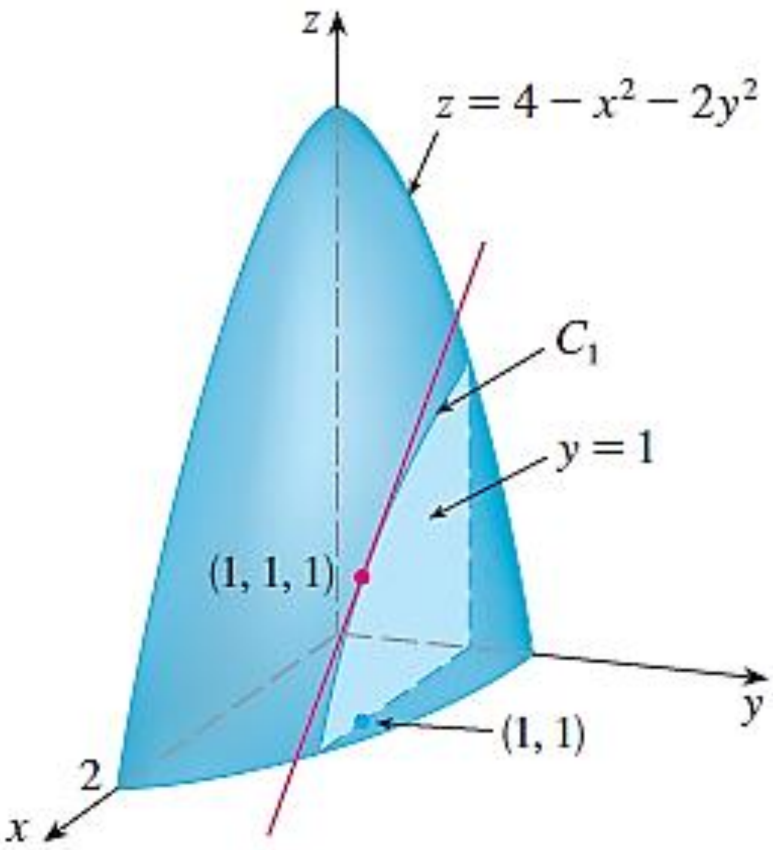


FIGURA 2

Interpretação geométrica

Exemplo 1 Se $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, determine $f_x(1, 1)$ e $f_y(1, 1)$ e interprete esses números como inclinações.

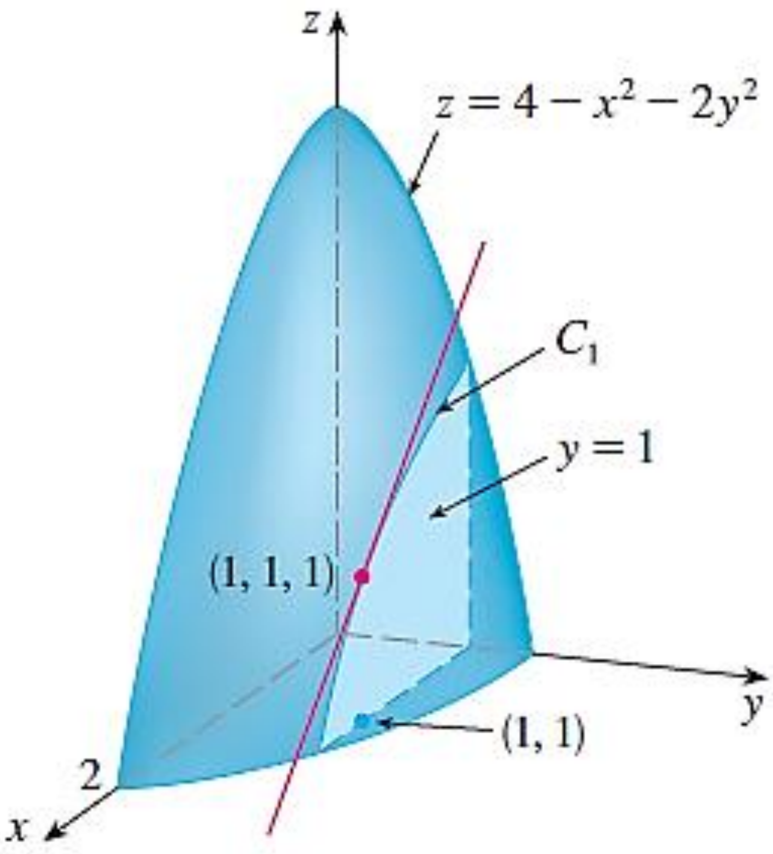


FIGURA 2

Solução:

$$f_x(x, y) = -2x$$
$$f_x(1, 1) = -2$$

Interpretação geométrica

Exemplo 1 Se $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, determine $f_x(1, 1)$ e $f_y(1, 1)$ e interprete esses números como inclinações.

