Cálculo I

Licenciatura

Semana 05 - Aula 1
A derivada

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

A derivada

- Muitos fenômenos envolvem grandezas que variam em relação a outras:
  - Velocidade de um corpo no tempo;
  - Crescimento de bactérias no tempo;
  - Voltagem em relação à corrente elétrica.

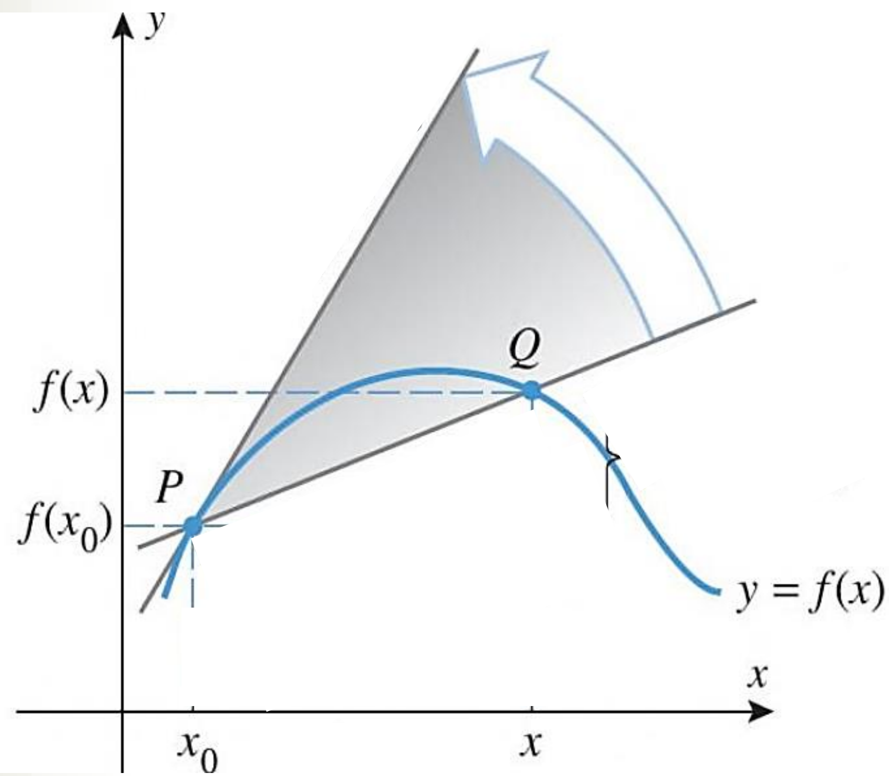
A derivada

- Muitos fenômenos envolvem grandezas que variam em relação a outras:
  - Velocidade de um corpo no tempo;
  - Crescimento de bactérias no tempo;
  - Voltagem em relação à corrente elétrica.

O **conceito da derivada** é a ferramenta matemática para estudar a **taxa segundo a qual uma quantidade varia em relação à outra**.

prof. Henrique A M Faria

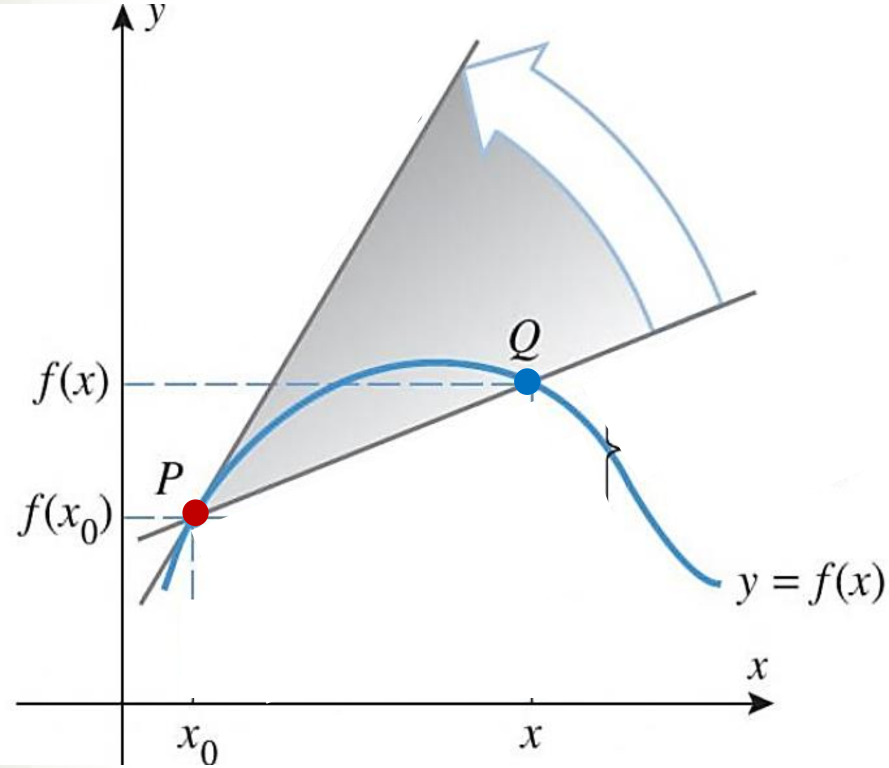
Retas tangentes



- Seja a função *f* que define a curva.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Retas tangentes

