Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 05 - Aula 2
Maximizando a derivada direcional

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Maximizando a derivada direcional

- Suponha uma função *f* de duas ou três variáveis.
- Consideremos todas as derivadas direcionais possíveis de *f* em um ponto determinado.

Maximizando a derivada direcional

- Suponha uma função f de duas ou três variáveis.
- Consideremos todas as derivadas direcionais possíveis de f em um ponto determinado.
- Em qual dessas direções f varia mais rapidamente?
- Qual a taxa máxima de variação?

Maximizando a derivada direcional

- Suponha uma função f de duas ou três variáveis.
- Consideremos todas as derivadas direcionais possíveis de f em um ponto determinado.
- Em qual dessas direções f varia mais rapidamente?
- Qual a taxa máxima de variação?
- As respostas a essas perguntas são dada pelo seguinte teorema.

Maximizando a derivada direcional

Teorema 15

Suponha que f seja uma função diferenciável de duas ou três variáveis. O valor máximo da derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ é

$$|\nabla f(\mathbf{x})|$$

e ocorre quando $\mathbf{u}$ tem a mesma direção do vetor gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$.

Maximizando a derivada direcional

Demonstração do Teorema 15

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$$

Maximizando a derivada direcional

Demonstração do Teorema 15

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$$

θ é o ângulo entre ∇f e $\mathbf{u}$.

$$= |\nabla f|\,|\mathbf{u}|\, \cos\theta$$

Maximizando a derivada direcional

Demonstração do Teorema 15

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$$

θ é o ângulo entre ∇f e $\mathbf{u}$.

$$= |\nabla f\,||\mathbf{u}|\,\cos\theta$$

$$= |\nabla f\,|\,\cos\theta$$

Maximizando a derivada direcional

Demonstração do Teorema 15

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f &= \nabla f \cdot \mathbf{u} \\ &= |\nabla f\,||\mathbf{u}| \cos\theta \\ &= |\nabla f\,| \cos\theta \end{aligned}$$

θ é o ângulo entre ∇f e $\mathbf{u}$.

O valor máximo de $\cos\theta$ é 1 e isso ocorre quando $\theta = 0$.

Maximizando a derivada direcional

Demonstração do Teorema 15

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$$

$$= |\nabla f| |\mathbf{u}| \cos\theta$$

$$= |\nabla f| \cos\theta$$

θ é o ângulo entre ∇f e $\mathbf{u}$.

O valor máximo de $\cos\theta$ é 1 e isso ocorre quando $\theta = 0$.

Logo, o valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f$ é $|\nabla f|$ e ocorre quando $\theta = 0$, ou seja, quando $\mathbf{u}$ tem a mesma direção que ∇f.

Maximizando a derivada direcional

Exemplo 1

Se $f(x, y) = xe^y$,

(a) determine a taxa de variação de f no ponto $P(2, 0)$ na direção de P a $Q\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

(b) Em que direção f tem a máxima taxa de variação? Qual é a máxima taxa de variação?

Maximizando a derivada direcional

Se $f(x, y) = xe^y$,

Exemplo 1

(a) determine a taxa de variação de f no ponto $P(2, 0)$ na direção de P a $Q(\frac{1}{2}, 2)$.

(b) Em que direção f tem a máxima taxa de variação? Qual é a máxima taxa de variação?

Solução

(a) o vetor gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle e^y, xe^y \rangle$$

Maximizando a derivada direcional

Se $f(x, y) = xe^y$, **Exemplo 1**

(a) determine a taxa de variação de f no ponto $P(2, 0)$ na direção de P a $Q(\frac{1}{2}, 2)$.

(b) Em que direção f tem a máxima taxa de variação? Qual é a máxima taxa de variação?

Solução

(a) o vetor gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle e^y, xe^y \rangle \Rightarrow \nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$$

Maximizando a derivada direcional

Se $f(x, y) = xe^y$,

Exemplo 1

(a) determine a taxa de variação de f no ponto $P(2, 0)$ na direção de P a $Q(\frac{1}{2}, 2)$.

(b) Em que direção f tem a máxima taxa de variação? Qual é a máxima taxa de variação?

