Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 04 - Aula 2
Diferenciais

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

Diferenciais

- Para uma função de uma única variável $y = f(x)$, definimos a diferencial dx como uma variável independente.

- A diferencial de y é definida como:

$$dy = f'(x)\,dx$$

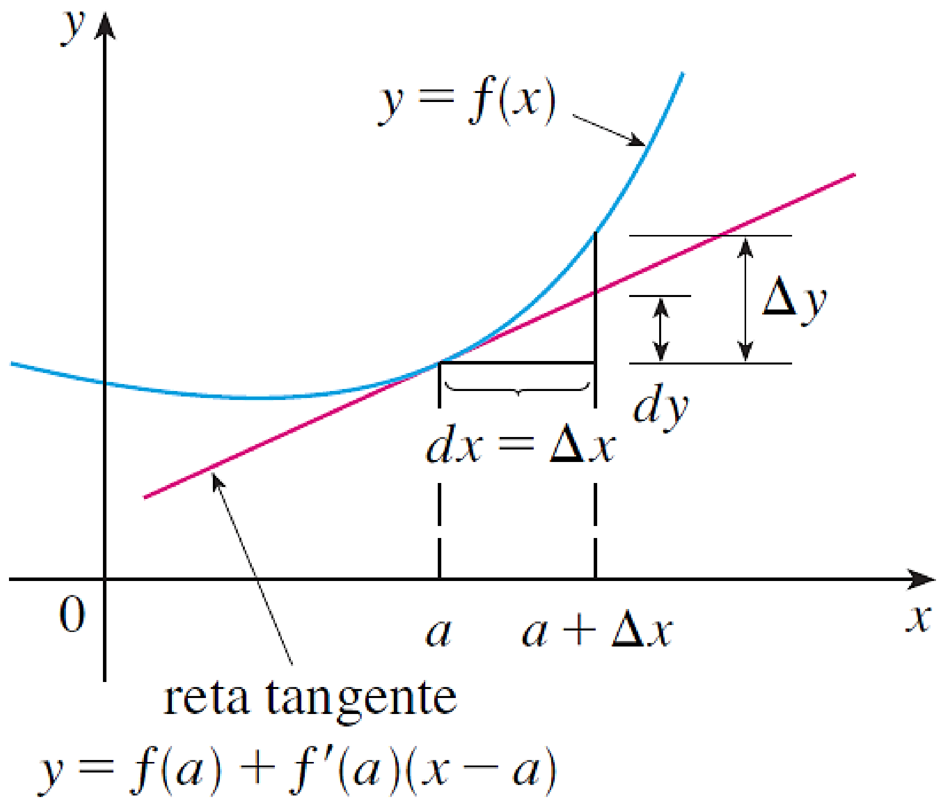
Diferenciais

- Para uma função de uma única variável $y = f(x)$, definimos a diferencial dx como uma variável independente.

- A diferencial de y é definida como:

$$dy = f'(x)\,dx$$

- A figura mostra as relações entre o diferencial e o incremento.



Diferenciais

- Para uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$, definimos as diferenciais dx e dy como variáveis independentes.

Diferenciais

- Para uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$, definimos as diferenciais *dx* e *dy* como variáveis independentes.
- Então a diferencial *dz* (ou *df*) também chamada de diferenciação total, é definida por:

$$dz = f_x(x, y)\, dx + f_y(x, y)\, dy = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy$$

Diferenciais

- Para uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$, definimos as diferenciais dx e dy como variáveis independentes.
- Então a diferencial dz (ou df) também chamada de diferenciação total, é definida por:

$$dz = f_x(x, y)\, dx + f_y(x, y)\, dy = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy$$

- Se tomamos $dx = \Delta x = x - a$ e $dy = \Delta y = y - b$ na equação anterior, a diferencial de z fica:

$$dz = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Diferenciais

- Com a notação de diferencial, a aproximação linear pode ser escrita como:

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz$$

Diferenciais

- Com a notação de diferencial, a aproximação linear pode ser escrita como:

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz$$

- A Figura a seguir é o correspondente tridimensional da função de uma variável. Ela mostra a interpretação geométrica do diferencial *dz* e do incremento Δz.