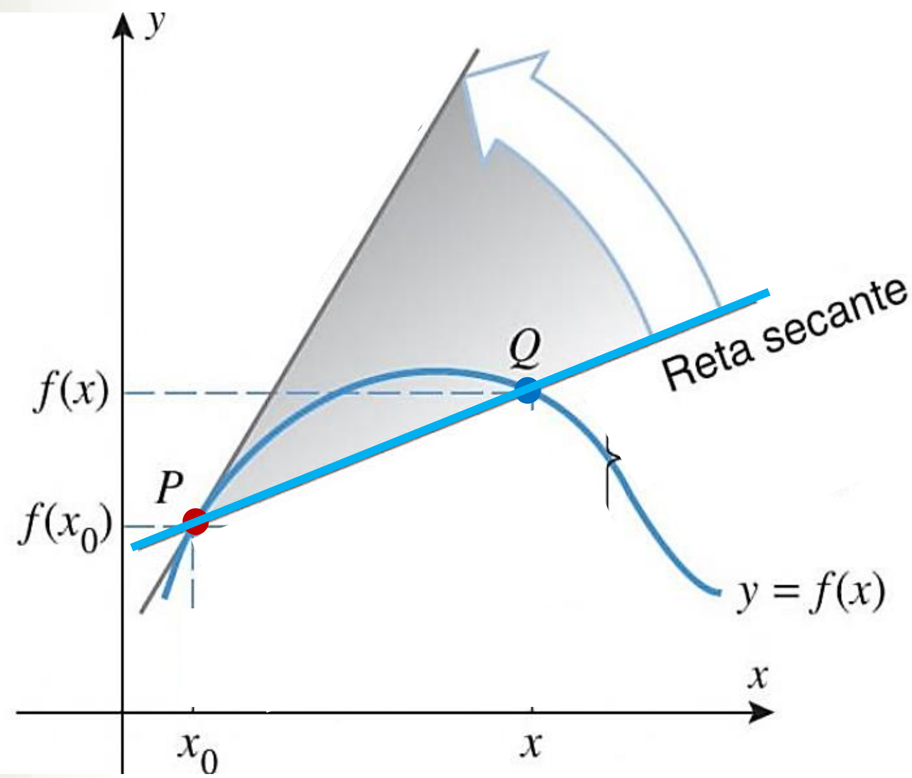


- Seja a função f que define a curva.

- O ponto $\mathrm{P}(x_0; f(x_0))$ é distinto de $\mathrm{Q}(x, f(x))$;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Retas tangentes

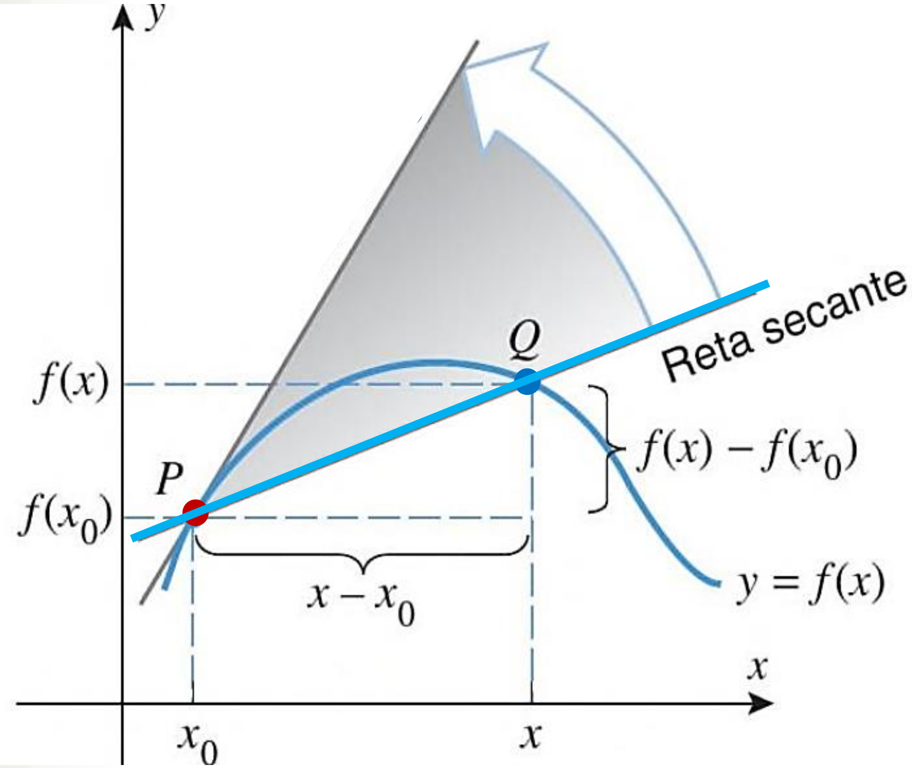


- Seja a função f que define a curva.
- O ponto $\mathrm{P}(x_0; f(x_0))$ é distinto de $\mathrm{Q}(x, f(x))$;
- Um reta secante passa por P e Q, de equação:

$$f(x) - f(x_o) = m_{PQ}(x - x_o)$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Retas tangentes

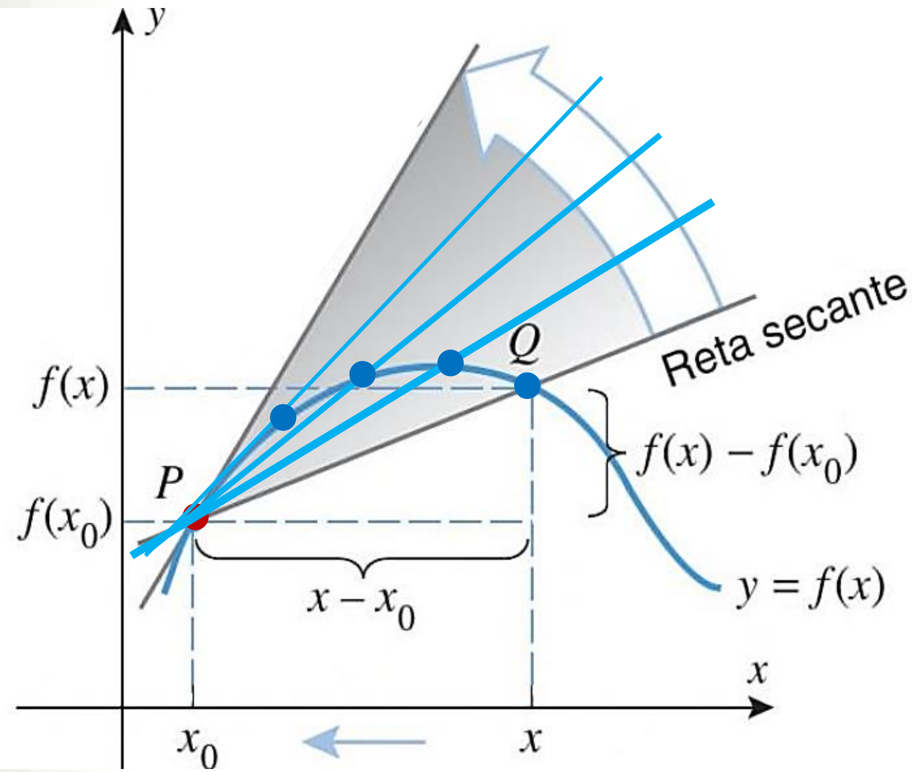


- A inclinação da reta secante que passa por P e Q será:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(x_o)}{(x - x_o)}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Retas tangentes