Solução

(a) o vetor gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle e^y, xe^y \rangle \Rightarrow \nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$$

O vetor unitário na direção $\overrightarrow{PQ} = \langle -1{,}5, 2 \rangle$ é $\mathbf{u} = \langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$,

Maximizando a derivada direcional Ex. 1

logo a taxa de variação de f na direção que vai de P a Q é

$$D_{\mathbf{u}} f(2,0) = \nabla f(2,0) \cdot \mathbf{u} = \langle 1, 2 \rangle \cdot \left\langle -\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5} \right\rangle$$

Maximizando a derivada direcional

Ex. 1

logo a taxa de variação de f na direção que vai de P a Q é

$$D_{\mathbf{u}} f(2,0) = \nabla f(2,0) \cdot \mathbf{u} = \langle 1, 2 \rangle \cdot \langle -\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5} \rangle$$

$$= 1\left(-\tfrac{3}{5}\right) + 2\left(\tfrac{4}{5}\right) = 1$$

Maximizando a derivada direcional **Ex. 1**

logo a taxa de variação de f na direção que vai de P a Q é

$$D_{\mathbf{u}} f(2,0) = \nabla f(2,0) \cdot \mathbf{u} = \langle 1, 2 \rangle \cdot \langle -\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5} \rangle$$

$$= 1\left(-\tfrac{3}{5}\right) + 2\left(\tfrac{4}{5}\right) = 1$$

(b) De acordo com o Teorema 15, f aumenta mais depressa na direção do gradiente

$$\nabla f(2,0) = \langle 1, 2 \rangle.$$

Maximizando a derivada direcional Ex. 1

logo a taxa de variação de f na direção que vai de P a Q é

$$D_{\mathbf{u}} f(2, 0) = \nabla f(2, 0) \cdot \mathbf{u} = \langle 1, 2 \rangle \cdot \langle -\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5} \rangle$$

$$= 1\left(-\tfrac{3}{5}\right) + 2\left(\tfrac{4}{5}\right) = 1$$

(b) De acordo com o Teorema 15, f aumenta mais depressa na direção do gradiente

$$\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle.$$

A taxa máxima de variação é

$$|\nabla f(2, 0)| = |\langle 1, 2 \rangle| = \sqrt{5}$$

Planos tangentes às curvas de nível

Planos tangentes às curvas de nível

- Suponha que *S* seja a superfície com a equação $F(x, y, z) = k$. (*superfície de nível de F*).
- Seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto de *S*.

Planos tangentes às curvas de nível

- Suponha que *S* seja a superfície com a equação *F*(x, y, z) = k. (*superfície de nível de F*).
- Seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto de *S*.
- Seja *C* qualquer curva na superfície *S* e que passe pelo ponto *P*.

Planos tangentes às curvas de nível

- Suponha que S seja a superfície com a equação $F(x, y, z) = k$. (*superfície de nível de F*).
- Seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto de S.
- Seja C qualquer curva na superfície S e que passe pelo ponto P.
- A curva C é descrita por uma função vetorial contínua $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$.
- Seja $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$.

Planos tangentes às curvas de nível

- Como *C* pertence a *S*, qualquer ponto precisa satisfazer a equação de *S*, ou seja:

$$F\big(x(t), y(t), z(t)\big) = k$$

Planos tangentes às curvas de nível

- Como *C* pertence a *S*, qualquer ponto precisa satisfazer a equação de *S*, ou seja:

$$F\big(x(t), y(t), z(t)\big) = k$$

- Se *F*, *x(t)*, *y(t)* e *z(t)* são funções diferenciáveis podemos diferenciar a Equação em ambos os lados.

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

Planos tangentes às curvas de nível

- Como *C* pertence a *S*, qualquer ponto precisa satisfazer a equação de *S*, ou seja:

$$F\big(x(t), y(t), z(t)\big) = k$$

- Se *F*, *x(t)*, *y(t)* e *z(t)* são funções diferenciáveis podemos diferenciar a Equação em ambos os lados.