Diferenciais

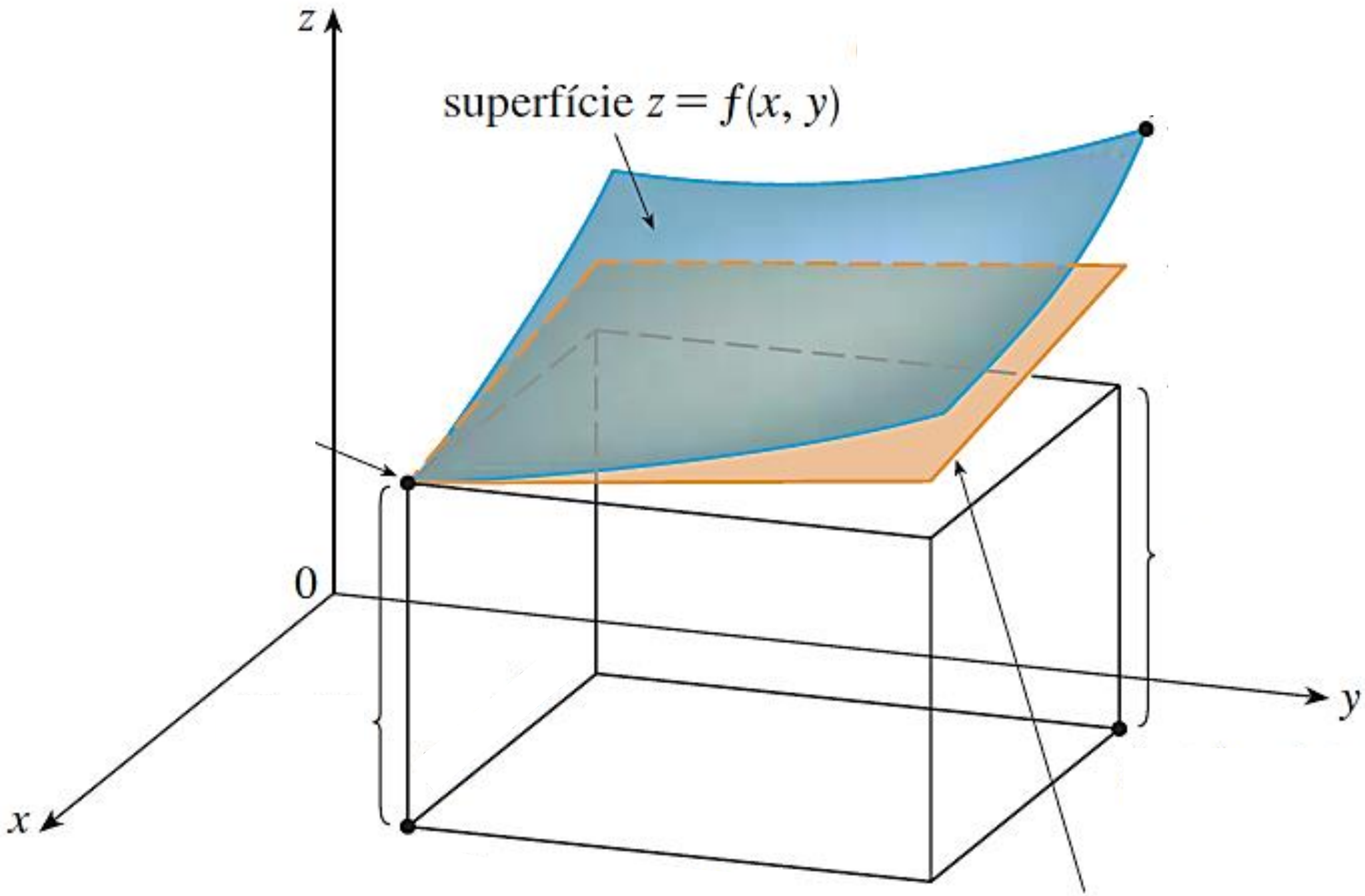


FIGURA 7

Diferenciais

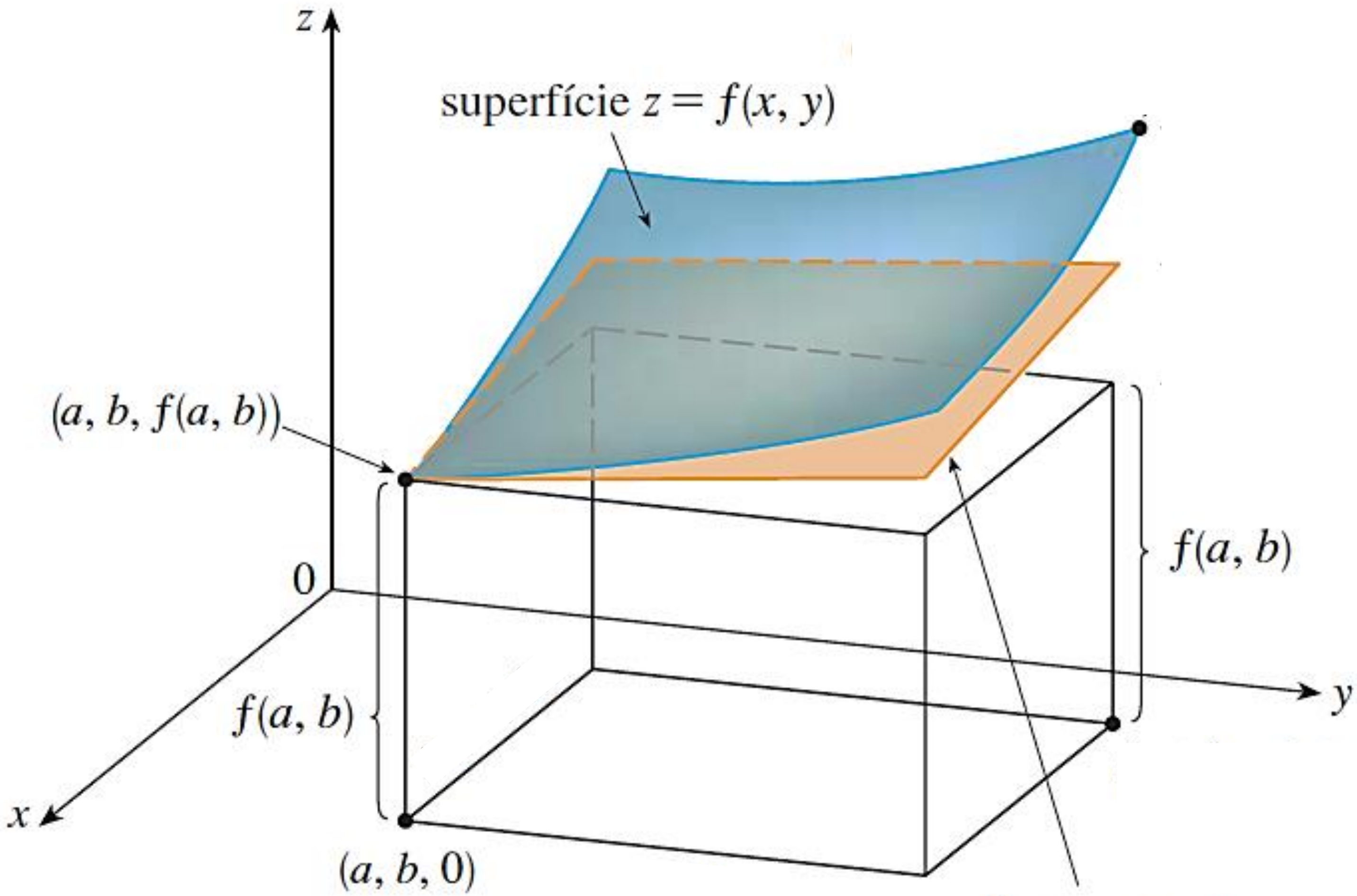


FIGURA 7

Diferenciais

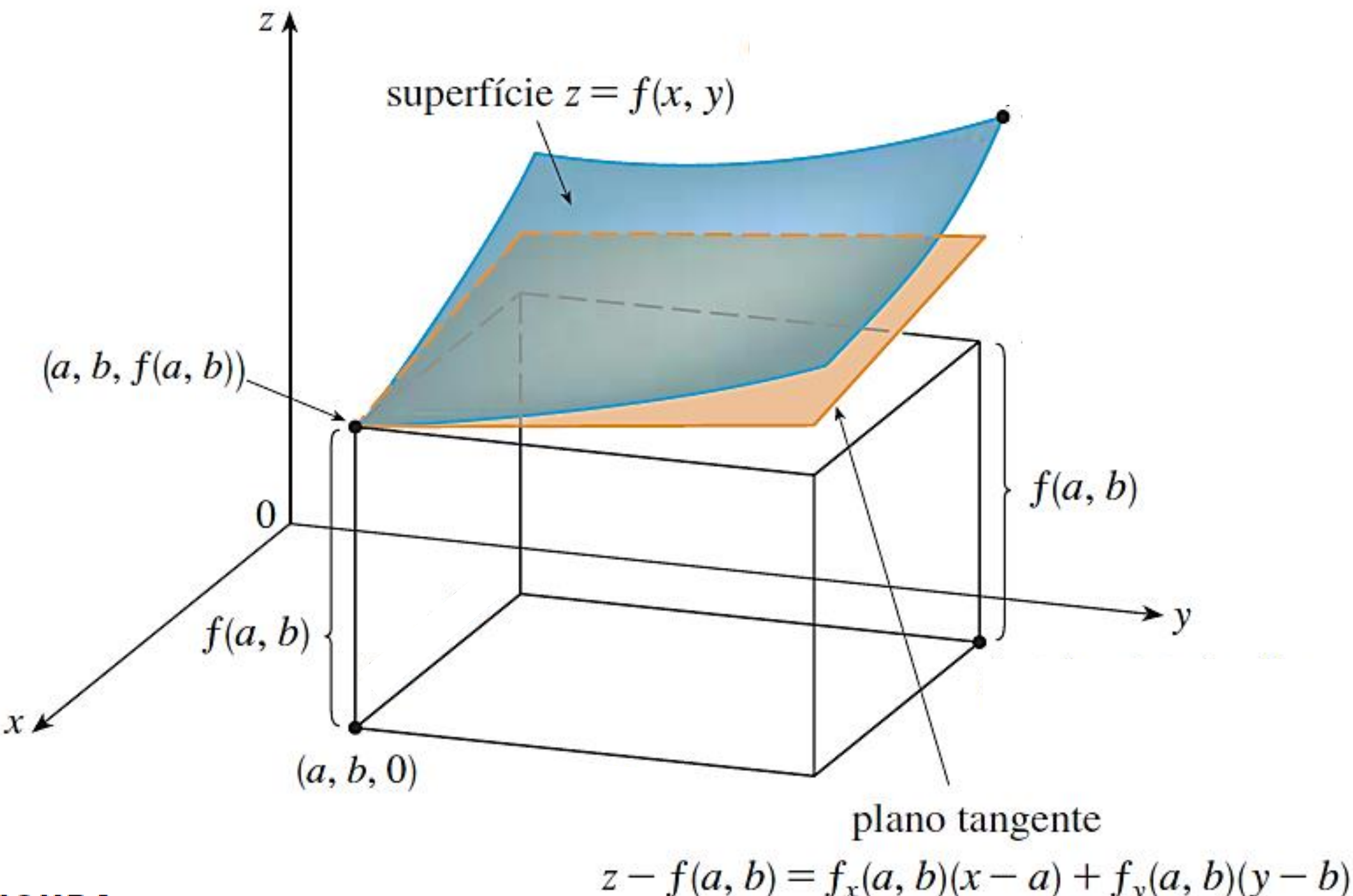


FIGURA 7

Diferenciais

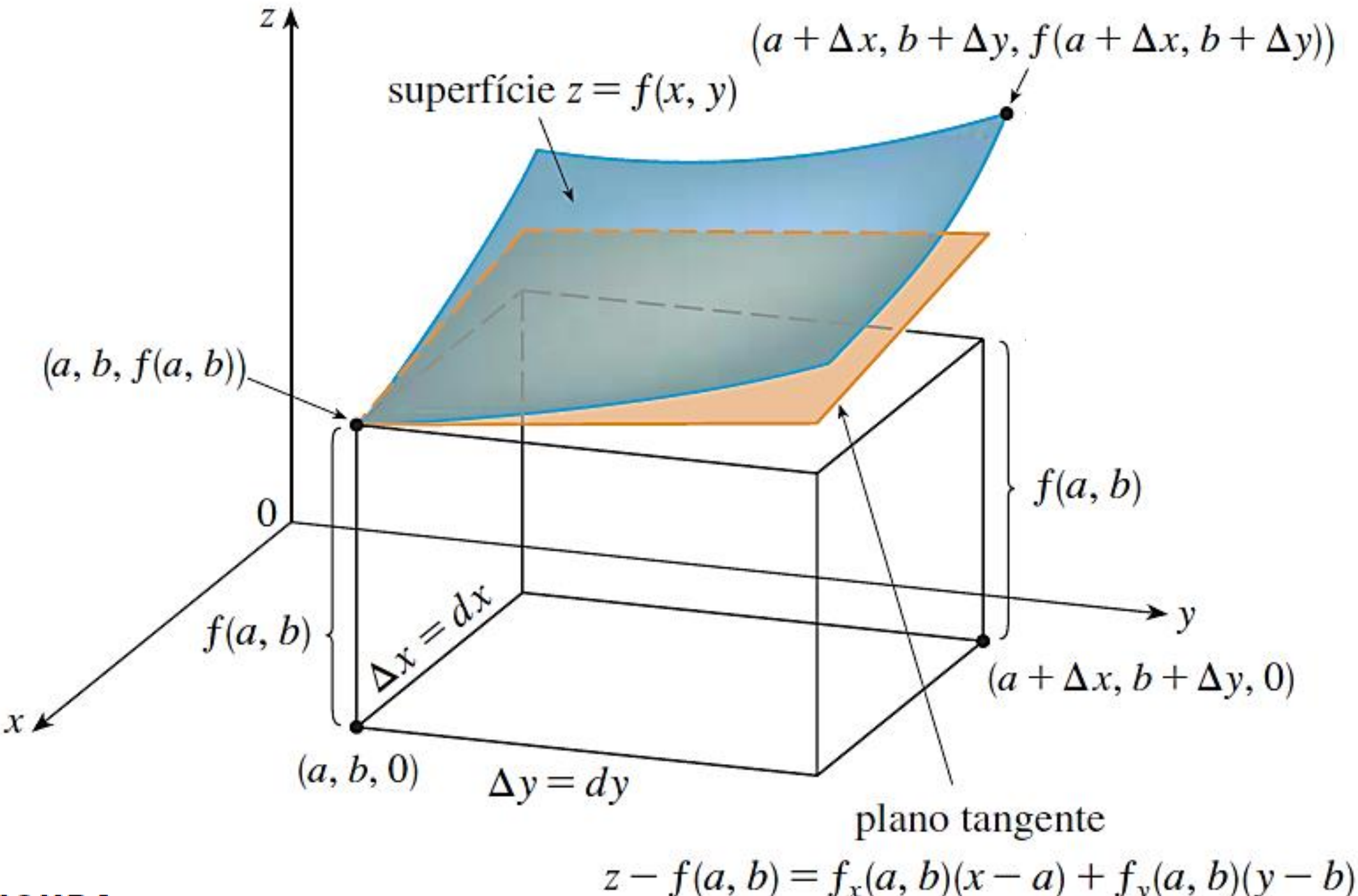


FIGURA 7

Diferenciais

