Cálculo I

Licenciatura

Semana 04 - Aula 1
Limites no infinito

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

Limites no infinito

- Neste tipo de limite é estudado o comportamento final da função.

- Em outras palavras nos extremos da curva.

Limites no infinito

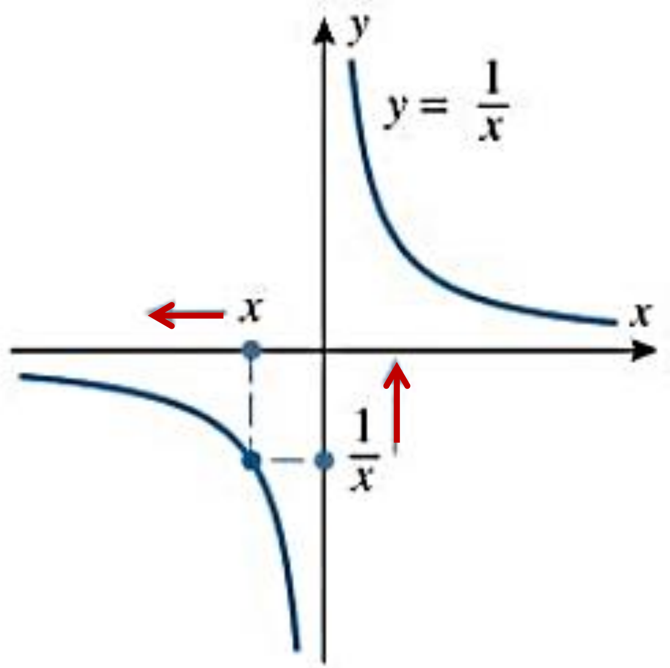
- Neste tipo de limite é estudado o comportamento final da função.

- Em outras palavras nos extremos da curva.

- Os limites no infinito avaliam o comportamento de uma função $f(x)$ quando x cresce ou decresce sem parar.

Limites no infinito

Exemplo: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

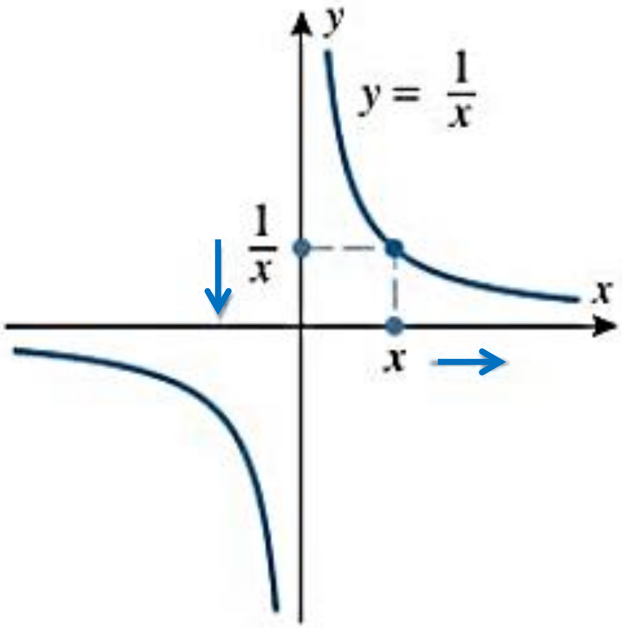


$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites no infinito

Exemplo: $f(x) = \frac{1}{x}$

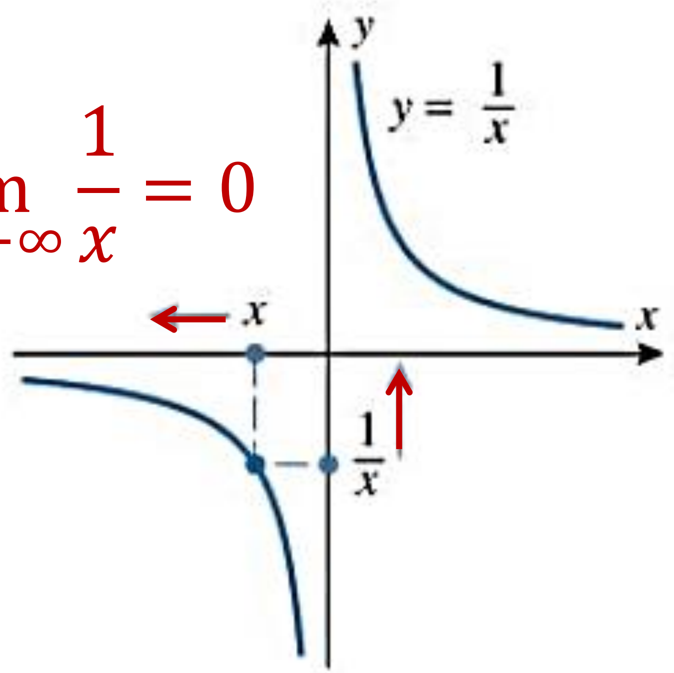


$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

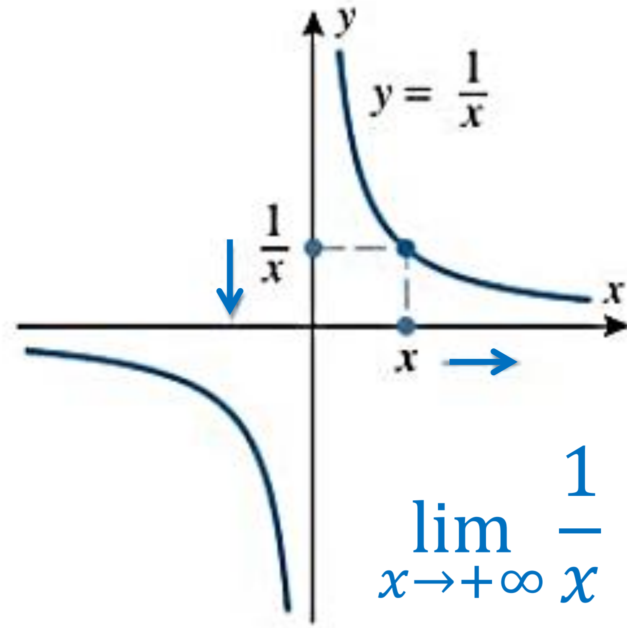
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites no infinito

Exemplo: $f(x) = \dfrac{1}{x}$



$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Se x decresce sem parar: $x \to -\infty$

Se x cresce sem parar: $x \to +\infty$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

2.3.1 na 8ª ed.