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

- Mas $\nabla F = \langle F_x, F_y, F_z \rangle$ e $r'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$

$$\nabla F \cdot \boldsymbol{r}'(t) = 0$$

Planos tangentes às curvas de nível

- Em particular, se $t = t_0$ temos $\boldsymbol{r}(t_0)$ = < x_0, y_0, z_0 >:

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \boldsymbol{r}'(t_0) = 0$$

Planos tangentes às curvas de nível

- Em particular, se $t = t_0$ temos $\boldsymbol{r}(t_0) = < x_0, y_0, z_0 >$:

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \boldsymbol{r}'(t_0) = 0$$

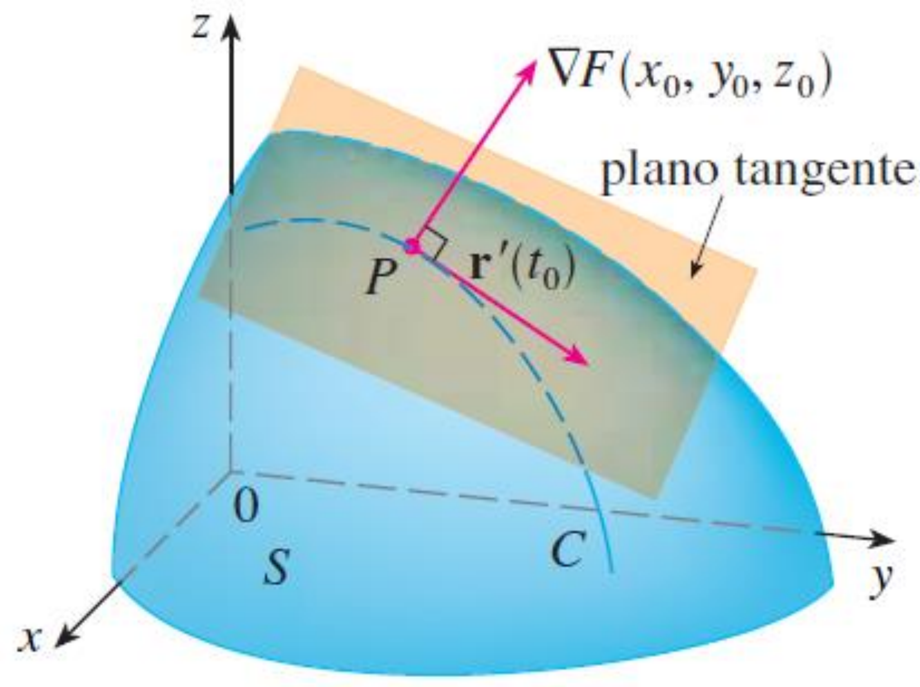
- A última equação nos diz que o vetor gradiente em P $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ é perpendicular ao vetor tangente $\boldsymbol{r}'(t_0)$.

Planos tangentes às curvas de nível

- Em particular, se $t = t_0$ temos $\boldsymbol{r}(t_0) = < x_0, y_0, z_0 >$:

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \boldsymbol{r}'(t_0) = 0$$

- A última equação nos diz que o vetor gradiente em P $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ é perpendicular ao vetor tangente $\boldsymbol{r}'(t_0)$.



Planos tangentes às curvas de nível

- É natural definir o plano tangente à superfície de nível $F(x, y, z) = k$ em $P(x_0, y_0, z_0)$ como o plano que passa por P e tem vetor normal $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.

Planos tangentes às curvas de nível

- É natural definir o plano tangente à superfície de nível $F(x, y, z) = k$ em $P(x_0, y_0, z_0)$ como o plano que passa por P e tem vetor normal $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.
- Utilizando a equação geral do plano:

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Planos tangentes às curvas de nível

- É natural definir o plano tangente à superfície de nível $F(x, y, z) = k$ em $P(x_0, y_0, z_0)$ como o plano que passa por P e tem vetor normal $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.
- Utilizando a equação geral do plano:

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

- A **reta normal** a S em P é a reta passando através de P e perpendicular ao plano tangente, assim:

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

Planos tangentes às curvas de nível

Ex. 2

Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto $(-2, 1, -3)$ ao elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

Solução

O elipsoide é a superfície de nível (com $k = 3$) da função

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$$

Planos tangentes às curvas de nível

Ex. 2

Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto $(-2, 1, -3)$ ao elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