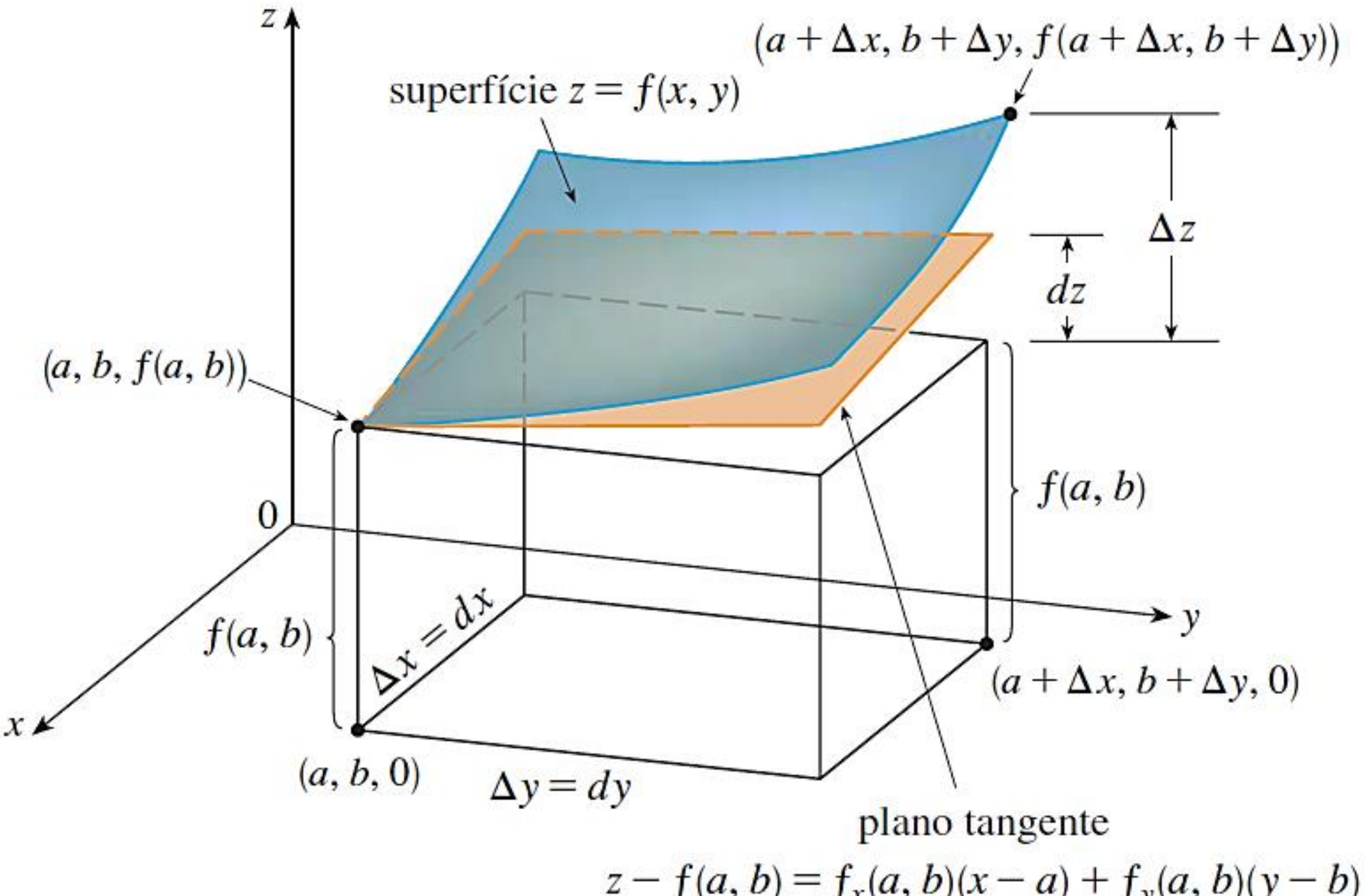


FIGURA 7

Diferenciais

Exemplo 4

(a) Se $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$, determine a diferencial dz.

(b) Se x varia de 2 para 2,05 e y varia de 3 a 2,96, compare os valores de Δz e dz.

Diferenciais

Exemplo 4

(a) Se $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$, determine a diferencial dz.

(b) Se x varia de 2 para 2,05 e y varia de 3 a 2,96, compare os valores de Δz e dz.

Solução:

(a) Da Definição vem

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

$$dz = (2x + 3y)\,dx + (3x - 2y)\,dy$$

Diferenciais

Exemplo 4

(b) Tomando $x = 2$, $dx = \Delta x = 0{,}05$, $y = 3$ e $dy = \Delta y = -0{,}04$.

$$dz = (2x + 3y)\,dx + (3x - 2y)\,dy$$

Diferenciais

Exemplo 4

(b) Tomando $x = 2$, $dx = \Delta x = 0{,}05$, $y = 3$ e $dy = \Delta y = -0{,}04$.

$$dz = (2x + 3y)\,dx + (3x - 2y)\,dy$$

$$dz = [2(2) + 3(3)]0{,}05 + [3(2) - 2(3)](-0{,}04)$$

$$dz = 0{,}65$$

Diferenciais

Exemplo 4

(b) Tomando $x = 2$, $dx = \Delta x = 0{,}05$, $\quad dz = (2x + 3y)\, dx + (3x - 2y)\, dy$

$y = 3$ e $dy = \Delta y = -0{,}04$.

