Cálculo I

Licenciatura

Semana 03 - Aula 2
Cálculo de Limites

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Calculando limites

- As técnicas algébricas para o cálculo dos limites são baseadas no desenvolvimento informal realizado na aula anterior;

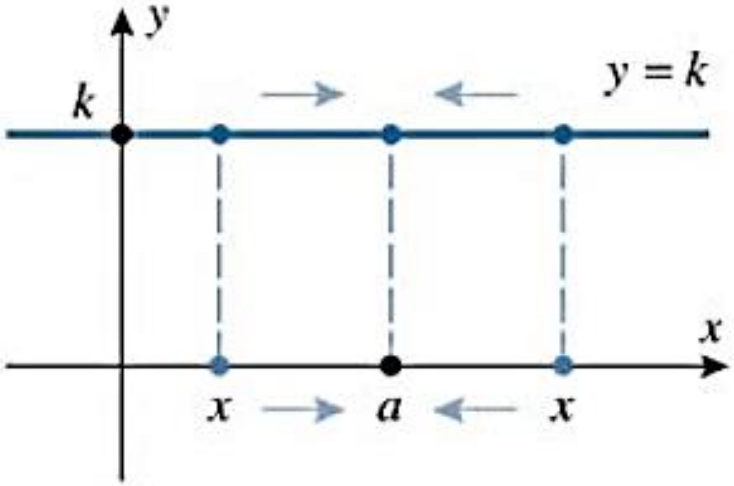
Calculando limites

- As técnicas algébricas para o cálculo dos limites são baseadas no desenvolvimento informal realizado na aula anterior;

- Encontraremos limites de funções simples;

- Esses limites básicos serão utilizados em conjunto para solução de limites em funções mais complicadas