1.3.1 LIMITES NO INFINITO (PONTO DE VISTA INFORMAL) Se os valores de $f(x)$ ficam tão próximos quanto queiramos de um número L à medida que x cresce sem cota, então escrevemos

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad f(x) \to L \text{ quando } x \to +\infty} \qquad (3)$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

1.3.1 LIMITES NO INFINITO (PONTO DE VISTA INFORMAL) Se os valores de $f(x)$ ficam tão próximos quanto queiramos de um número L à medida que x cresce sem cota, então escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad f(x) \to L \text{ quando } x \to +\infty \tag{3}$$

Analogamente, se os valores de $f(x)$ ficam tão próximos quanto queiramos de um número L à medida que x decresce sem cota, então escrevemos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad f(x) \to L \text{ quando } x \to -\infty \tag{4}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

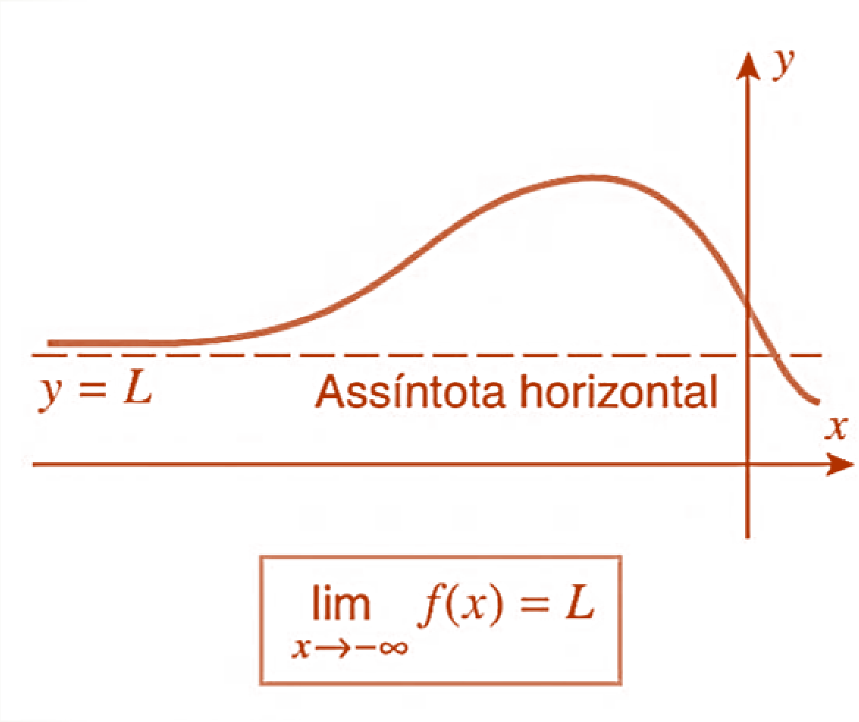
Limites no infinito

- A Figura ilustra o comportamento final de uma função f quando: $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites no infinito

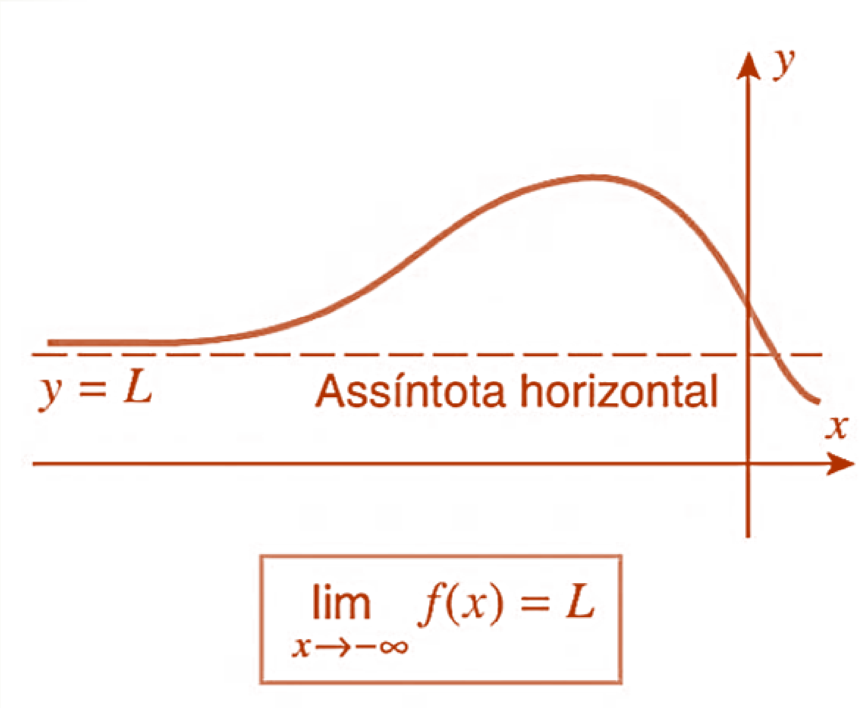
- A Figura ilustra o comportamento final de uma função f quando: $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$.