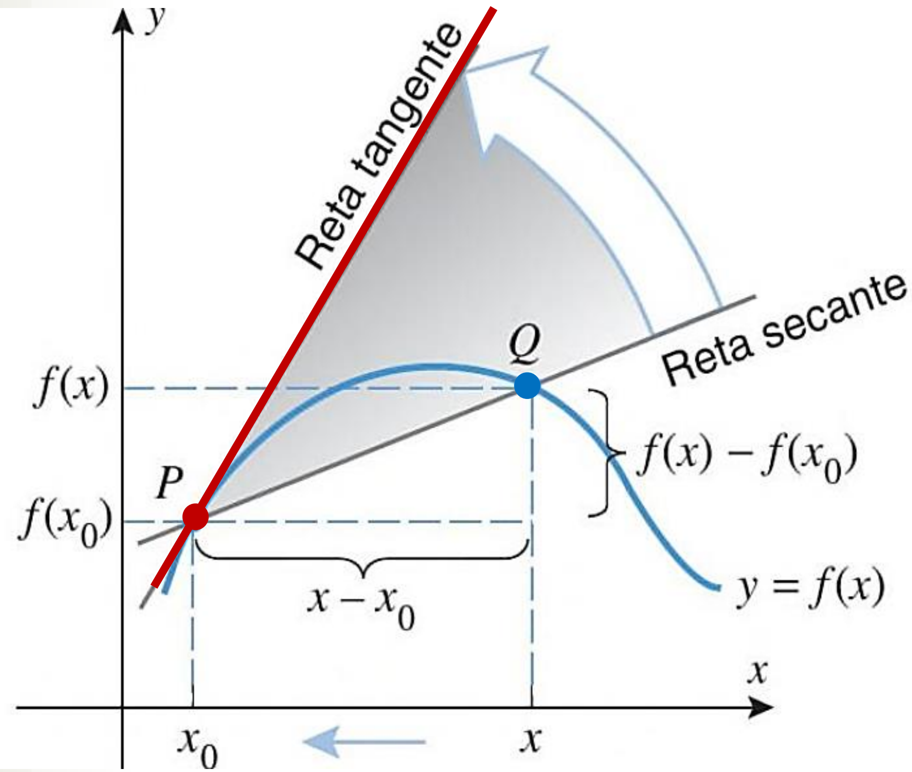
- A inclinação da reta secante que passa por P e Q será:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(x_o)}{(x - x_o)}$$

- Quando $x \to x_o$ o ponto Q se aproxima do ponto P.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Retas tangentes



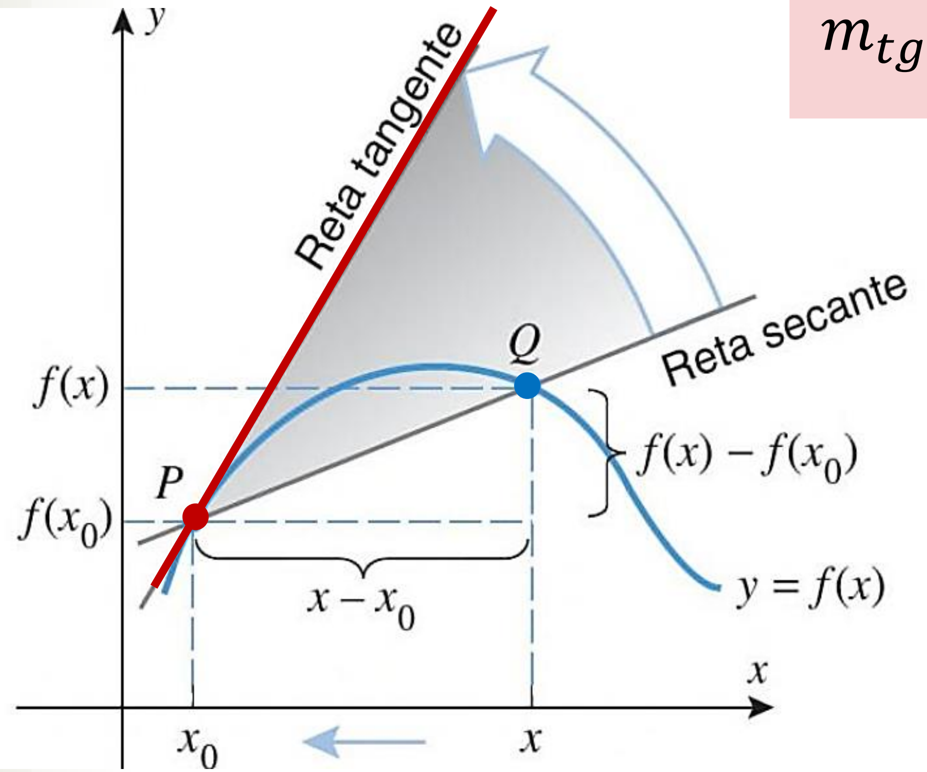
- A inclinação da reta secante que passa por P e Q será:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(x_o)}{(x - x_o)}$$

- Quando $x \to x_o$ o ponto Q se aproxima do ponto P.