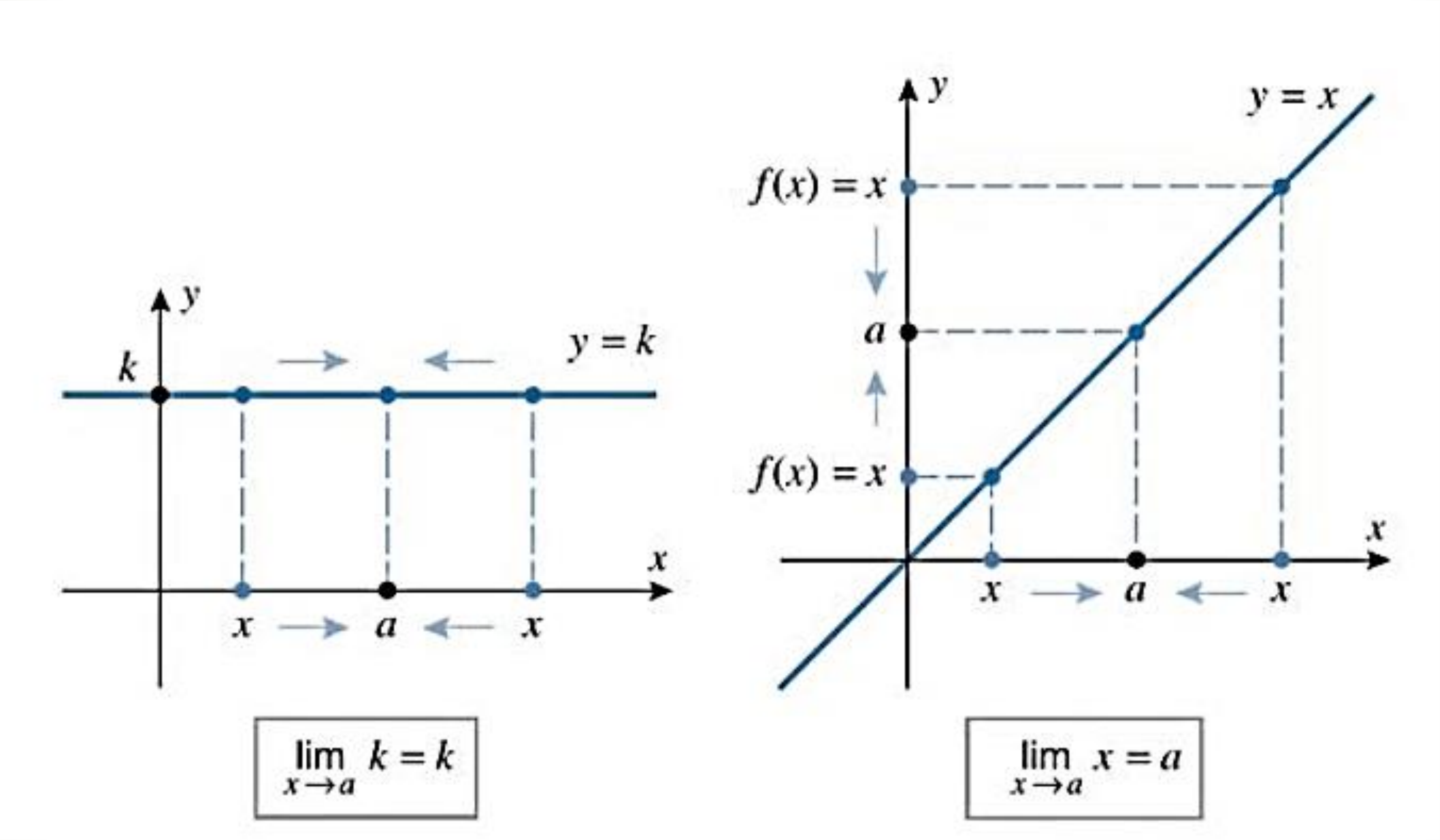
Limites básicos



$$\boxed{\lim_{x \to a} k = k}$$

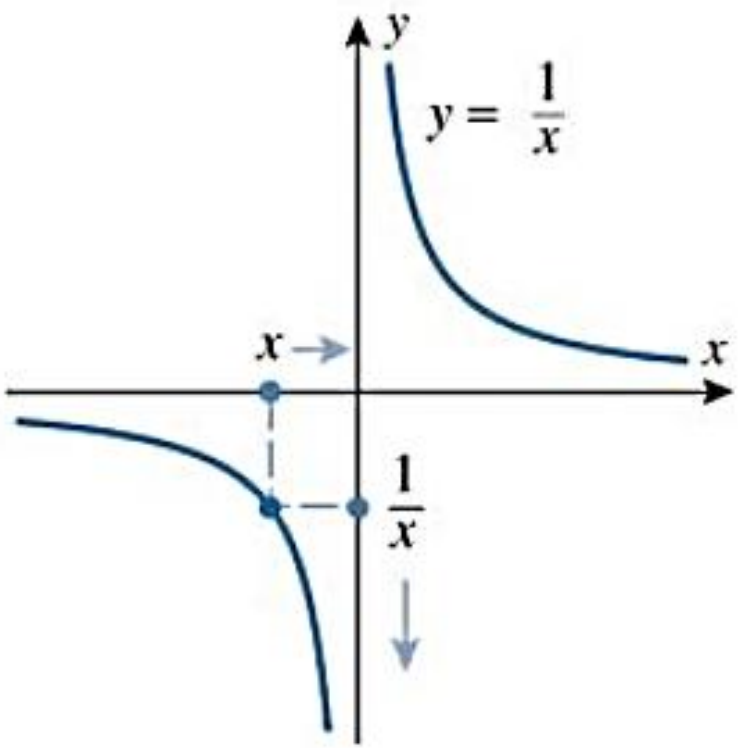
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites básicos