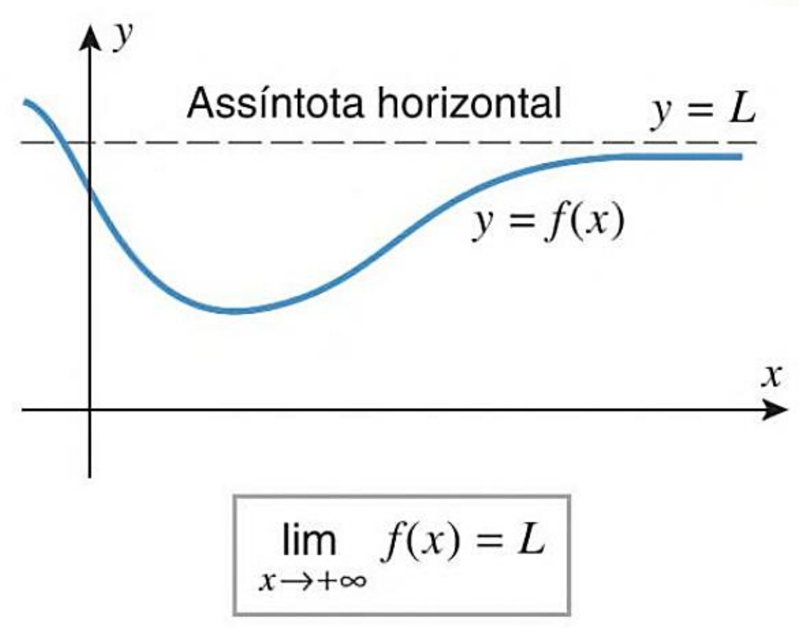


Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites no infinito

- A Figura ilustra o comportamento final de uma função f quando: $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$.

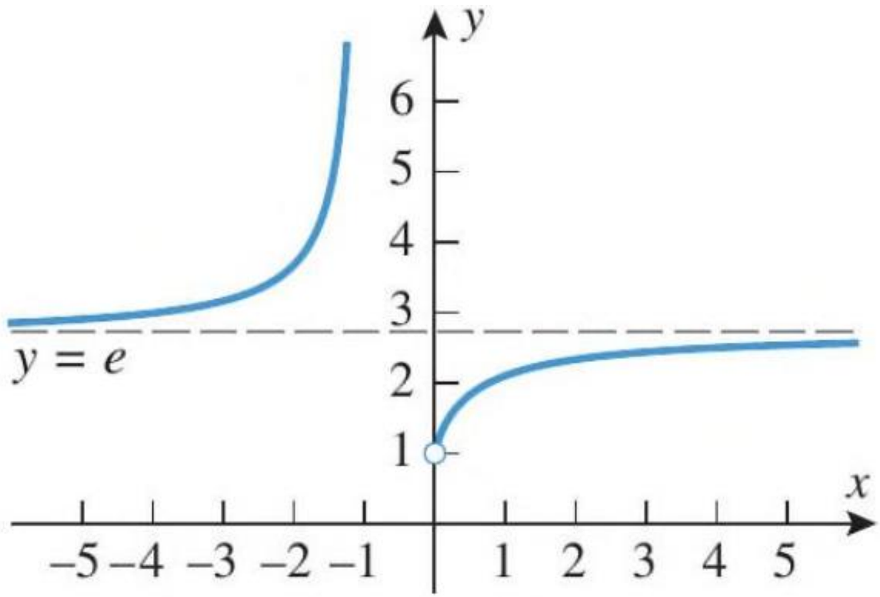




Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limite no infinito

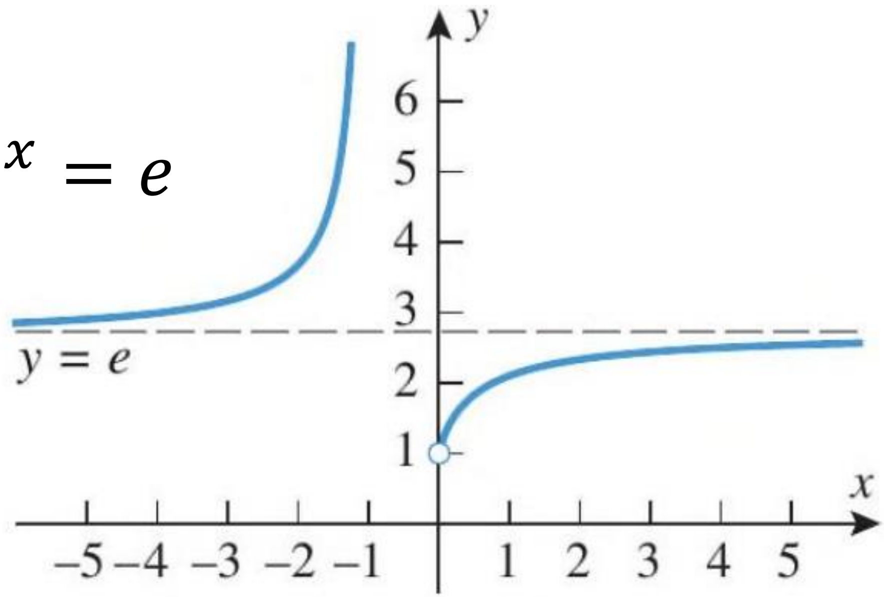
Exemplo 3: $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$