Interpretação geométrica

Exemplo 1 Se $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, determine $f_x(1, 1)$ e $f_y(1, 1)$ e interprete esses números como inclinações.

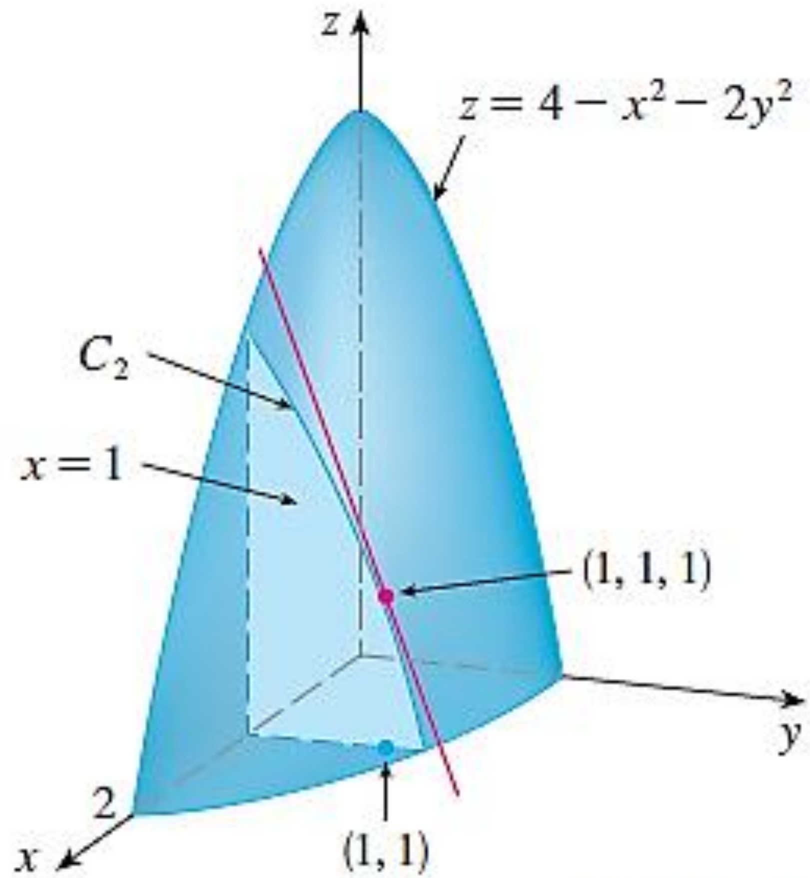


FIGURA 3

Interpretação geométrica

Exemplo 1 Se $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, determine $f_x(1, 1)$ e $f_y(1, 1)$ e interprete esses números como inclinações.

Solução:

$$f_y(x, y) = -4y$$
$$f_y(1, 1) = -4$$

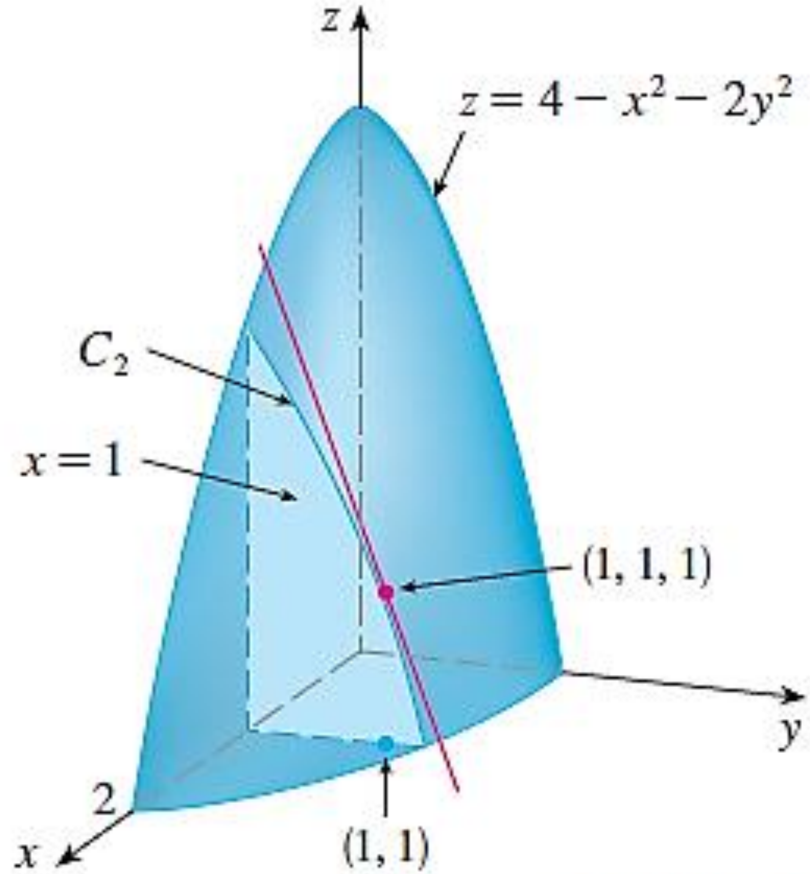


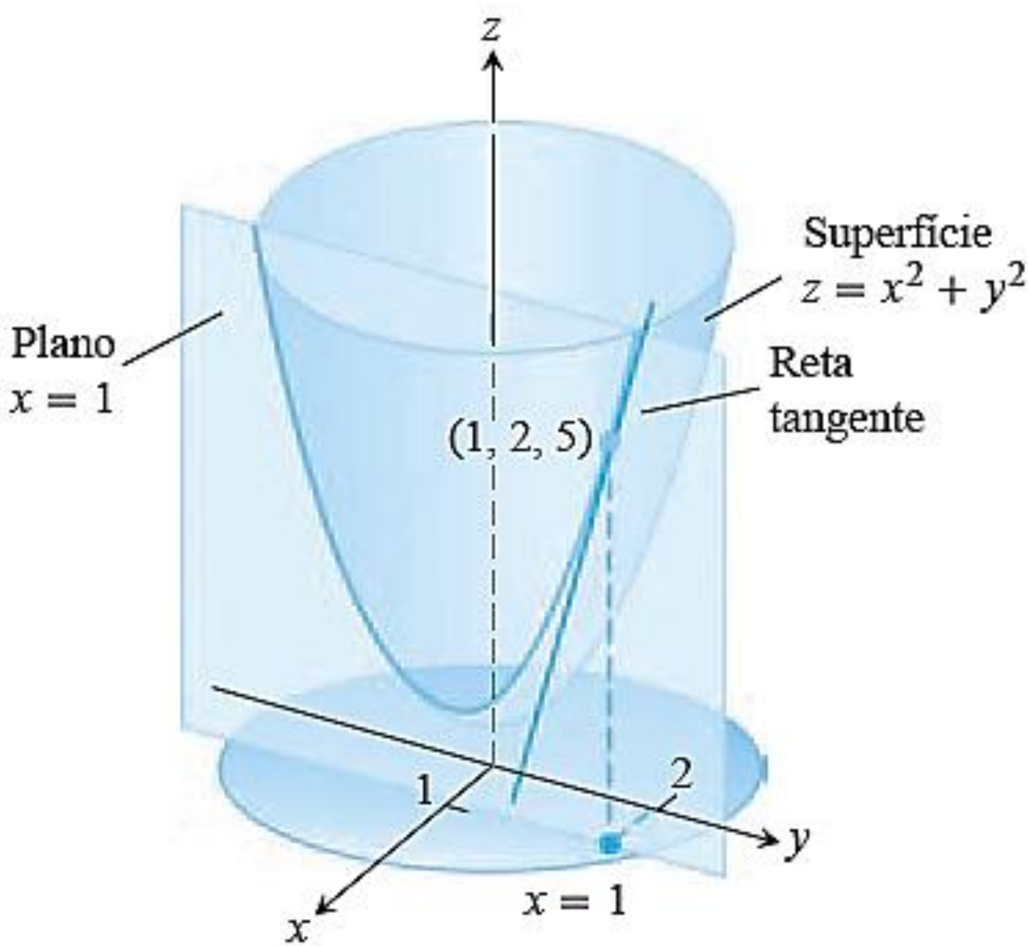
FIGURA 3

Exemplo 2

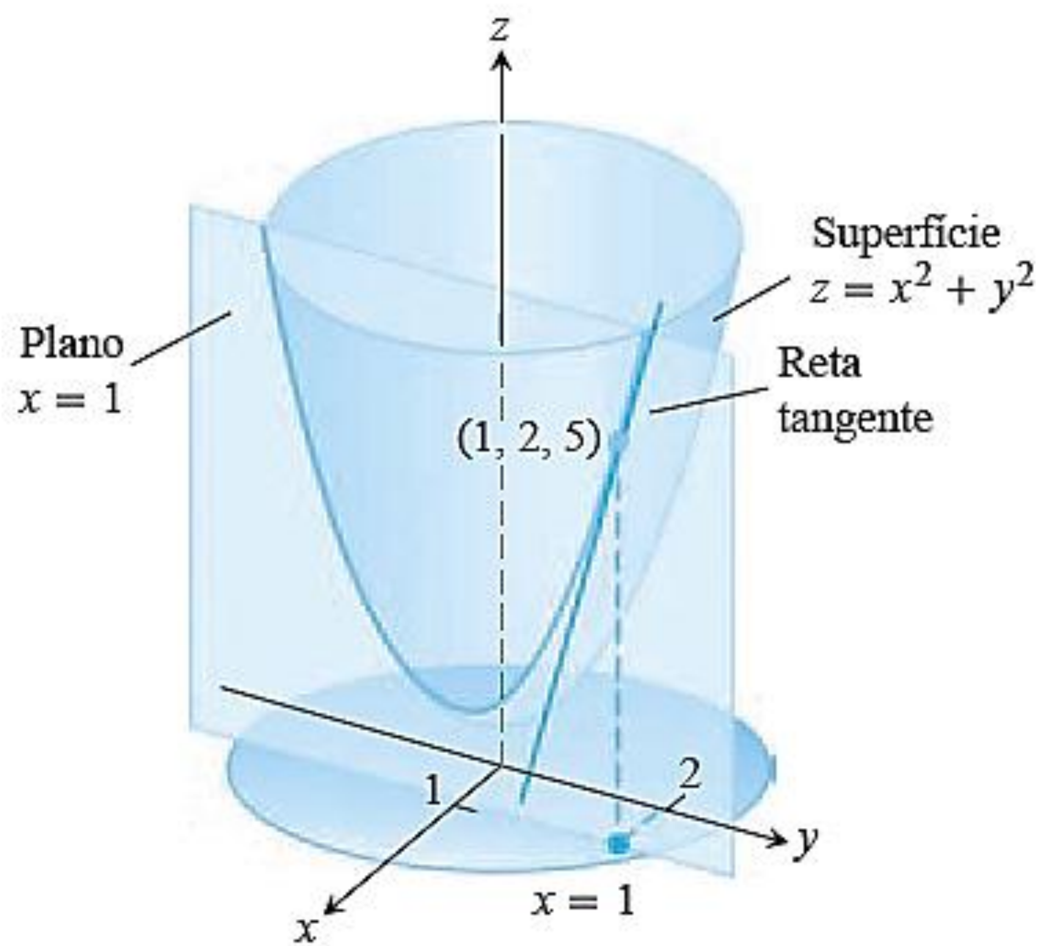
O plano $x = 1$ apresenta interseção com o paraboloide $z = x^2 + y^2$ em uma parábola. Encontre o coeficiente angular da tangente à parábola em $(1, 2, 5)$

Exemplo 2

O plano $x = 1$ apresenta interseção com o paraboloide $z = x^2 + y^2$ em uma parábola. Encontre o coeficiente angular da tangente à parábola em (1, 2, 5)