$$dz = [2(2) + 3(3)]0{,}05 + [3(2) - 2(3)](-0{,}04)$$

$$dz = 0{,}65$$

O incremento de z é

$$\Delta z = f(2{,}05,\ 2{,}96) - f(2,\ 3)$$

Diferenciais

Exemplo 4

(b) Tomando $x = 2$, $dx = \Delta x = 0{,}05$, $y = 3$ e $dy = \Delta y = -0{,}04$.

$$dz = (2x + 3y)\,dx + (3x - 2y)\,dy$$

$$dz = [2(2) + 3(3)]0{,}05 + [3(2) - 2(3)](-0{,}04)$$

$$dz = 0{,}65$$

O incremento de z é

$$\Delta z = f(2{,}05,\ 2{,}96) - f(2,\ 3)$$

$$= [(2{,}05)^2 + 3(2{,}05)(2{,}96) - (2{,}96)^2] - [2^2 + 3(2)(3) - 3^2]$$

$$\Delta z = 0{,}6449$$

Diferenciais

Exemplo 4

(b) Tomando $x = 2$, $dx = \Delta x = 0{,}05$, $\quad dz = (2x + 3y)\,dx + (3x - 2y)\,dy$

$y = 3$ e $dy = \Delta y = -0{,}04$.

$$dz = [2(2) + 3(3)]0{,}05 + [3(2) - 2(3)](-0{,}04)$$

$$dz = 0{,}65$$

O incremento de z é

$$\Delta z = f(2{,}05,\ 2{,}96) - f(2,\ 3)$$

$$= [(2{,}05)^2 + 3(2{,}05)(2{,}96) - (2{,}96)^2] - [2^2 + 3(2)(3) - 3^2]$$

$$\Delta z = 0{,}6449$$

Observe que $\Delta z \approx dz$, mas dz é mais simples de calcular.

Funções de três ou mais variáveis

Funções de três ou mais variáveis

- Aproximações lineares, diferenciabilidade e diferenciais podem ser definidas de maneira análoga para as funções de mais que duas variáveis.

Funções de três ou mais variáveis

- Aproximações lineares, diferenciabilidade e diferenciais podem ser definidas de maneira análoga para as funções de mais que duas variáveis.

Aproximação linear

$$f(x, y, z) \approx f(a, b, c) + f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c)$$

Funções de três ou mais variáveis

- Aproximações lineares, diferenciabilidade e diferenciais podem ser definidas de maneira análoga para as funções de mais que duas variáveis.

Aproximação linear

$$f(x, y, z) \approx f(a, b, c) + f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c)$$

Incremento

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

Funções de três ou mais variáveis

- Aproximações lineares, diferenciabilidade e diferenciais podem ser definidas de maneira análoga para as funções de mais que duas variáveis.

Aproximação linear

$$f(x, y, z) \approx f(a, b, c) + f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c)$$

Incremento

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

Diferencial

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

Funções de três ou mais variáveis

Exemplo 6

As dimensões de uma caixa retangular são medidas como 75 cm, 60 cm e 40 cm, e cada medida foi feita com precisão de 0,2 cm. Use diferenciais para estimar o maior erro possível quando calculamos o volume da caixa usando essas medidas.

Funções de três ou mais variáveis

Exemplo 6

As dimensões de uma caixa retangular são medidas como 75 cm, 60 cm e 40 cm, e cada medida foi feita com precisão de 0,2 cm. Use diferenciais para estimar o maior erro possível quando calculamos o volume da caixa usando essas medidas.

Solução:

Se as dimensões da caixa são x, y e z, seu volume é $V = xyz$;

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz$$

Funções de três ou mais variáveis

Exemplo 6

As dimensões de uma caixa retangular são medidas como 75 cm, 60 cm e 40 cm, e cada medida foi feita com precisão de 0,2 cm. Use diferenciais para estimar o maior erro possível quando calculamos o volume da caixa usando essas medidas.

Solução:

Se as dimensões da caixa são x, y e z, seu volume é $V = xyz$;

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz$$

$$dV = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

Funções de três ou mais variáveis

Ex.: 6

Foi dado $|\Delta x| \leqslant 0{,}2$, $|\Delta y| \leqslant 0{,}2$ e $|\Delta z| \leqslant 0{,}2$.

Funções de três ou mais variáveis

Ex.: 6

Foi dado $|\Delta x| \leqslant 0{,}2$, $|\Delta y| \leqslant 0{,}2$ e $|\Delta z| \leqslant 0{,}2$.