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

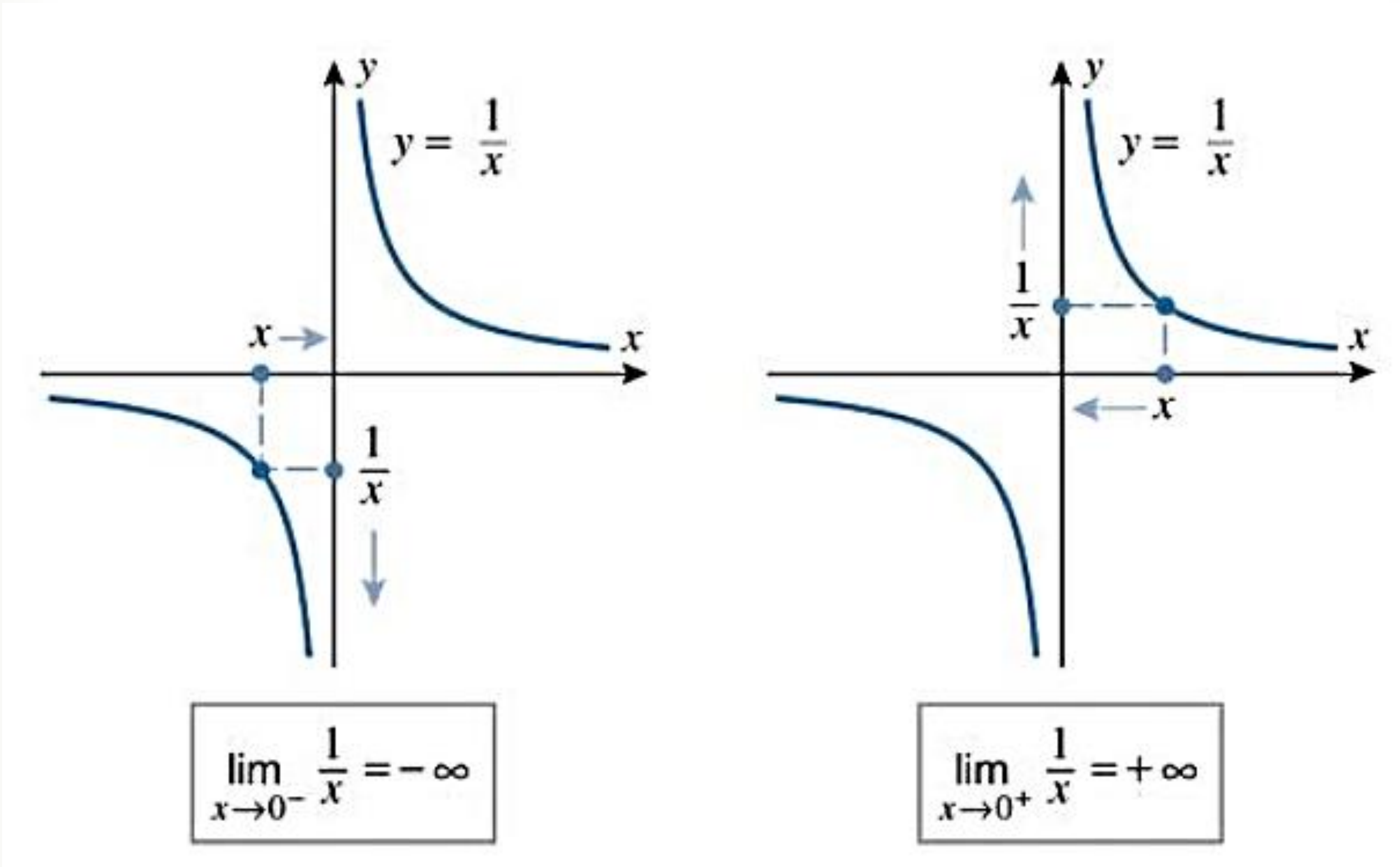
Limites básicos



$$\boxed{\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites básicos



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exercícios

1. $\lim_{x \to -25} 3$

2. $\lim_{x \to 0} 3$

3. $\lim_{x \to \pi} 3$

4. $\lim_{x \to 0} x$

5. $\lim_{x \to -2} x$

6. $\lim_{x \to \pi} x$

Exercícios - solução

1. $\lim_{x \to -25} 3 = 3$

2. $\lim_{x \to 0} 3 = 3$

3. $\lim_{x \to \pi} 3 = 3$

4. $\lim_{x \to 0} x = 0$

5. $\lim_{x \to -2} x = -2$

6. $\lim_{x \to \pi} x = \pi$

1.2.2 TEOREMA *Seja a um número real e suponha que* **2.2.2 na 8ª ed.**

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = L_2$$

ou seja, os limites existem e têm valores L_1 e L_2, respectivamente. Então:

(a) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$

(b) $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L_1 - L_2$

(c) $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = L_1 L_2$

(d) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, *desde que $L_2 \neq 0$*

(e) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$, *desde que $L_1 > 0$ se n for par.*

Além disso, essas afirmações também valem para os limites laterais quando $x \to a^-$ ou $x \to a^+$.

Calculando limites

- Os resultados do teorema valem para um número de funções acima de duas;
  Ex.:

$$\lim_{x\to a}[h(x) + g(x) + f(x)] = \lim_{x\to a} h(x) + \lim_{x\to a} g(x) + \lim_{x\to a} f(x)$$

- Várias partes do teorema podem ser combinadas;
  Ex.:

$$\lim_{x\to a} kg(x) = \lim_{x\to a} k \lim_{x\to a} g(x) = k \lim_{x\to a} g(x)$$

Limite de polinômios e razões

Exemplo 5:

$$\lim_{x \to 5} (x^2 - 4x + 3) =$$

Limite de polinômios e razões

Exemplo 5:

$$\lim_{x \to 5} (x^2 - 4x + 3) =$$

$$= \lim_{x \to 5} x^2 - \lim_{x \to 5} 4x + \lim_{x \to 5} 3$$

Limite de polinômios e razões

Exemplo 5:

$$\lim_{x \to 5} (x^2 - 4x + 3) =$$

$$= \lim_{x \to 5} x^2 - \lim_{x \to 5} 4x + \lim_{x \to 5} 3$$

$$= \left(\lim_{x \to 5} x\right)^2 - 4 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 3$$

