Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 04 - Aula 3
Regra da cadeia

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Regra da cadeia

- A regra da cadeia para a função de uma única variável $y = f(x)$ e $x = g(t)$ foi definida como:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Regra da cadeia

- A regra da cadeia para a função de uma única variável $y = f(x)$ e $x = g(t)$ foi definida como:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

- Para uma função f de mais de uma variável a regra da cadeia tem muitas variações.
- Cada variação fornecerá uma regra de derivação de uma função composta.

Regra da cadeia

- A regra da cadeia para a função de uma única variável $y = f(\mathrm{x})$ e $\mathrm{x} = g(t)$ foi definida como:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

- Para uma função *f* de mais de uma variável a regra da cadeia tem muitas variações.
- Cada variação fornecerá uma regra de derivação de uma função composta.
- Vamos supor, para definir essas regras, que *f* seja diferenciável (f_x , f_y ... f_n *são contínuas)*.

A Regra da Cadeia (Caso 1) Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis de t. Então z é uma função diferenciável de t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

A Regra da Cadeia (Caso 1) Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis de t. Então z é uma função diferenciável de t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Se escrevemos $\partial z/\partial x$ no lugar de $\partial f/\partial x$, podemos reescrever a Regra da Cadeia na forma

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Regra da cadeia

Exemplo 1 Se $z = x^2y + 3xy^4$, onde $x = \text{sen } 2t$ e $y = \cos t$, determine dz/dt quando $t = 0$

Regra da cadeia

Exemplo 1 Se $z = x^2y + 3xy^4$, onde $x = \text{sen}\, 2t$ e $y = \cos t$, determine dz/dt quando $t = 0$

Solução:

A Regra da Cadeia fornece

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Regra da cadeia

Exemplo 1 Se $z = x^2y + 3xy^4$, onde $x = \text{sen } 2t$ e $y = \cos t$, determine dz/dt quando $t = 0$

Solução:

A Regra da Cadeia fornece

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = (2xy + 3y^4)(2\cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\text{sen } t)$$

Regra da cadeia

Exemplo 1 Se $z = x^2y + 3xy^4$, onde $x = \text{sen } 2t$ e $y = \cos t$, determine dz/dt quando $t = 0$

Solução:

A Regra da Cadeia fornece

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = (2xy + 3y^4)(2\cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\text{sen } t)$$

quando $t = 0$, temos $x = \text{sen } 0 = 0$ e $y = \cos 0 = 1$.

Regra da cadeia

Exemplo 1 Se $z = x^2y + 3xy^4$, onde $x = \operatorname{sen} 2t$ e $y = \cos t$, determine dz/dt quando $t = 0$

Solução:

A Regra da Cadeia fornece

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = (2xy + 3y^4)(2\cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\operatorname{sen} t)$$

quando $t = 0$, temos $x = \operatorname{sen} 0 = 0$ e $y = \cos 0 = 1$.

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = (0 + 3)(2\cos 0) + (0 + 0)(-\operatorname{sen} 0) = 6$$

A Regra da Cadeia (Caso 2) Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ são funções diferenciáveis de s e t. Então

A Regra da Cadeia (Caso 2) Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ são funções diferenciáveis de s e t. Então

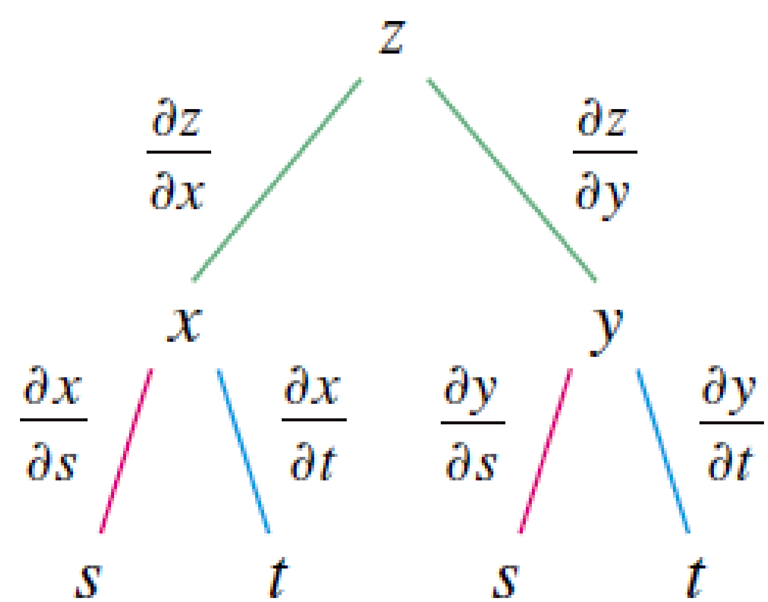
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