Limite no infinito

Exemplo 3: $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$

$$\lim_{x \to -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$



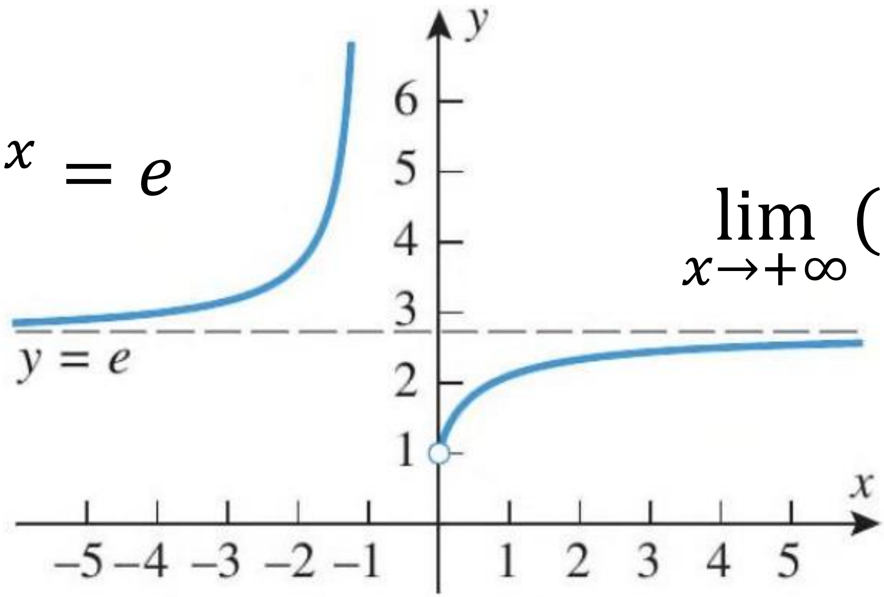
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limite no infinito

Exemplo 3: $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$

$$\lim_{x \to -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

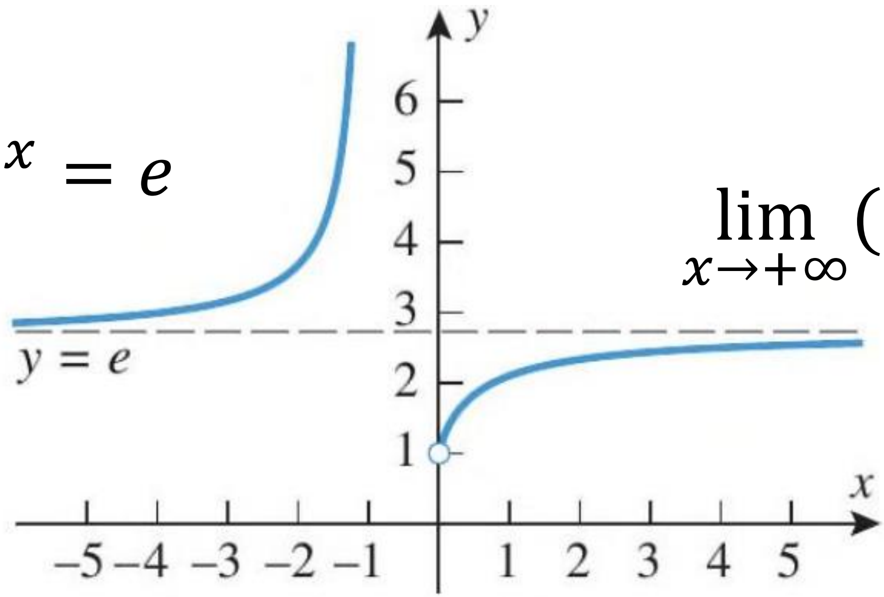


Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limite no infinito

Exemplo 3: $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$

$$\lim_{x \to -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$



$$\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

$e = 2{,}7182\ldots$ (número irracional)

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Regras para limites no infinito

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x) \right)^n$$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) \right)^n$$

Regras para limites no infinito

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x) \right)^n$$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) \right)^n$$

$$\lim_{x \to -\infty} kf(x) = k \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} kf(x) = k \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

Regras para limites no infinito

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x) \right)^n$$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) \right)^n$$

$$\lim_{x \to -\infty} kf(x) = k \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} kf(x) = k \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} k = k$$

$$\lim_{x \to -\infty} k = k$$

Regras para limites no infinito

Exemplo 4:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n}$

Regras para limites no infinito

Exemplo 4:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} (\frac{1}{x})^n$

Regras para limites no infinito

Exemplo 4:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{1}{x})^n = [\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}]^n$

Regras para limites no infinito

Exemplo 4:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} (\frac{1}{x})^n = [\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}]^n = 0$

Limites infinitos no infinito

- O limite no infinito pode deixar de existir, assim como no limite em um número real;

Limites infinitos no infinito

- O limite no infinito pode deixar de existir, assim como no limite em um número real;

- Assim, $f(x)$ cresce sem cota quando $x \to -\infty$ ou $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Limites infinitos no infinito

- O limite no infinito pode deixar de existir, assim como no limite em um número real;

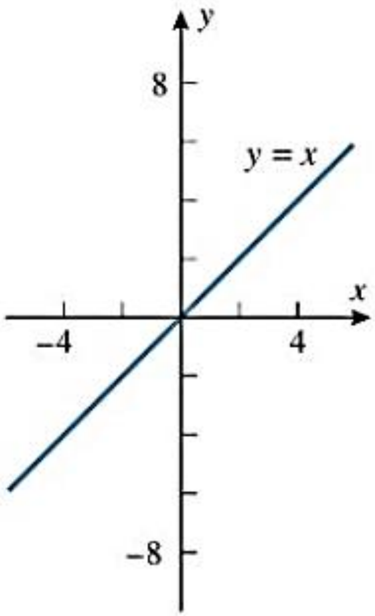
- Assim, $f(x)$ cresce sem cota quando $x \to -\infty$ ou $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- Se $f(x)$ decresce sem cota quando $x \to -\infty$ ou $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

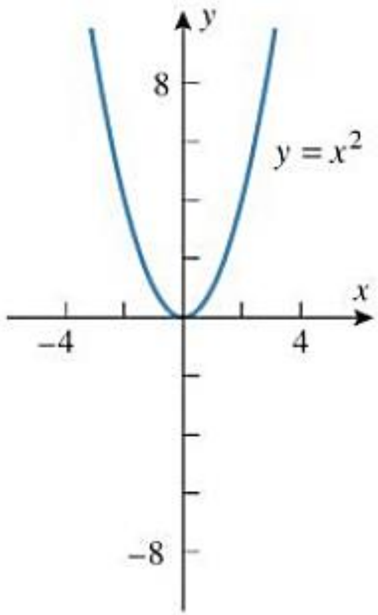
Limites de x^n quando $x \to \pm\infty$



$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites de x^n quando $x \to \pm\infty$