Limite de polinômios e razões

Exemplo 5:

$$\lim_{x\to 5} (x^2 - 4x + 3) =$$

$$= \lim_{x\to 5} x^2 - \lim_{x\to 5} 4x + \lim_{x\to 5} 3$$

$$= \left(\lim_{x\to 5} x\right)^2 - 4 \lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 3$$

$$= 5^2 - 4 \times 5 + 3$$

Limite de polinômios e razões

Exemplo 5:

$$\lim_{x \to 5} (x^2 - 4x + 3) =$$

$$= \lim_{x \to 5} x^2 - \lim_{x \to 5} 4x + \lim_{x \to 5} 3$$

$$= \left(\lim_{x \to 5} x\right)^2 - 4 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 3$$

$$= 5^2 - 4 \times 5 + 3$$

$$= 8$$

1.2.3 TEOREMA *Para qualquer polinômio* 2.2.3 na 8ª ed.

$$p(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$$

e qualquer número real a

$$\lim_{x \to a} p(x) = c_0 + c_1a + \cdots + c_na^n = p(a)$$

Exemplo 6

$$\lim_{x \to 1} (x^7 - 2x^5 + 1)^{35} =$$

1.2.3 TEOREMA *Para qualquer polinômio* 2.2.3 na 8ª ed.

$$p(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$$

e qualquer número real a

$$\lim_{x \to a} p(x) = c_0 + c_1a + \cdots + c_na^n = p(a)$$

Exemplo 6

$$\lim_{x \to 1} (x^7 - 2x^5 + 1)^{35} = (1^7 - 2 \times 1^5 + 1)^{35} = 0$$

Exemplo 7

$$\lim_{x \to 2} \frac{5x^3 + 4}{x - 3} =$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 7

$$\lim_{x \to 2} \frac{5x^3 + 4}{x - 3} =$$

$$= \frac{\lim_{x \to 2} 5x^3 + 4}{\lim_{x \to 2} x - 3}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 7

$$\lim_{x \to 2} \frac{5x^3 + 4}{x - 3} =$$

$$= \frac{\lim_{x \to 2} 5x^3 + 4}{\lim_{x \to 2} x - 3}$$

$$= \frac{5 \times 2^3 + 4}{2 - 3}$$

Exemplo 7

$$\lim_{x\to 2} \frac{5x^3+4}{x-3} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to 2} 5x^3+4}{\lim_{x\to 2} x-3}$$

$$= \frac{5\times 2^3+4}{2-3}$$

$$= -44$$

Limites de polinômios e razões

- O método utilizado no exemplo 7 não funciona em funções em que o **limite do denominador é nulo**;

- Podem ocorrer dois casos:

Limites de polinômios e razões

- O método utilizado no exemplo 7 não funciona em funções em que o **limite do denominador é nulo**;

- Podem ocorrer dois casos:
  1. O limite do numerador é diferente de zero;

     (neste caso limite não existe)

Limites de polinômios e razões

- O método utilizado no exemplo 7 não funciona em funções em que o **limite do denominador é nulo**;

- Podem ocorrer dois casos:
  1. O limite do numerador é diferente de zero;

     (neste caso limite não existe)

  2. O limite em ambos, numerador e denominador, são nulos

Exemplo 8

a) $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{2-x}{(x-4)(x+2)} =$

b) $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{2-x}{(x-4)(x+2)} =$

Exemplo 8

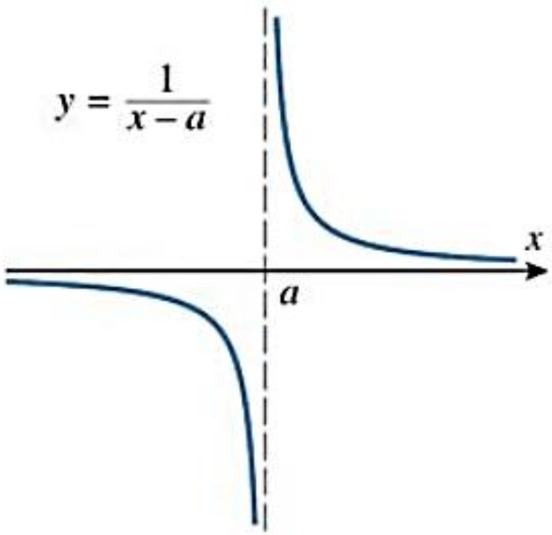
a) $$\lim_{x \to 4^+} \frac{2-x}{(x-4)(x+2)} = -\infty$$

b) $$\lim_{x \to 4^-} \frac{2-x}{(x-4)(x+2)} = +\infty$$

O limite não existe!