Exemplo 2 O plano $x = 1$ apresenta interseção com o paraboloide $z = x^2 + y^2$ em uma parábola. Encontre o coeficiente angular da tangente à parábola em (1, 2, 5)

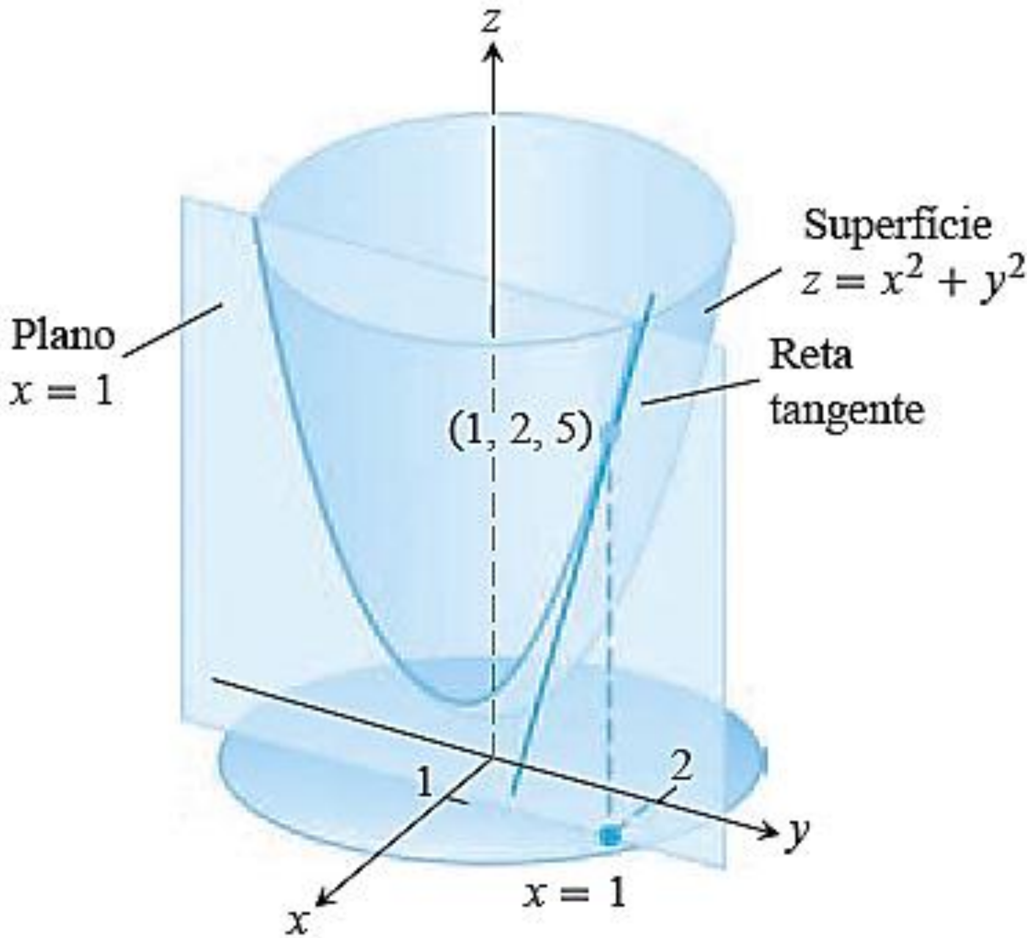


Solução:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = \left.\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)\right|_{(1,2)}$$

Exemplo 2

O plano $x = 1$ apresenta interseção com o paraboloide $z = x^2 + y^2$ em uma parábola. Encontre o coeficiente angular da tangente à parábola em (1, 2, 5)



Solução:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = \left.\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)\right|_{(1,2)}$$

$$= \left.2y\right|_{(1,2)} = 2(2) = 4.$$

Funções de mais de duas variáveis

- As derivadas parciais também podem ser definidas para funções de três ou mais variáveis.

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

Funções de mais de duas variáveis

- As derivadas parciais também podem ser definidas para funções de três ou mais variáveis.

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

- Se *w* = *f* (*x*, *y*, *z*), então $f_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ pode ser interpretada como a taxa de variação de *w* com relação a *x* quando *y* e *z* são mantidos fixos.