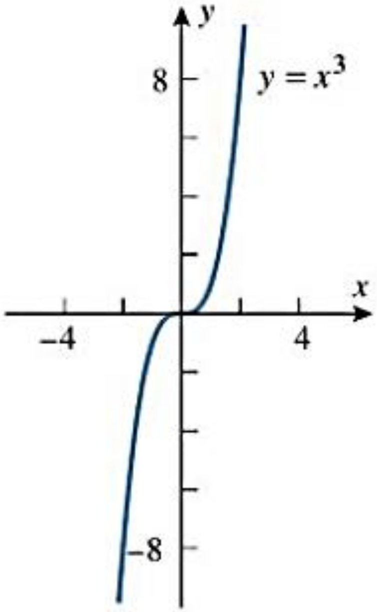


$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

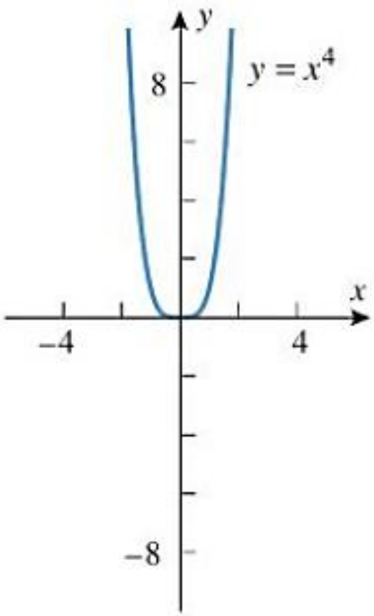
Limites de x^n quando $x \to \pm\infty$



$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites de x^n quando $x \to \pm\infty$

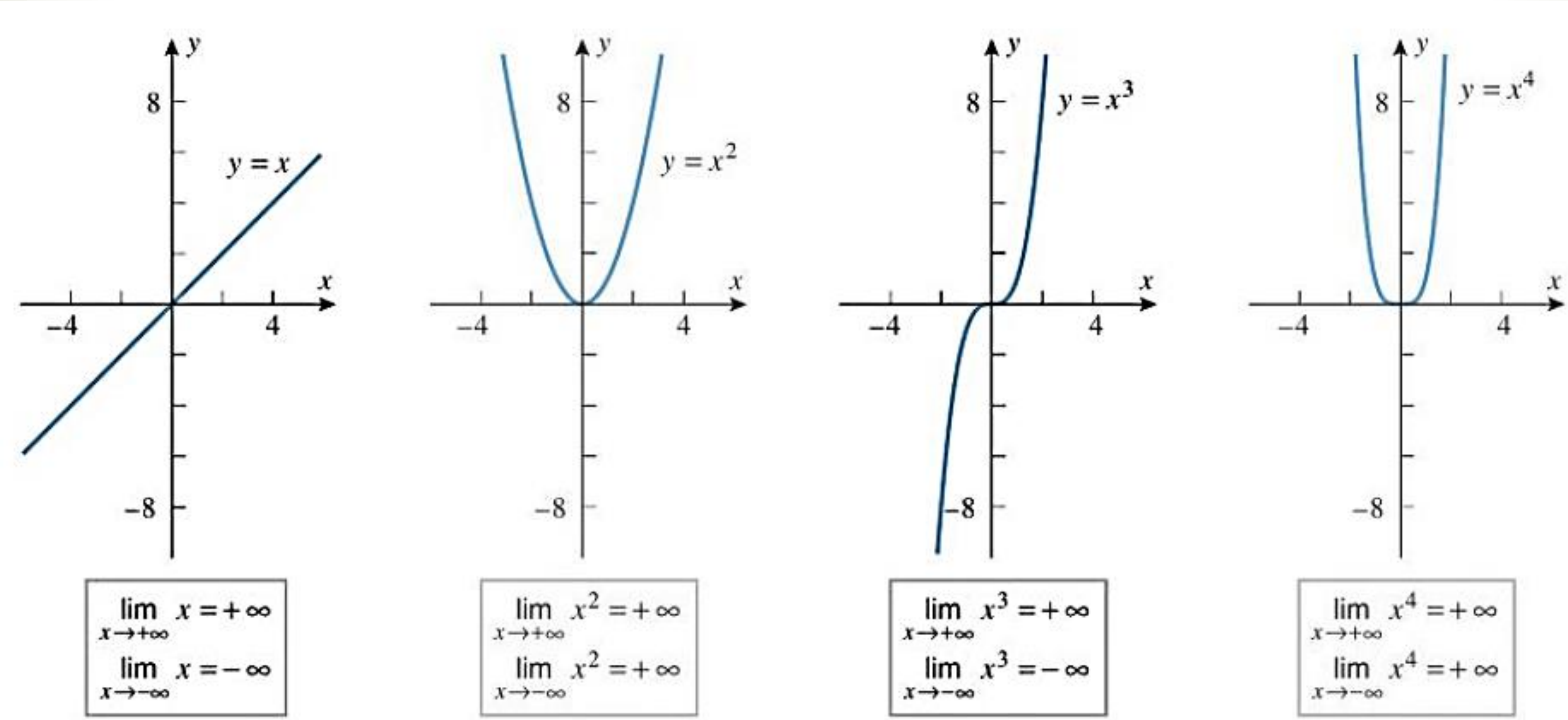


$$\lim_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites de x^n quando $x \to \pm\infty$



$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \quad se\ n = 1,2,3 \ldots.$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} -\infty, se\ n = 1,3,5 \ldots (ímpar) \\ +\infty, se\ n = 2,4,6\ \ldots (par) \end{cases}$$

Regras para limites no infinito

Exemplo 5:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^5 =$ $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x^5 =$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} -7x^6 =$ $\lim\limits_{x \to -\infty} -7x^6 =$