A Regra da Cadeia (Caso 2) Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ são funções diferenciáveis de s e t. Então

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$



Regra da cadeia

Exemplo 2 Se $z = e^x \operatorname{sen} y$, onde $x = st^2$ e $y = s^2t$, determine $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

Regra da cadeia

Exemplo 2 Se $z = e^x \text{ sen } y$, onde $x = st^2$ e $y = s^2t$, determine $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

Solução:

Aplicando o Caso 2 da Regra da Cadeia, obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

Regra da cadeia

Exemplo 2 Se $z = e^x \operatorname{sen} y$, onde $x = st^2$ e $y = s^2t$, determine $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

Solução:

Aplicando o Caso 2 da Regra da Cadeia, obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= (e^x \operatorname{sen} y)(t^2) + (e^x \cos y)(2st)$$

Regra da cadeia

Exemplo 2 Se $z = e^x \operatorname{sen} y$, onde $x = st^2$ e $y = s^2t$, determine $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

Solução:

Aplicando o Caso 2 da Regra da Cadeia, obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= (e^x \operatorname{sen} y)(t^2) + (e^x \cos y)(2st)$$

$$= t^2 e^{st^2} \operatorname{sen}(s^2t) + 2ste^{st^2} \cos(s^2t)$$

Regra da cadeia

Exemplo 2

$$z = e^x \operatorname{sen} y, \text{ onde } x = st^2 \text{ e } y = s^2 t,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Regra da cadeia

Exemplo 2

$$z = e^x \operatorname{sen} y, \text{ onde } x = st^2 \text{ e } y = s^2 t,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= (e^x \operatorname{sen} y)(2st) + (e^x \cos y)(s^2)$$

Regra da cadeia

Exemplo 2

$$z = e^x \operatorname{sen} y, \text{ onde } x = st^2 \text{ e } y = s^2 t,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= (e^x \operatorname{sen} y)(2st) + (e^x \cos y)(s^2)$$

$$= 2ste^{st^2} \operatorname{sen}(s^2 t) + s^2 e^{st^2} \cos(s^2 t)$$

A Regra da Cadeia (Versão Geral) Suponha que u seja uma função diferenciável de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ onde cada x_j é uma função diferenciável de m variáveis $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Então u é uma função de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ e

A Regra da Cadeia (Versão Geral) Suponha que u seja uma função diferenciável de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ onde cada x_j é uma função diferenciável de m variáveis $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Então u é uma função de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ e

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

A Regra da Cadeia (Versão Geral) Suponha que u seja uma função diferenciável de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ onde cada x_j é uma função diferenciável de m variáveis $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Então u é uma função de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ e

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

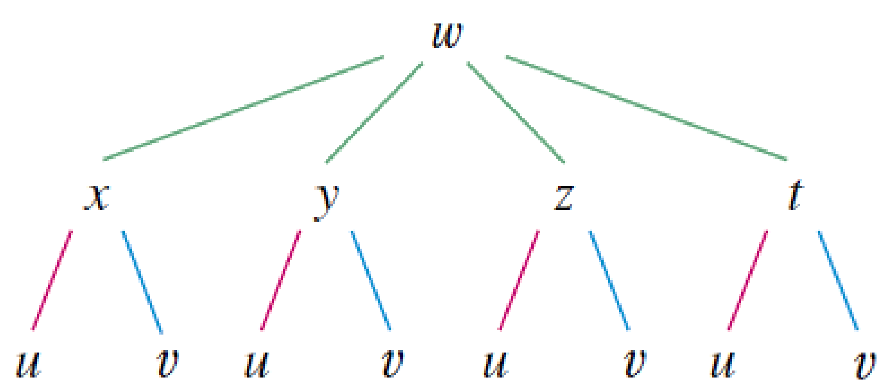


FIGURA 3

Regra da cadeia

Exemplo 3 Escreva a Regra da Cadeia para o caso onde

$w = f(x, y, z, t)$ e $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ e $t = t(u, v)$.

Regra da cadeia

Exemplo 3 Escreva a Regra da Cadeia para o caso onde

$w = f(x, y, z, t)$ e $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ e $t = t(u, v)$.

Solução: Aplicamos o Teorema com $n = 4$ e $m = 2$.

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}$$

Regra da cadeia

Exemplo 3 Escreva a Regra da Cadeia para o caso onde

$w = f(x, y, z, t)$ e $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ e $t = t(u, v)$.

Solução: Aplicamos o Teorema com $n = 4$ e $m = 2$.