Funções de mais de duas variáveis

➢ De modo geral, se *u* é uma função de *n* variáveis:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

Funções de mais de duas variáveis

- De modo geral, se *u* é uma função de *n* variáveis:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

- Que pode ser escrita como:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = f_i = D_i f$$

Funções de mais de duas variáveis

Exemplo 5 Determine f_x, f_y e f_z se $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.

Funções de mais de duas variáveis

Exemplo 5 Determine f_x, f_y e f_z se $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.

Solução:

$$f_x = ye^{xy} \ln z$$

Funções de mais de duas variáveis

Exemplo 5 Determine f_x, f_y e f_z se $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.

Solução:

$$f_x = ye^{xy} \ln z$$

$$f_y = xe^{xy} \ln z$$

Funções de mais de duas variáveis

Exemplo 5 Determine f_x, f_y e f_z se $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.

Solução:

$$f_x = ye^{xy} \ln z$$

$$f_y = xe^{xy} \ln z$$

$$f_z = \frac{e^{xy}}{z}$$

Derivadas de ordem superior

- A derivada de uma função f de duas variáveis é uma nova função também de duas variáveis.

Derivadas de ordem superior

- A derivada de uma função f de duas variáveis é uma nova função também de duas variáveis.
- Desse modo podemos derivá-la novamente .
- Estas derivadas são chamadas derivadas parciais de segunda ordem de f.

Derivadas de ordem superior

- Notações para as derivadas de segunda ordem:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Derivadas de ordem superior

- Notações para as derivadas de segunda ordem:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$$

Derivadas de ordem superior

- Notações para as derivadas de segunda ordem:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$$

Derivadas de ordem superior

- Notações para as derivadas de segunda ordem:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Derivadas de ordem superior

Exemplo 6 Determine as derivadas parciais de $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

Derivadas de ordem superior

Exemplo 6 Determine as derivadas parciais de $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

Solução:

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

Derivadas de ordem superior

Exemplo 6 Determine as derivadas parciais de $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

Solução:

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3$$

Derivadas de ordem superior

Exemplo 6 Determine as derivadas parciais de $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

Solução:

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$$

Derivadas de ordem superior

Exemplo 6 Determine as derivadas parciais de $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

Solução:

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$$

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

Derivadas de ordem superior

Exemplo 6 Determine as derivadas parciais de $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

Solução:

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$$

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2$$

Derivadas de ordem superior

Exemplo 6 Determine as derivadas parciais de $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

Solução:

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$$

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4$$

Derivadas de ordem superior

Exemplo 6 Determine as derivadas parciais de $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

Solução:

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3$$

$$\boxed{f_{xy}} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy^3) \boxed{= 6xy^2}$$

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

$$\boxed{f_{yx}} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) \boxed{= 6xy^2}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4$$

Derivadas de ordem superior

Teorema de Clairaut Suponha que f seja definida em uma bola aberta D que contenha o ponto (a, b). Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em D, então

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

Derivadas de ordem superior

Teorema de Clairaut Suponha que f seja definida em uma bola aberta D que contenha o ponto (a, b). Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em D, então

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

- O Terorema de Clarinaut também é válido para derivadas de ordem três ou mais altas.

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\,\partial x}$$

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

Para depois desta aula:

- Estudar seção 14.3 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

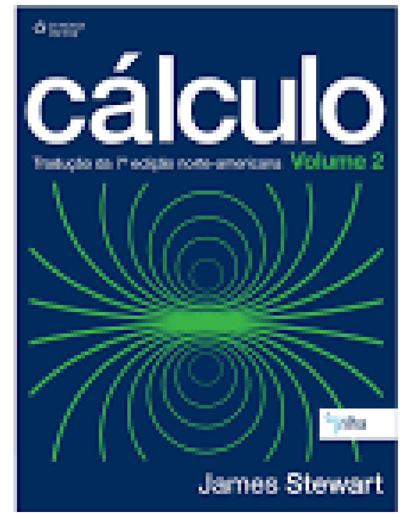
Próxima aula:

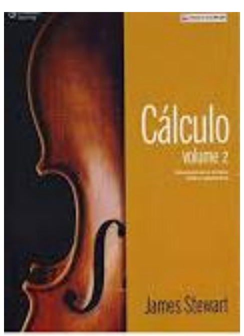
- Plano tangente.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed.





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br