Regras para limites no infinito

Exemplo 5:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^5 = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x^5 = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} -7x^6 = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} -7x^6 = -\infty$

Limites de polinômios quando $x \to \pm\infty$

- O comportamento final de um polinômio coincide com o comportamento final do termo de maior grau:

$$\lim_{x \to \infty} (C_0 + C_1 x + \cdots + C_n x^n) = \lim_{x \to \infty} C_n x^n$$

Limites de polinômios quando $x \to \pm\infty$

Exemplo 5:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (7x^5 - 4x^3 + 2x - 9) =$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (4x^8 + 17x^3 - 2x + 1) =$

Limites de polinômios quando $x \to \pm\infty$

Exemplo 5:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (7x^5 - 4x^3 + 2x - 9) = \lim\limits_{x \to -\infty} 7x^5 = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (4x^8 + 17x^3 - 2x + 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} 4x^8 = +\infty$

Limites no infinito de funções racionais

- **Técnica para simplificar cálculos**:

  "Dividir cada termo do numerador e do denominador pela maior potência de x que ocorre no denominador."

Exemplo 7:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+5}{6x-8} =$$

Limites no infinito de funções racionais

- **Técnica para simplificar cálculos**:

  "Dividir cada termo do numerador e do denominador pela maior potência de x que ocorre no denominador."

Exemplo 7:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+5}{6x-8} =$$

Maior grau do denominador

Limites no infinito de funções racionais

- **Técnica para simplificar cálculos**:

  "Dividir cada termo do numerador e do denominador pela maior potência de x que ocorre no denominador."

Exemplo 7:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+5}{6x-8} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{6x}{x}-\frac{8}{x}} =$$

Limites no infinito de funções racionais

- **Técnica para simplificar cálculos**:

  "Dividir cada termo do numerador e do denominador pela maior potência de x que ocorre no denominador."

Exemplo 7:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5}{6x-8} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{6x}{x}-\frac{8}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{5}{x}}{6-\frac{8}{x}} =$$

Limites no infinito de funções racionais

- **Técnica para simplificar cálculos**:

"Dividir cada termo do numerador e do denominador pela maior potência de x que ocorre no denominador."

Exemplo 7:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5}{6x-8} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{6x}{x}-\frac{8}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{5}{x}}{6-\frac{8}{x}} = \frac{3+0}{6-0} = \frac{1}{2}$$

Limites no infinito de funções racionais

Exemplo 8:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - x}{2x^3 - 5}$$

Limites no infinito de funções racionais

Exemplo 8:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - x}{2x^3 - 5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{4x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{5}{x^3}} =$$

Limites no infinito de funções racionais

Exemplo 8:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-x}{2x^3-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{4x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{5}{x^3}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{5}{x^3}} = 0$$

Limites no infinito de funções racionais

Exercício:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 1}{1 - 3x}$$

Método rápido para limites no infinito de funções racionais

- O comportamento final de uma função racional coincide com o comportamento final do quociente do termo de maior grau do numerador dividido pelo termo de maior grau do denominador.

Exemplo 10:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x+5}{6x-8} =$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x^2-x}{2x^3-5} =$

Método rápido para limites no infinito de funções racionais

- O comportamento final de uma função racional coincide com o comportamento final do quociente do termo de maior grau do numerador dividido pelo termo de maior grau do denominador.

Exemplo 10:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x+5}{6x-8} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x}{6x} = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x^2-x}{2x^3-5} =$

Método rápido para limites no infinito de funções racionais

➢ O comportamento final de uma função racional coincide com o comportamento final do quociente do termo de maior grau do numerador dividido pelo termo de maior grau do denominador.

Exemplo 10:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x+5}{6x-8} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{6x} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2-x}{2x^3-5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2}{2x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{2x} = 0$

Limites no infinito envolvendo radicais

Exemplo 11: $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{3x+5}{6x-8}} =$

Exemplo 12:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} =$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} =$

Limites no infinito envolvendo radicais

Exemplo 11: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{3x+5}{6x-8}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\ (Verifique)$

Exemplo 12:

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}=$

$b)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}=$

Limites no infinito envolvendo radicais

Exemplo 11: $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{3x+5}{6x-8}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$ $(Verifique)$

Exemplo 12:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{|x|}{x} \dfrac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{(3-\frac{6}{x})}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x|}{x} \dfrac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{(3-\frac{6}{x})}$

Limites no infinito envolvendo radicais

Exemplo 11: $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{3x+5}{6x-8}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ $(Verifique)$

Exemplo 12:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|}{x} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{(3-\frac{6}{x})} = \lim_{x\to+\infty} (1) \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{(3-\frac{6}{x})}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{(3-\frac{6}{x})} = \lim_{x\to-\infty} (-1) \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{(3-\frac{6}{x})}$

Limites no infinito envolvendo radicais

Exemplo 11: $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{3x+5}{6x-8}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\ (Verifique)$

Exemplo 12:

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|}{x}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{(3-\frac{6}{x})}=\lim_{x\to+\infty}(1)\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{(3-\frac{6}{x})}=\frac{1}{3}$

b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{(3-\frac{6}{x})}=\lim_{x\to-\infty}(-1)\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{(3-\frac{6}{x})}=-\frac{1}{3}$

Limites no infinito envolvendo radicais

Exercício: encontrar o limite aplicando conjugado.