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}$$

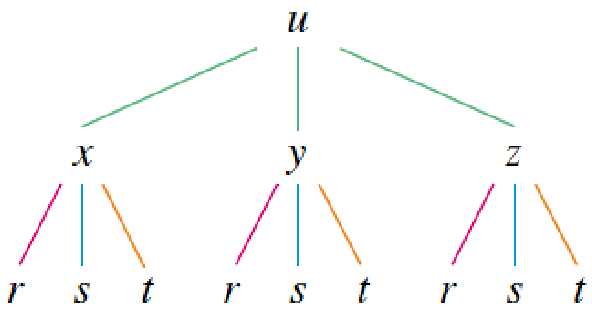
Regra da cadeia

Ex.: 4 Se $u = x^4y + y^2z^3$, onde $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$ e $z = r^2s \operatorname{sen} t$, determine o valor de $\partial u/\partial s$ quando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$.

Regra da cadeia

Ex.: 4 Se $u = x^4y + y^2z^3$, onde $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$ e $z = r^2s \operatorname{sen} t$, determine o valor de $\partial u/\partial s$ quando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$.

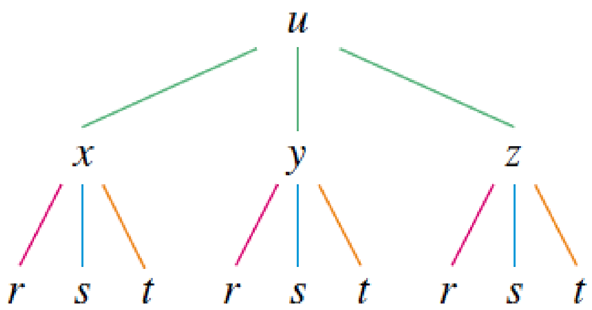
Solução:



Regra da cadeia

Ex.: 4 Se $u = x^4y + y^2z^3$, onde $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$ e $z = r^2s \operatorname{sen} t$, determine o valor de $\partial u/\partial s$ quando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$.

Solução:

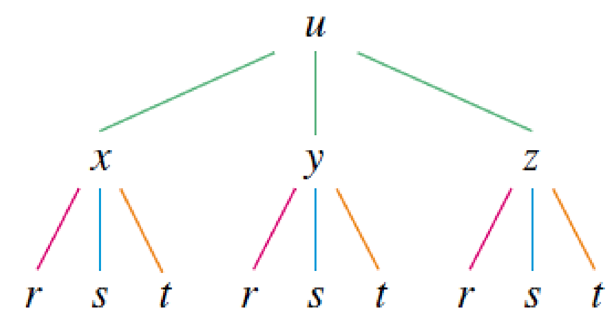


$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

Regra da cadeia

Ex.: 4 Se $u = x^4y + y^2z^3$, onde $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$ e $z = r^2s \operatorname{sen} t$, determine o valor de $\partial u/\partial s$ quando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$.

Solução:



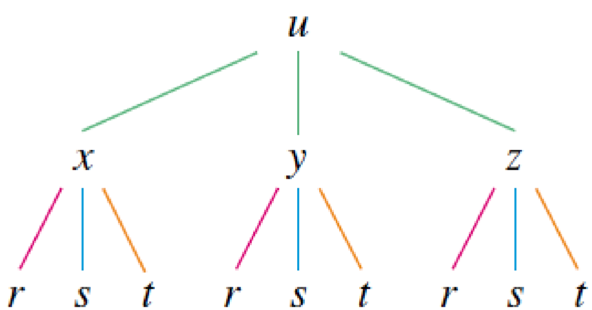
$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= (4x^3y)(re^t) + (x^4 + 2yz^3)(2rse^{-t}) + (3y^2z^2)(r^2 \operatorname{sen} t)$$

Regra da cadeia

Ex.: 4 Se $u = x^4y + y^2z^3$, onde $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$ e $z = r^2s \operatorname{sen} t$, determine o valor de $\partial u/\partial s$ quando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$.

Solução:



$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

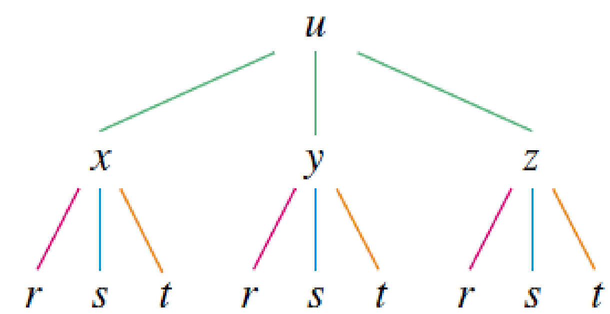
$$= (4x^3y)(re^t) + (x^4 + 2yz^3)(2rse^{-t}) + (3y^2z^2)(r^2 \operatorname{sen} t)$$

Quando $r = 2$, $s = 1$e $t = 0$, temos $x = 2$, $y = 2$ e $z = 0$

Regra da cadeia

Ex.: 4 Se $u = x^4y + y^2z^3$, onde $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$ e $z = r^2s \operatorname{sen} t$, determine o valor de $\partial u/\partial s$ quando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$.