Se a reta secante atingir a posição limite quando $x \to x_o$, então tem-se a reta tangente ao ponto P.

Retas tangentes



$$m_{tg} = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{(x - x_o)}$$

Se a reta secante atingir a posição limite quando $x \to x_o$, então tem-se a reta tangente ao ponto P.

Definição de derivada

2.1.1 DEFINIÇÃO Suponha que x_0 seja um ponto do domínio da função f. A ***reta tangente*** à curva $y = f(x)$ no ponto $P(x_0, f(x_0))$ é a reta de equação

$$y - f(x_0) = m_{tg}(x - x_0)$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Definição de derivada

2.1.1 DEFINIÇÃO Suponha que x_0 seja um ponto do domínio da função f. A ***reta tangente*** à curva $y = f(x)$ no ponto $P(x_0, f(x_0))$ é a reta de equação

$$y - f(x_0) = m_{tg}(x - x_0)$$

onde

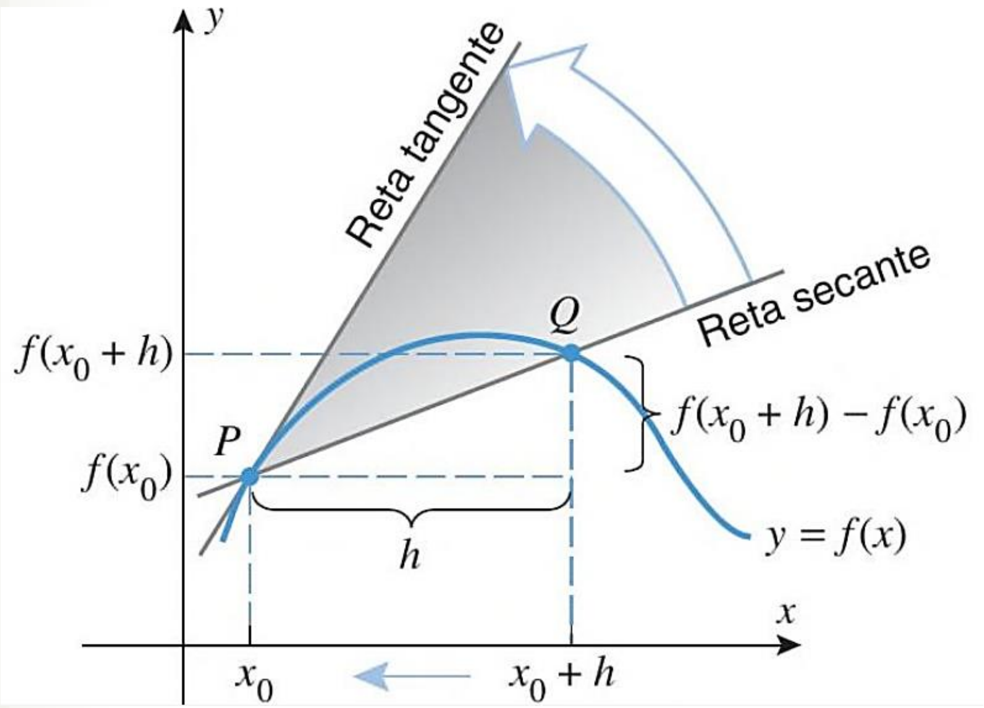
$$\boxed{m_{tg} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \qquad (1)$$

sempre que existir o limite. Para simplificar, também dizemos que essa reta é a reta tangente a $y = f(x)$ em x_0.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Maneira alternativa da definição

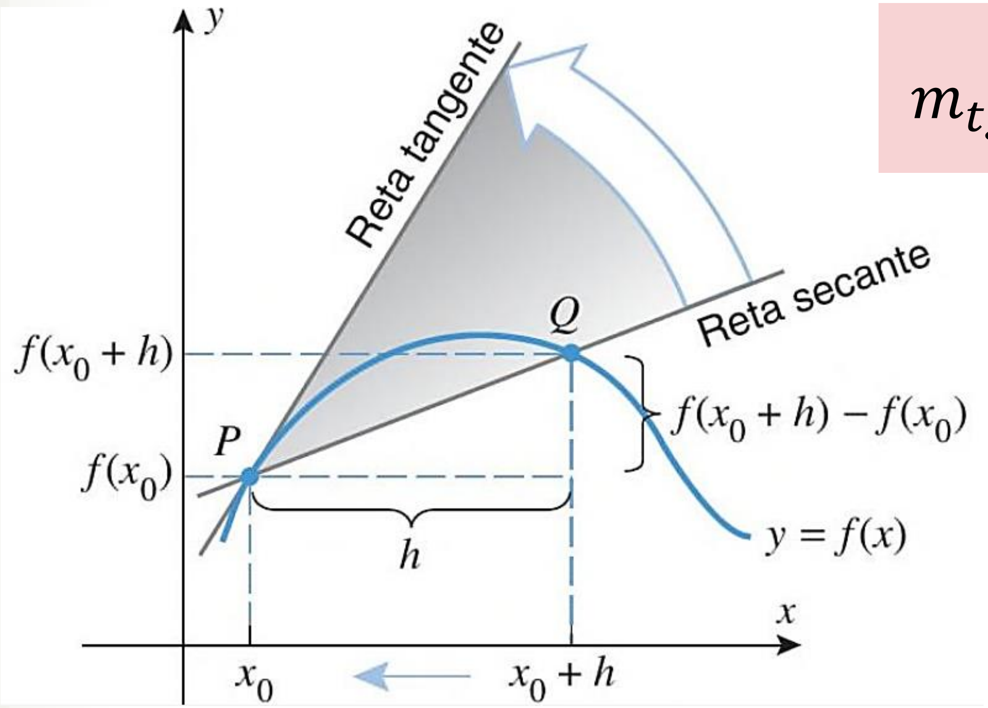
- A inclinação da reta tangente pode ser expressa considerando-se um incremento h na variável x.



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Maneira alternativa da definição

- A inclinação da reta tangente pode ser expressa considerando-se um incremento h na variável x.