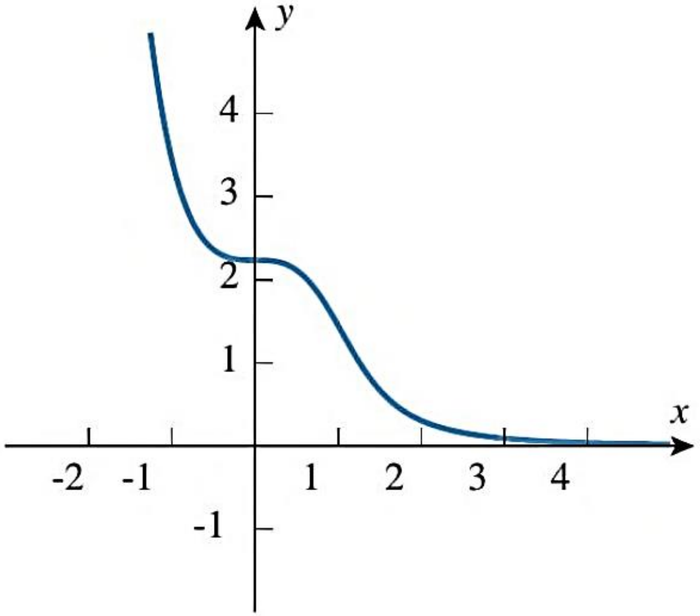
Resp.: 0

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^6 + 5} - x^3 =$$

Limites no infinito envolvendo radicais

Exercício :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^6 + 5} - x^3 =$$

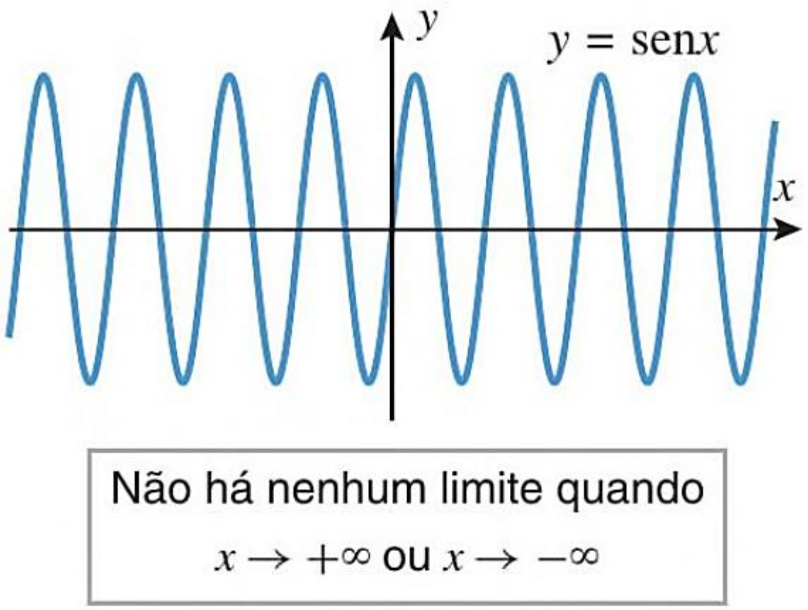


$$y = \sqrt{x^6 + 5} - x^3$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Comportamento final de funções trigonométricas

- Na maioria dos casos, as funções trigonométricas deixam de possuir limites quando $x \to -\infty$ ou $x \to +\infty$.



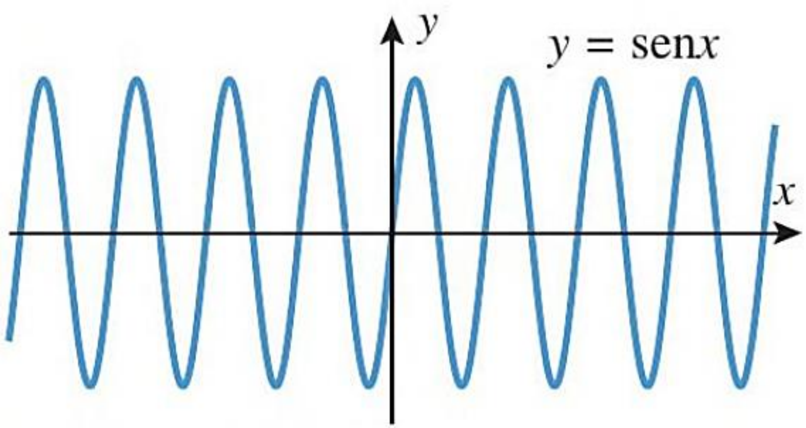
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Comportamento final de funções trigonométricas

- Na maioria dos casos, as funções trigonométricas deixam de possuir limites quando $x \to -\infty$ ou $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} sen x = \nexists$$

$$\lim_{x \to -\infty} sen x = \nexists$$

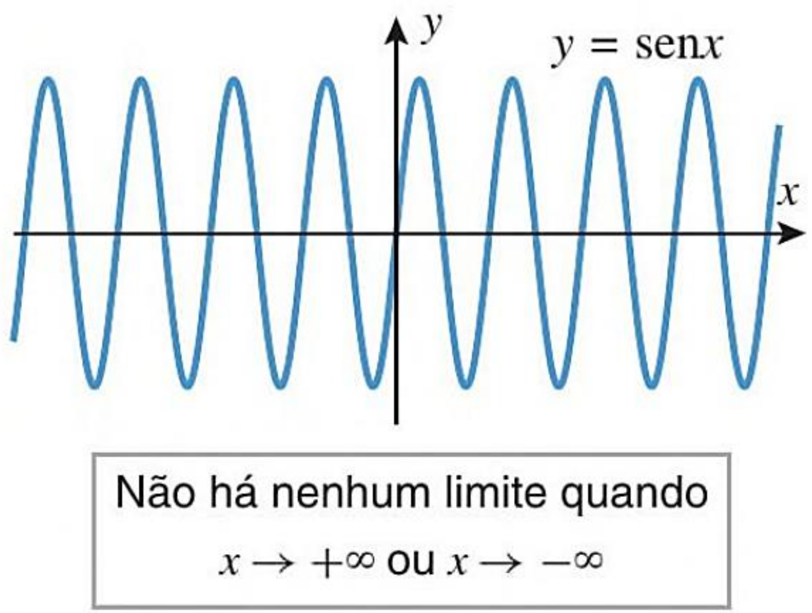


Não há nenhum limite quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Comportamento final de funções trigonométricas

- Na maioria dos casos, as funções trigonométricas deixam de possuir limites quando $x \to -\infty$ ou $x \to +\infty$.



$$\lim_{x \to +\infty} sen x = \nexists$$

$$\lim_{x \to -\infty} sen x = \nexists$$

$$\lim_{x \to +\infty} cos x = \nexists$$

$$\lim_{x \to -\infty} cos x = \nexists$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Comportamento final de funções exponenciais e logarítmicas

- Funções exponenciais e logarítmicas crescem sem cota quando $x \to +\infty$.