Para estimarmos o maior erro no volume, utilizamos,

$dx = 0{,}2$, $dy = 0{,}2$ e $dz = 0{,}2$ com

$x = 75$, $y = 60$ e $z = 40$, portanto:

Funções de três ou mais variáveis

Ex.: 6

Foi dado $|\Delta x| \leqslant 0{,}2$, $|\Delta y| \leqslant 0{,}2$ e $|\Delta z| \leqslant 0{,}2$.

Para estimarmos o maior erro no volume, utilizamos,

$dx = 0{,}2$, $dy = 0{,}2$ e $dz = 0{,}2$ com

$x = 75$, $y = 60$ e $z = 40$, portanto:

$$\Delta V \approx dV = (60)(40)(0{,}2) + (75)(40)(0{,}2) + (75)(60)(0{,}2)$$

Funções de três ou mais variáveis

Ex.: 6

Foi dado $|\Delta x| \leqslant 0{,}2$, $|\Delta y| \leqslant 0{,}2$ e $|\Delta z| \leqslant 0{,}2$.

Para estimarmos o maior erro no volume, utilizamos,

$dx = 0{,}2$, $dy = 0{,}2$ e $dz = 0{,}2$ com

$x = 75$, $y = 60$ e $z = 40$, portanto:

$$\Delta V \approx dV = (60)(40)(0{,}2) + (75)(40)(0{,}2) + (75)(60)(0{,}2)$$

$$\Delta V \approx dV = 1980$$

Funções de três ou mais variáveis

Ex.: 6

Foi dado $|\Delta x| \leqslant 0{,}2$, $|\Delta y| \leqslant 0{,}2$ e $|\Delta z| \leqslant 0{,}2$.

Para estimarmos o maior erro no volume, utilizamos,

$dx = 0{,}2$, $dy = 0{,}2$ e $dz = 0{,}2$ com

$x = 75$, $y = 60$ e $z = 40$, portanto:

$$\Delta V \approx dV = (60)(40)(0{,}2) + (75)(40)(0{,}2) + (75)(60)(0{,}2)$$

$$\Delta V \approx dV = 1980$$

Portanto, um erro de apenas 0,2 cm nas medidas de cada dimensão pode nos levar a um erro da ordem de 1.980 cm³ no volume!

Funções de três ou mais variáveis

Ex.: 6

Foi dado $|\Delta x| \leqslant 0{,}2$, $|\Delta y| \leqslant 0{,}2$ e $|\Delta z| \leqslant 0{,}2$.

Para estimarmos o maior erro no volume, utilizamos,

$dx = 0{,}2$, $dy = 0{,}2$ e $dz = 0{,}2$ com

$x = 75$, $y = 60$ e $z = 40$, portanto:

$$\Delta V \approx dV = (60)(40)(0{,}2) + (75)(40)(0{,}2) + (75)(60)(0{,}2)$$

$$\Delta V \approx dV = 1980$$

Portanto, um erro de apenas 0,2 cm nas medidas de cada dimensão pode nos levar a um erro da ordem de 1.980 cm^3 no volume!

Isso parecer um erro muito grande, mas, é um erro de apenas cerca de 1% do volume da caixa **(180.000 cm^3).**

Para depois desta aula:

- Estudar seção 14.4 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

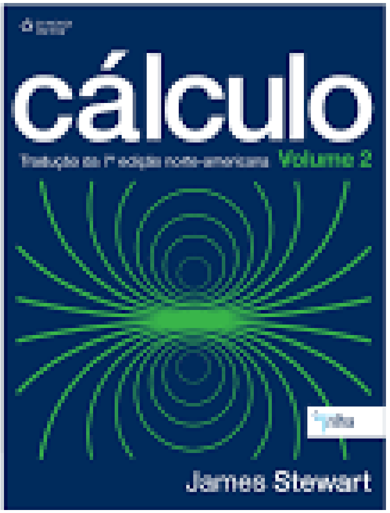
Próxima aula:

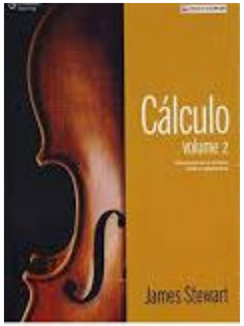
- Regra da cadeia para funções de várias variáveis.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed.





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br