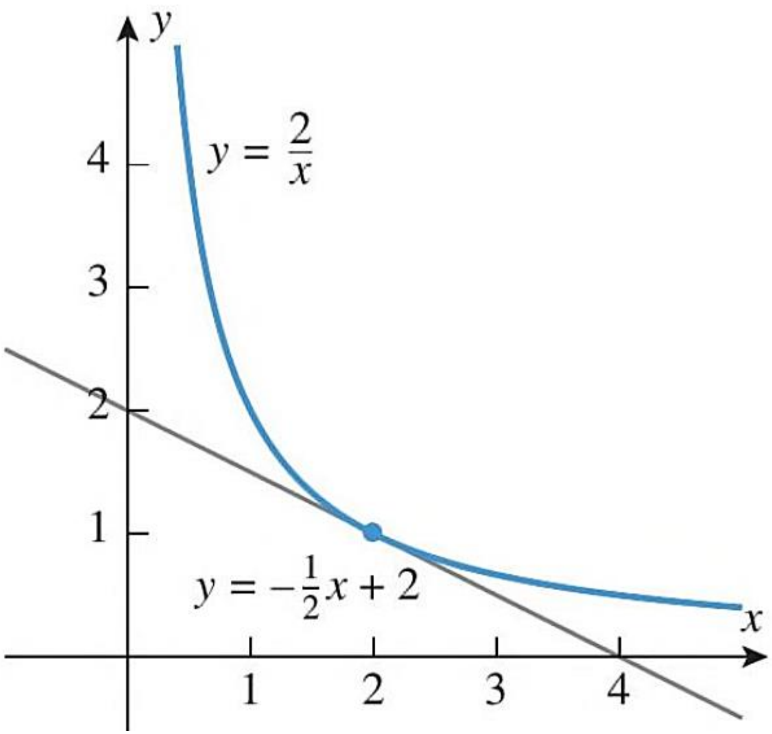
$$m_{tg} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 1 – Encontrar a equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(1, 1)$ usando a definição de derivada.

Exercício - Encontrar a equação da reta tangente à curva $y = \frac{2}{x}$ no ponto $x_0 = 2$.

Exercício – Encontrar a equação da reta tangente à curva $y = \frac{2}{x}$ no ponto $x_0 = 2$.



Movimento retilíneo

- Na mecânica clássica, o movimento de um corpo pode ser completamente descrito se forem conhecidos a velocidade, a direção e o sentido em que se move;

Movimento retilíneo

- Na mecânica clássica, o movimento de um corpo pode ser completamente descrito se forem conhecidos a velocidade, a direção e o sentido em que se move;

- Considerando um movimento retilíneo tem-se uma função da posição ***S*** dependente do tempo ***t***:

$$\boxed{S = f(t)}$$

Movimento retilíneo

- Se $[\boldsymbol{t_o}, \boldsymbol{t_0} + \boldsymbol{h}]$ é um intervalo de tempo, então define-se o deslocamento como sendo a diferença entre as coordenadas;

Movimento retilíneo

- Se $[\boldsymbol{t_o}, \boldsymbol{t_0} + \boldsymbol{h}]$ é um intervalo de tempo, então define-se o deslocamento como sendo a diferença entre as coordenadas;

$$\boldsymbol{deslocamento}[t_o, t_0 + h] = \boldsymbol{f}(t_0 + h) - \boldsymbol{f}(t_0)$$

Movimento retilíneo

- Se $[\boldsymbol{t_o}, \boldsymbol{t_0} + \boldsymbol{h}]$ é um intervalo de tempo, então define-se o deslocamento como sendo a diferença entre as coordenadas;

$$\boldsymbol{deslocamento}[t_o, t_0 + h] = \boldsymbol{f}(t_0 + h) - \boldsymbol{f}(t_0)$$

- O deslocamento pode ser: positivo, negativo ou nulo;

Movimento retilíneo

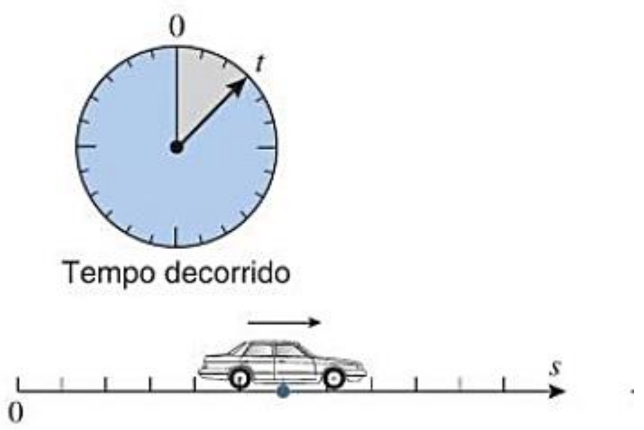
- Se $[\boldsymbol{t_o}, \boldsymbol{t_0} + \boldsymbol{h}]$ é um intervalo de tempo, então define-se o deslocamento como sendo a diferença entre as coordenadas;

$$\boldsymbol{deslocamento}[t_o, t_0 + h] = \boldsymbol{f}(t_0 + h) - \boldsymbol{f}(t_0)$$

- O deslocamento pode ser: positivo, negativo ou nulo;
- Se o corpo se mover em ambos os sentidos os valores do deslocamento e da distância percorrida podem ser diferentes.

Movimento retilíneo

- Um gráfico da posição ***S*** da partícula *versus* tempo decorrido ***t*** descreve o movimento.