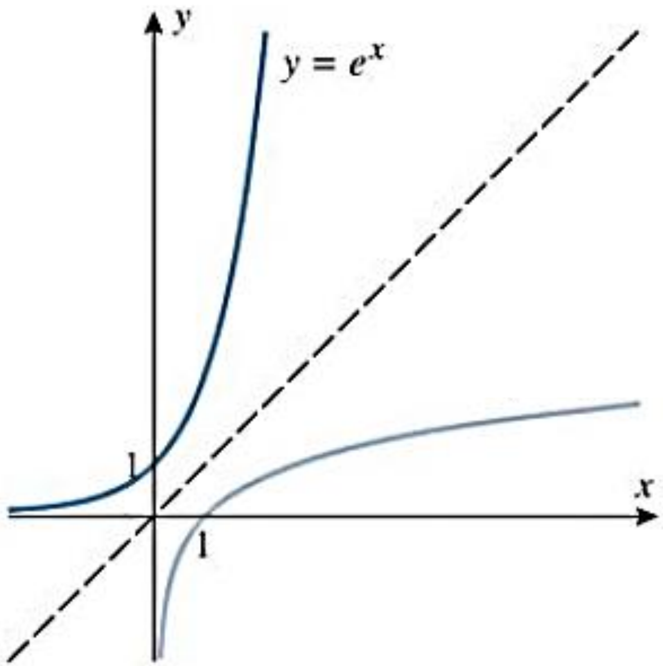


Figura 1.3.8

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Comportamento final de funções exponenciais e logarítmicas

- Funções exponenciais e logarítmicas crescem sem cota quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

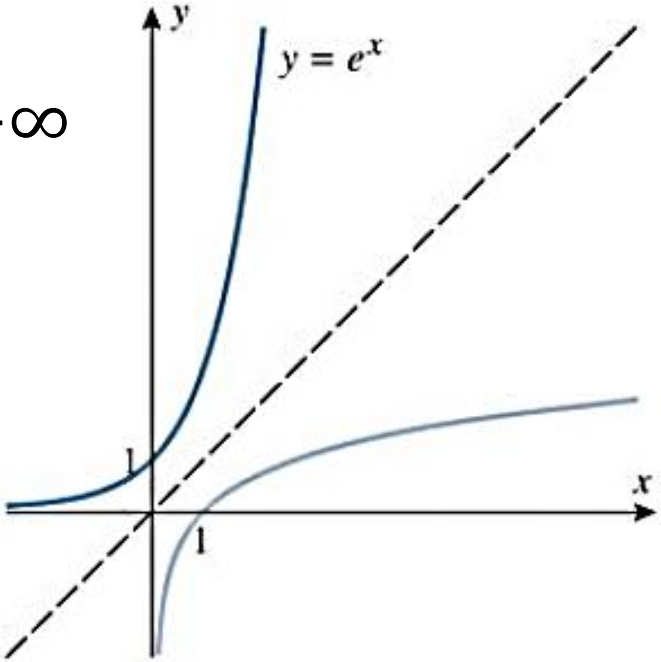


Figura 1.3.8

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Comportamento final de funções exponenciais e logarítmicas

- Funções exponenciais e logarítmicas crescem sem cota quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

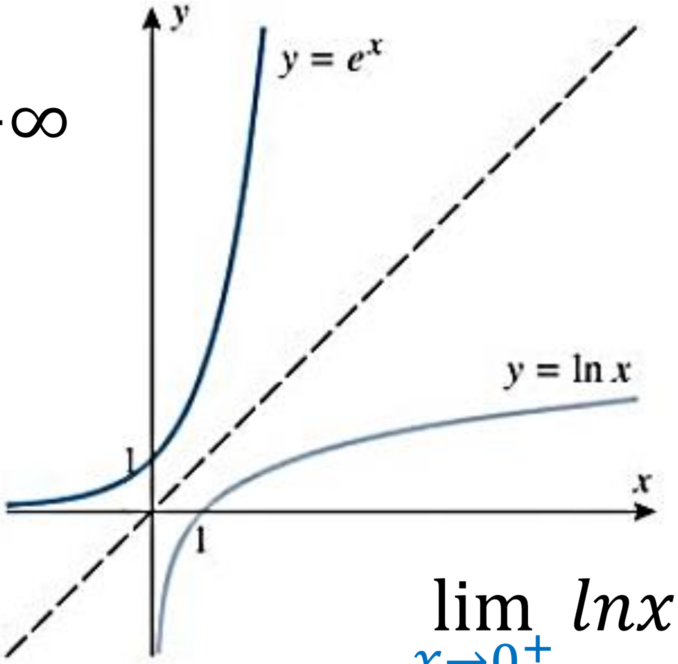


Figura 1.3.8

$$\lim_{x\to+\infty} lnx = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} lnx = -\infty$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Para depois desta aula:

- Reler o capítulo do livro texto (Howard).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Realizar a lista de exercícios.

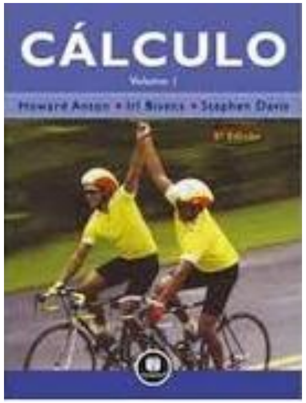
Próxima aula:

- Continuidade

Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br