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo

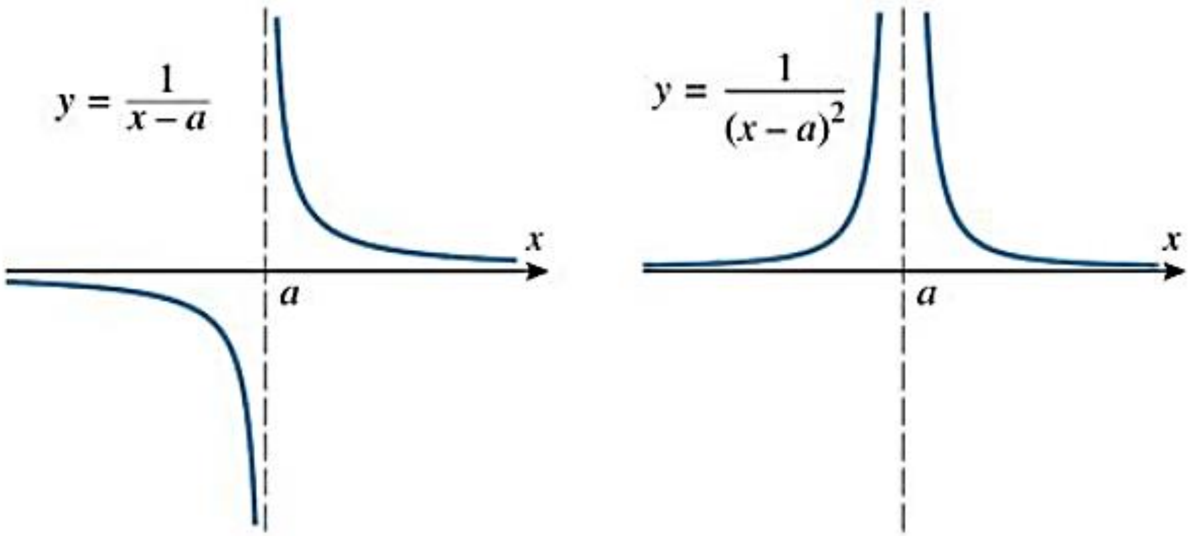


$$\lim_{x \to a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo



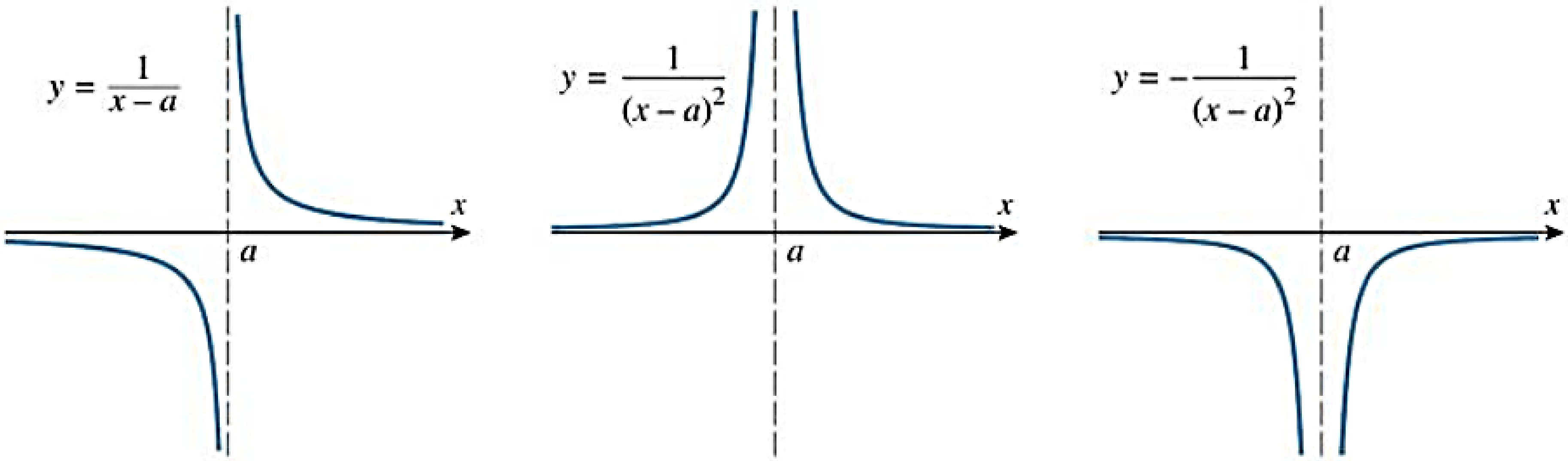
$$\lim_{x \to a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty$$