Solução:



$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= (4x^3y)(re^t) + (x^4 + 2yz^3)(2rse^{-t}) + (3y^2z^2)(r^2 \operatorname{sen} t)$$

Quando $r = 2$, $s = 1$ e $t = 0$, temos $x = 2$, $y = 2$ e $z = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (64)(2) + (16)(4) + (0)(0) = 192$$

Diferenciação implícita

Diferenciação implícita

Supomos que uma equação da forma $F(x, y) = 0$ defina y implicitamente como uma função diferenciável de x, isto é,

$$y = f(x) \qquad \text{onde } F(x, f(x)) = 0$$

Diferenciação implícita

Supomos que uma equação da forma $F(x, y) = 0$ defina y implicitamente como uma função diferenciável de x, isto é,

$$y = f(x) \qquad \text{onde } F(x, f(x)) = 0$$

Se F é diferenciável, podemos aplicar a Regra da Cadeia para diferenciar ambos os lados da equação $F(x, y) = 0$

Diferenciação implícita

Supomos que uma equação da forma $F(x, y) = 0$ defina y implicitamente como uma função diferenciável de x, isto é,

$$y = f(x) \qquad \text{onde } F(x, f(x)) = 0$$

Se F é diferenciável, podemos aplicar a Regra da Cadeia para diferenciar ambos os lados da equação $F(x, y) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Diferenciação implícita

$dx/dx = 1$, então se $\partial F/\partial y \neq 0$ resolvemos para dy/dx

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Diferenciação implícita

$dx/dx = 1$, então se $\partial F/\partial y \neq 0$ resolvemos para dy/dx

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

Diferenciação implícita

Exemplo 4 Determine y' se $x^3 + y^3 = 6xy$.

Solução:

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

Diferenciação implícita

Exemplo 4 Determine y' se $x^3 + y^3 = 6xy$.

Solução:

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

dessa forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$$

Diferenciação implícita

Suponha agora que z seja dado implicitamente como uma função $z = f(x, y)$ por uma equação da forma

$$F(x, y, z) = 0$$

Diferenciação implícita

Suponha agora que z seja dado implicitamente como uma função $z = f(x, y)$ por uma equação da forma

$$F(x, y, z) = 0$$

Isso significa que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo (x, y) no domínio de f.

Diferenciação implícita

Suponha agora que z seja dado implicitamente como uma função $z = f(x, y)$ por uma equação da forma

$$F(x, y, z) = 0$$

Isso significa que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo (x, y) no domínio de f.

Se F e f forem diferenciáveis, utilizamos a Regra da Cadeia

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Diferenciação implícita

Mas, $\dfrac{\partial}{\partial x}(x) = 1$ e $\dfrac{\partial}{\partial x}(y) = 0$

portanto, essa equação se torna

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Diferenciação implícita

Mas, $\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$ e $\frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$

portanto, essa equação se torna

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

Diferenciação implícita

Mas, $\dfrac{\partial}{\partial x}(x) = 1$ e $\dfrac{\partial}{\partial x}(y) = 0$

portanto, essa equação se torna

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}}$$

A fórmula para $\partial z/\partial y$ é obtida de uma maneira semelhante.

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}}$$

Diferenciação implícita

Ex.: 5 Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ se $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$

Diferenciação implícita

Ex.: 5 Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ se $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$

Solução:

Seja $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$. Então,

Diferenciação implícita

Ex.: 5 Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ se $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$

Solução:

Seja $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$. Então,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

Diferenciação implícita

Ex.: 5 Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ se $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$

Solução:

Seja $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$. Então,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

Para depois desta aula:

- Estudar seção 14.5 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

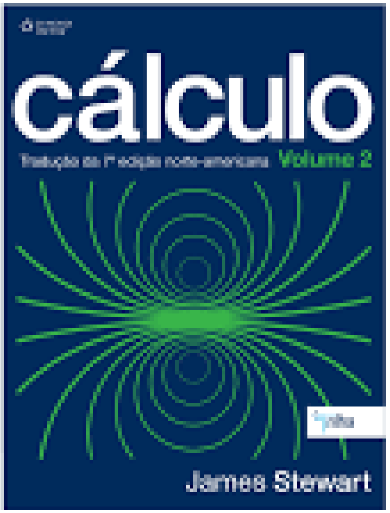
Próxima aula:

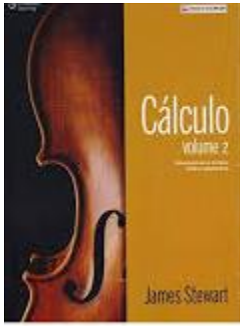
- Derivadas direcionais e vetor gradiente.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed. ►





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br