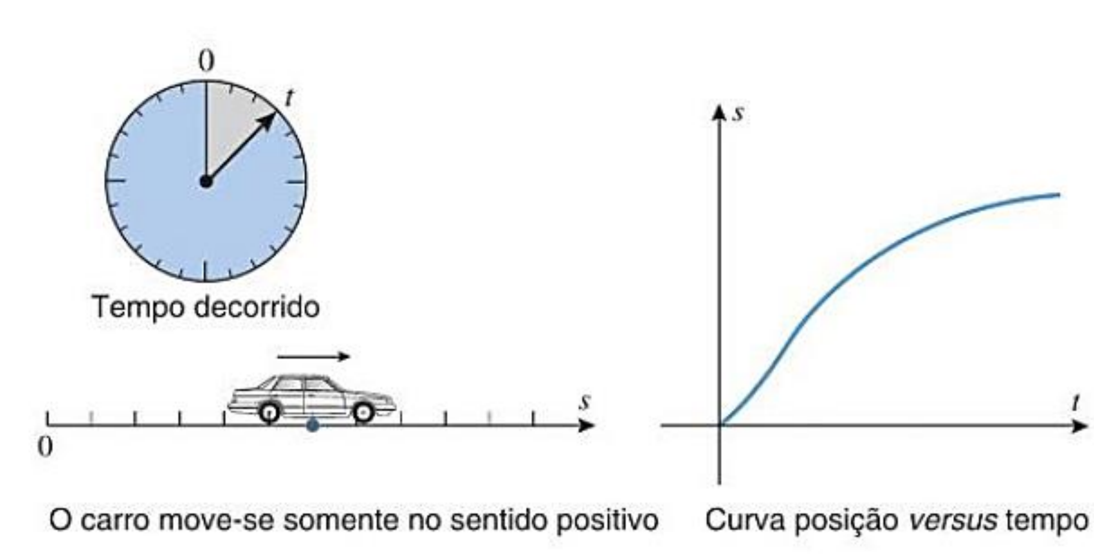


O carro move-se somente no sentido positivo

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Movimento retilíneo

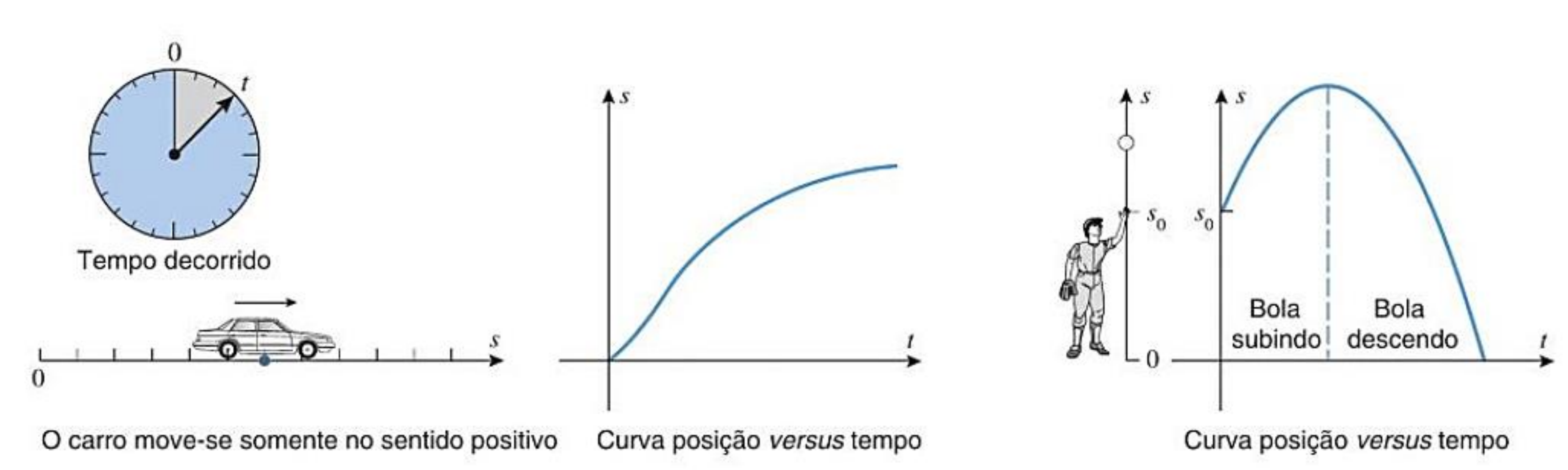
➢ Um gráfico da posição ***S*** da partícula *versus* tempo decorrido ***t*** descreve o movimento.



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Movimento retilíneo

- Um gráfico da posição ***S*** da partícula *versus* tempo decorrido ***t*** descreve o movimento.



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Velocidade média

- Define-se a velocidade média $\boldsymbol{v_m}$ como sendo a razão entre o deslocamento $\boldsymbol{S}$ em um intervalo de tempo $[\boldsymbol{t_o}, \boldsymbol{t_0} + \boldsymbol{h}]$:

$$v_m = \frac{deslocamento}{tempo\ decorrido} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_o)}{h}$$

Velocidade média

- Define-se a velocidade média $\boldsymbol{v_m}$ como sendo a razão entre o deslocamento $\boldsymbol{S}$ em um intervalo de tempo $[\boldsymbol{t_o}, \boldsymbol{t_0} + \boldsymbol{h}]$:

$$v_m = \frac{deslocamento}{tempo\ decorrido} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_o)}{h}$$

- E a velocidade escalar média é definida como o quociente entre a distância percorrida pelo tempo decorrido:

$$velocidade\ escalar_m = \frac{distância\ percorrida}{tempo\ decorrido}$$

Exemplo 2

A função da posição de um corpo em relação ao tempo decorrido é expressa pela expressão:

$$\boldsymbol{S = f(t) = 1 - t^2}$$

Encontrar a velocidade média $\boldsymbol{v_m}$ no intervalo de tempo $[\mathbf{2}, \mathbf{3}]$. Estimar a velocidade instantânea quando $\boldsymbol{t = 2s}$.

Velocidade instantânea

- Define-se a velocidade instantânea $\boldsymbol{v_i}$ como sendo:

$$v_i = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_o)}{h}$$

Velocidade instantânea

- Define-se a velocidade instantânea $\boldsymbol{v_i}$ como sendo:

$$v_i = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_o)}{h}$$

- Geometricamente, a $\boldsymbol{v_m}$ entre $\boldsymbol{t = t_o}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{t = t_0} + h$ é a inclinação da reta secante aos pontos $\mathrm{P}(\boldsymbol{t_o}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t_o}))$ e $\mathrm{Q}(\boldsymbol{t_0} + h, f(\boldsymbol{t_0} + h))$.