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo



$$\lim_{x \to a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty$$

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to a} -\frac{1}{(x-a)^2} = -\infty$$

Exemplo 9

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)} =$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 9

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} =$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 9

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} (x + 2)$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 9

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}(x+2)$$

$$= 4$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 10

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{(x - 3)} =$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 10

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{(x-3)} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)^2}{(x-3)} =$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 10

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{(x - 3)} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x - 3)}} =$$

Exemplo 10

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{(x - 3)} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x - 3)}} =$$

$$\lim_{x \to 3} (x - 3) =$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 10

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{(x-3)} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-3)}} =$$

$$\lim_{x \to 3} (x-3) = 0$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

1.2.4 TEOREMA *Sejam*

2.2.4 na 8ª ed.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

uma função racional e a um número real qualquer.

(a) Se $q(a) \neq 0$, então $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

(b) Se $q(a) = 0$, mas $p(a) \neq 0$, então $\lim_{x \to a} f(x)$ não existe.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exercícios – aplicar as propriedades e resolver os limites.

1. $\lim\limits_{x \to 0}(3 - 7x - 5x^2)$

2. $\lim\limits_{x \to 3}(3x^2 - 7x + 2)$

3. $\lim\limits_{x \to -1}[(x + 4)^3 \times (x + 2)^{-1}]$

4. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3+2}{x-2}$

5. $\lim\limits_{t \to 2} \frac{t+3}{t+2}$

6. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x+4}{3x-1}$

Limites envolvendo radicais

Exemplo 11:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} =$$

Limites envolvendo radicais

Exemplo 11:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

Limites envolvendo radicais

Exemplo 11:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)}$$

Limites envolvendo radicais

Exemplo 11:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} (\sqrt{x}+1) =$$

Limites envolvendo radicais

Exemplo 11:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)}$$

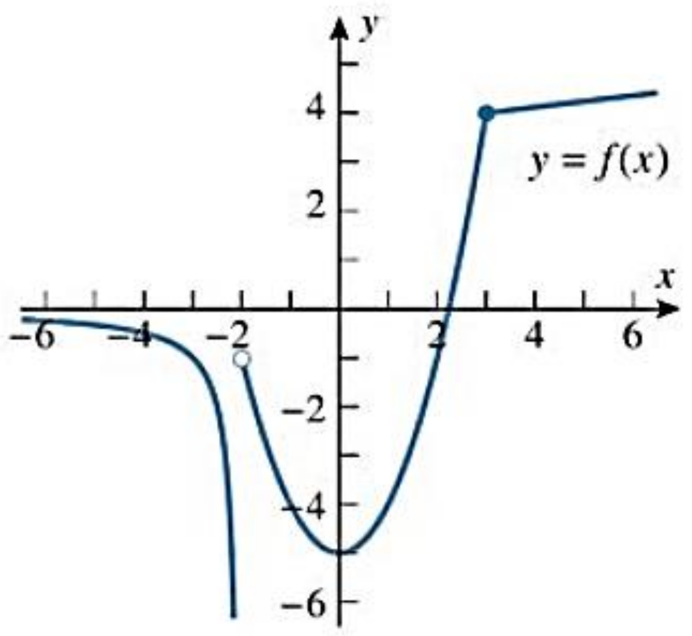
$$= \lim_{x \to 1} (\sqrt{x}+1) = 2 \qquad para\; x \neq 1$$

Limites de funções definidas por partes

- Obter os limites laterais no ponto em que a função se altera.

Exemplo 12:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+2)}, x < -2 \\ x^2 - 5, -2 < x \leq 3 \\ \sqrt{x+13}, x > 3 \end{cases}$$



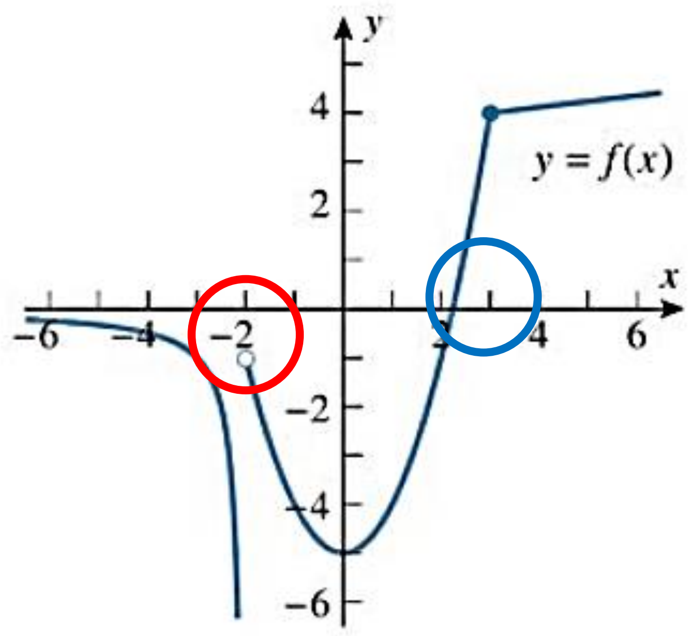
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites de funções definidas por partes

- Obter os limites laterais no ponto em que a função se altera.

Exemplo 12:

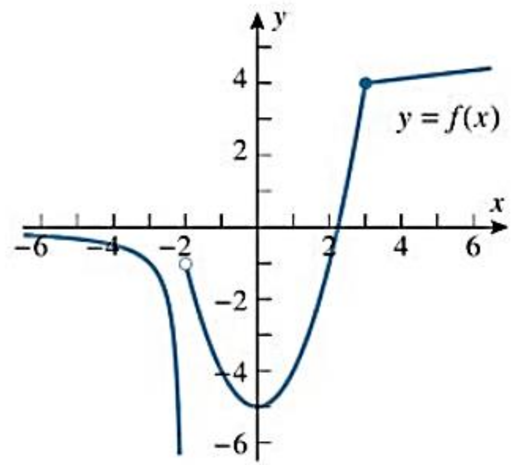
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+2)}, x < -2 \\ x^2 - 5, -2 < x \leq 3 \\ \sqrt{x+13}, x > 3 \end{cases}$$



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites de funções definidas por partes

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{(x+2)} = -\infty$$



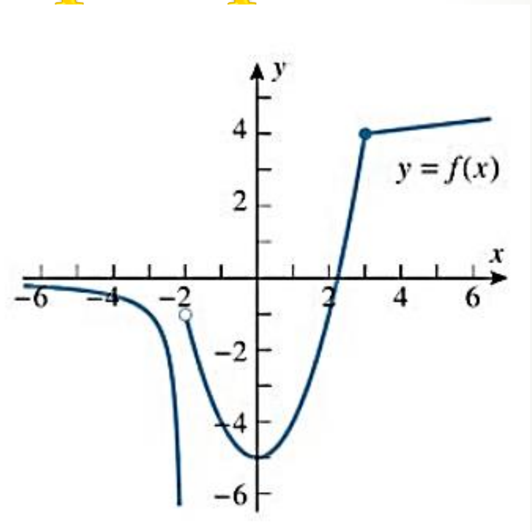
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+2)}, x < -2 \\ x^2 - 5, -2 < x \leq 3 \\ \sqrt{x+13}, x > 3 \end{cases}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites de funções definidas por partes

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{(x+2)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} (x^2 - 5) = -1$$



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+2)}, x < -2 \\ x^2 - 5, -2 < x \leq 3 \\ \sqrt{x+13}, x > 3 \end{cases}$$

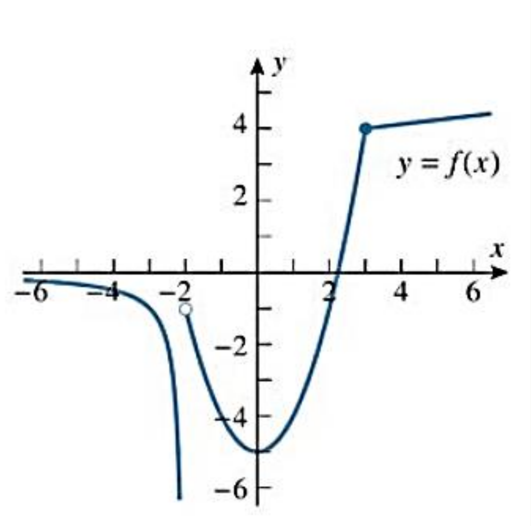
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites de funções definidas por partes