Velocidade instantânea

- Define-se a velocidade instantânea $\boldsymbol{v_i}$ como sendo:

$$v_i = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_o)}{h}$$

- Geometricamente, a $\boldsymbol{v_m}$ entre $\boldsymbol{t = t_o\ e\ t = t_0} + h$ é a inclinação da reta secante aos pontos $\mathrm{P}(\boldsymbol{t_o}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t_o}))$ e $\mathrm{Q}(\boldsymbol{t_0} + h, f(\boldsymbol{t_0} + h))$.

- A velocidade instantânea $\boldsymbol{v_i}$ no ponto $\boldsymbol{t_0}$ é a inclinação da reta tangente à curva no ponto $\mathrm{P}(\boldsymbol{t_o}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t_o}))$.

Inclinações e taxas de variação

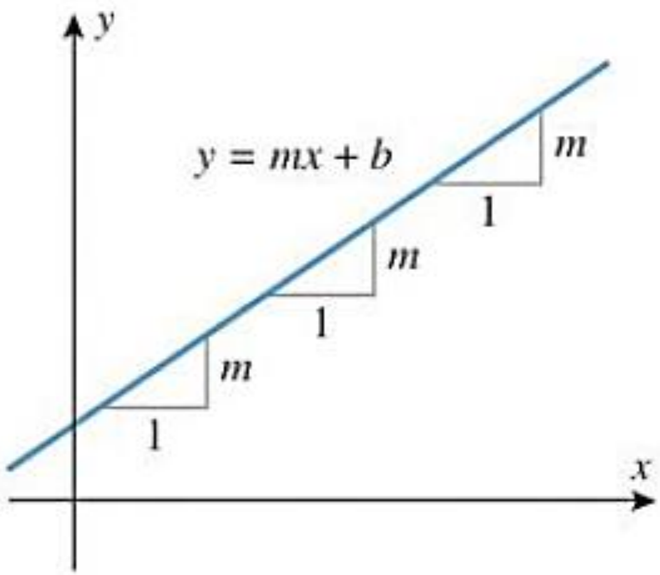
- A velocidade pode ser vista como sendo a taxa de variação da posição em relação ao tempo;

Inclinações e taxas de variação

- A velocidade pode ser vista como sendo a taxa de variação da posição em relação ao tempo;

- As taxas de variação ocorrem em inúmeras aplicações como:
  - Quantidade de bactérias no tempo;
  - Comprimento de uma barra metálica com a temperatura;
  - Custo de produção dependente da quantidade de produtos;

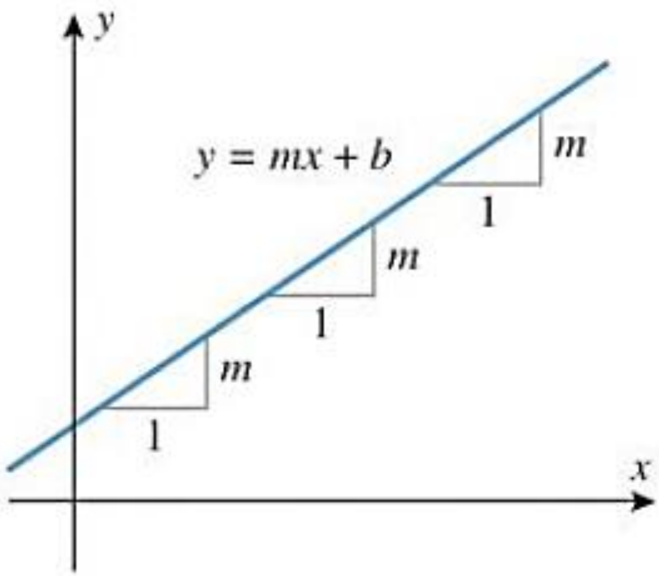
Inclinações e taxas de variação



- Quando $\boldsymbol{y}$ é uma função linear de $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{y} = \boldsymbol{mx} + \boldsymbol{b}$) a inclinação $\boldsymbol{m}$ é uma medida natural da taxa de variação de $\boldsymbol{y}$ em relação a $\boldsymbol{x}$;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Inclinações e taxas de variação



Uma unidade de aumento em x produz sempre m unidades de variação em y.

- Quando y é uma função linear de x ($y = mx + b$) a inclinação m é uma medida natural da taxa de variação de y em relação a x;
- O aumento de 1 unidade em x, produz uma variação de m unidades de y;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 3

Encontrar a taxa de variação de $\boldsymbol{y}$ em relação a $\boldsymbol{x}$.

(a) $y = 2x - 1$

(b) $y = -5x + 1$

Exemplo 3

Encontrar a taxa de variação de $\boldsymbol{y}$ em relação a $\boldsymbol{x}$.

(a) $y = 2x - 1$ $\qquad m = 2$ (tx. de variação)