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{(x+2)} = -\infty$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to -2} f(x) = \nexists$$

$$\lim_{x\to -2^+} (x^2 - 5) = -1$$



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+2)}, x < -2 \\ x^2 - 5, -2 < x \leq 3 \\ \sqrt{x+13}, x > 3 \end{cases}$$

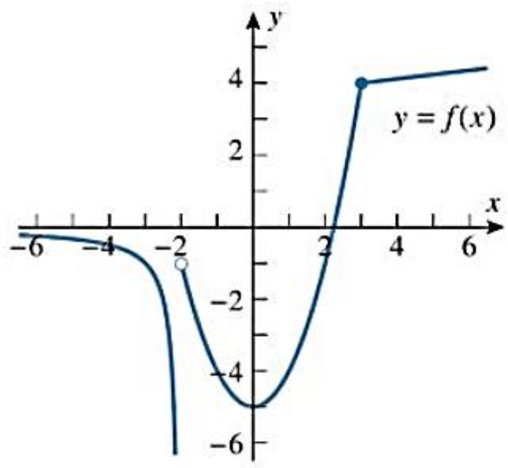
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites de funções definidas por partes

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{(x+2)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} (x^2 - 5) = -1$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to -2} f(x) = \nexists$$



$$\lim_{x\to 3^-} (x^2 - 5) = 4$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+2)}, x < -2 \\ x^2 - 5, -2 < x \leq 3 \\ \sqrt{x+13}, x > 3 \end{cases}$$

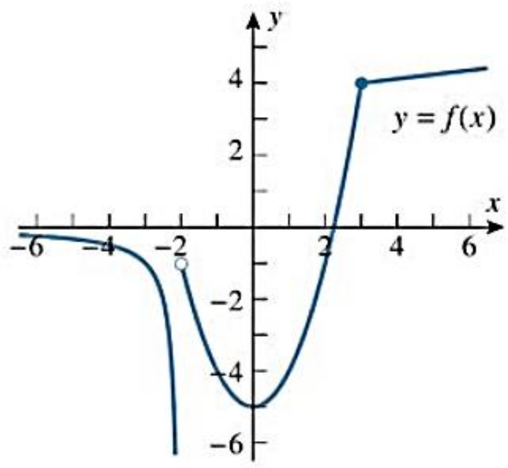
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites de funções definidas por partes

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{(x+2)} = -\infty$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\lim_{x\to -2} f(x) = \nexists}$$

$$\lim_{x\to -2^+} (x^2-5) = -1$$



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+2)}, x < -2 \\ x^2 - 5, -2 < x \leq 3 \\ \sqrt{x+13}, x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3^-} (x^2-5) = 4$$

$$\lim_{x\to 3^+} \sqrt{x+13} = 4$$

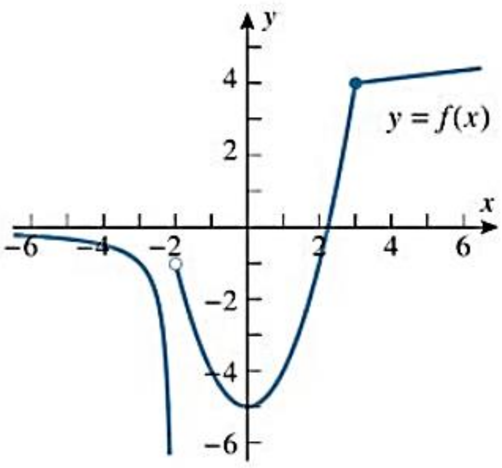
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites de funções definidas por partes

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{1}{(x+2)} = -\infty$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\lim_{x \to -2} f(x) = \nexists}$$

$$\lim_{x \to -2^+} (x^2 - 5) = -1$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+2)}, x < -2 \\ x^2 - 5, -2 < x \leq 3 \\ \sqrt{x+13}, x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 3^-} (x^2 - 5) = 4$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\lim_{x \to 3} f(x) = 4}$$

$$\lim_{x \to 3^+} \sqrt{x+13} = 4$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

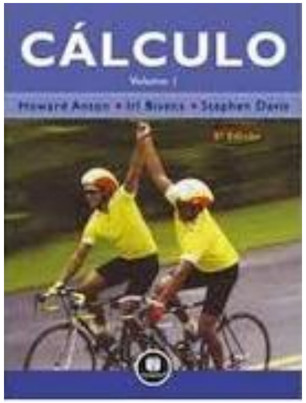
Para depois desta aula:

- Reler o capítulo do livro texto (Howard).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Realizar a lista de exercícios.

Próxima aula:

- Limites no infinito

Bibliografia



1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.

Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br