(b) $y = -5x + 1$

Exemplo 3

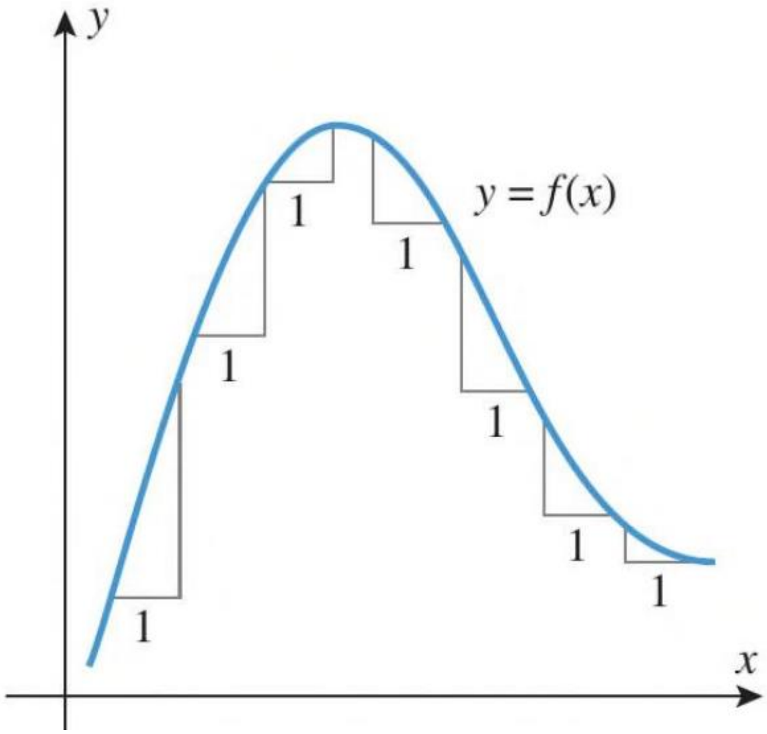
Encontrar a taxa de variação de $\boldsymbol{y}$ em relação a $\boldsymbol{x}$.

(a) $y = 2x - 1$ $\quad m = 2$ (tx. de variação)

(b) $y = -5x + 1$ $\quad m = -5$ (tx. de variação)

Inclinações e taxas de variação

- Para uma curva qualquer a taxa de variação pode não ser linear.



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Inclinações e taxas de variação

- Se $\boldsymbol{y = f(x)}$, então definimos a taxa de variação média $\boldsymbol{r_m}$ de $\boldsymbol{y}$ em relação a $\boldsymbol{x}$ no intervalo $[x_o, x_1]$ como:

$$r_m = \frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o}$$

ou

$$r_m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_o)}{h}$$

Inclinações e taxas de variação

- Se $\boldsymbol{y = f(x)}$, então definimos a taxa de variação média $\boldsymbol{r_m}$ de $\boldsymbol{y}$ em relação a $\boldsymbol{x}$ no intervalo $[x_o, x_1]$ como:

$$r_m = \frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o}$$

ou

$$r_m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_o)}{h}$$

- E a taxa de variação instantânea $\boldsymbol{r_i}$ de $\boldsymbol{y}$ em relação a $\boldsymbol{x}$ será:

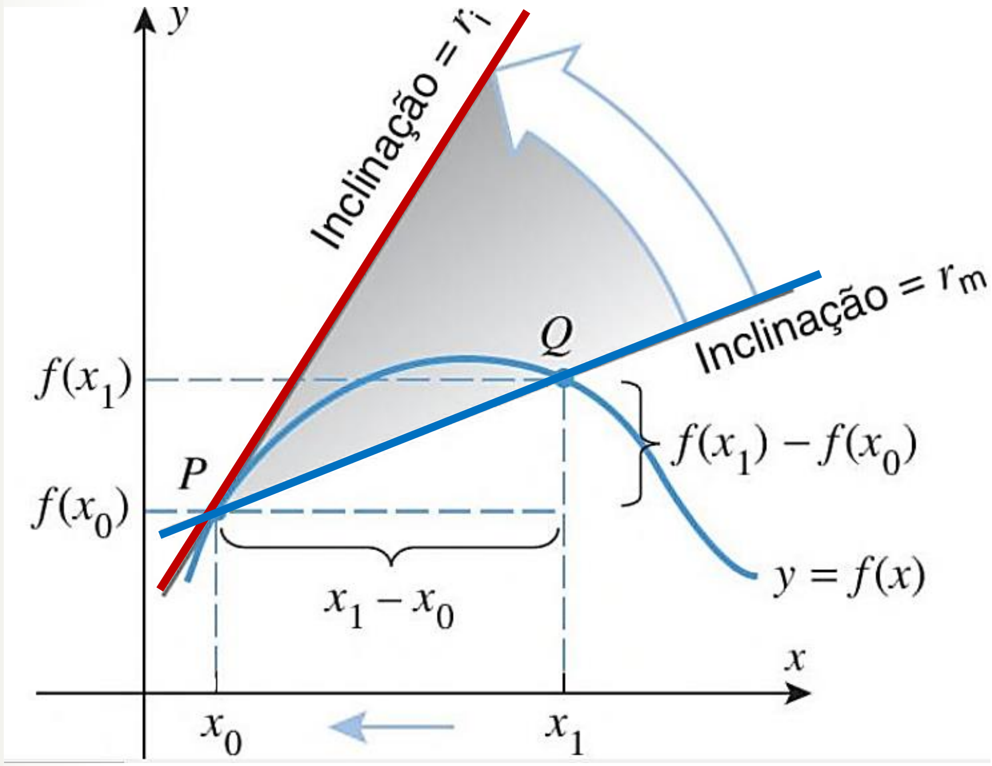
$$r_i = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_0}$$

ou

$$r_i = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_o)}{h}$$

Inclinações e taxas de variação

$$r_i = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_0}$$



$$r_m = \frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 4

Seja a função $\boldsymbol{y = f(x) = x^2 + 1}$

(a) Encontrar a taxa de variação média de $\boldsymbol{y}$ em relação a $\boldsymbol{x}$ no intervalo $[3, 5]$;

(b) E a taxa de variação instantânea de de $\boldsymbol{y}$ em relação a $\boldsymbol{x}$ quando $\boldsymbol{x = -4}$.

Para depois desta aula:

- Reler o capítulo do livro texto (Howard).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Realizar a lista de exercícios.

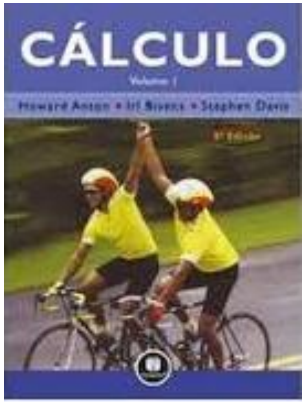
Próxima aula:

- A função derivada e regras de derivação

Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br