Solução

O elipsoide é a superfície de nível (com $k = 3$) da função

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$$

$$F_x(x, y, z) = \frac{x}{2}$$

$$F_x(-2, 1, -3) = -1$$

Planos tangentes às curvas de nível

Ex. 2

Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto $(-2, 1, -3)$ ao elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

Solução

O elipsoide é a superfície de nível (com $k = 3$) da função

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$$

$$F_x(x, y, z) = \frac{x}{2} \qquad F_y(x, y, z) = 2y$$

$$F_x(-2, 1, -3) = -1 \qquad F_y(-2, 1, -3) = 2$$

Planos tangentes às curvas de nível

Ex. 2

Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto $(-2, 1, -3)$ ao elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

Solução

O elipsoide é a superfície de nível (com $k = 3$) da função

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$$

$$F_x(x, y, z) = \frac{x}{2} \qquad F_y(x, y, z) = 2y \qquad F_z(x, y, z) = \frac{2z}{9}$$

$$F_x(-2, 1, -3) = -1 \qquad F_y(-2, 1, -3) = 2 \qquad F_z(-2, 1, -3) = -\tfrac{2}{3}$$

Planos tangentes às curvas de nível

Ex. 2

Então, a equação do plano tangente no ponto $(-2, 1, -3)$ é

$$-1(x + 2) + 2(y - 1) - \tfrac{2}{3}(z + 3) = 0$$

Planos tangentes às curvas de nível

Ex. 2

Então, a equação do plano tangente no ponto $(-2, 1, -3)$ é

$$-1(x + 2) + 2(y - 1) - \tfrac{2}{3}(z + 3) = 0$$

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0.$$

Planos tangentes às curvas de nível Ex. 2

Então, a equação do plano tangente no ponto $(-2, 1, -3)$ é

$$-1(x + 2) + 2(y - 1) - \tfrac{2}{3}(z + 3) = 0$$

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0.$$

as equações simétricas da reta normal são

$$\frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{-\frac{2}{3}}$$

Planos tangentes às curvas de nível

Ex. 2

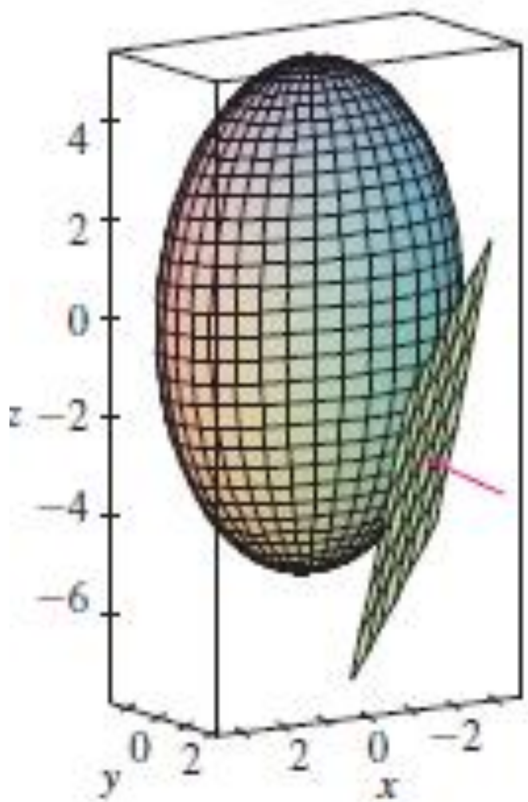
Então, a equação do plano tangente no ponto $(-2, 1, -3)$ é

$$-1(x+2) + 2(y-1) - \tfrac{2}{3}(z+3) = 0$$

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0.$$

as equações simétricas da reta normal são

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-\frac{2}{3}}$$



Importância do vetor gradiente

Importância do vetor gradiente

- Se considerarmos uma função *f* de duas variáveis e um ponto $P(x_0, y_0)$ em seu domínio.
- O vetor gradiente $\nabla f\,(x_0, y_0)$ dá a direção de um aumento mais rápido de *f*.

Importância do vetor gradiente

- Se considerarmos uma função f de duas variáveis e um ponto $P(x_0, y_0)$ em seu domínio.
- O vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ dá a direção de um aumento mais rápido de f.
- Pode ser mostrado que $\nabla f(x_0, y_0)$ é perpendicular à curva de nível $f(x, y) = k$ que passa por P.

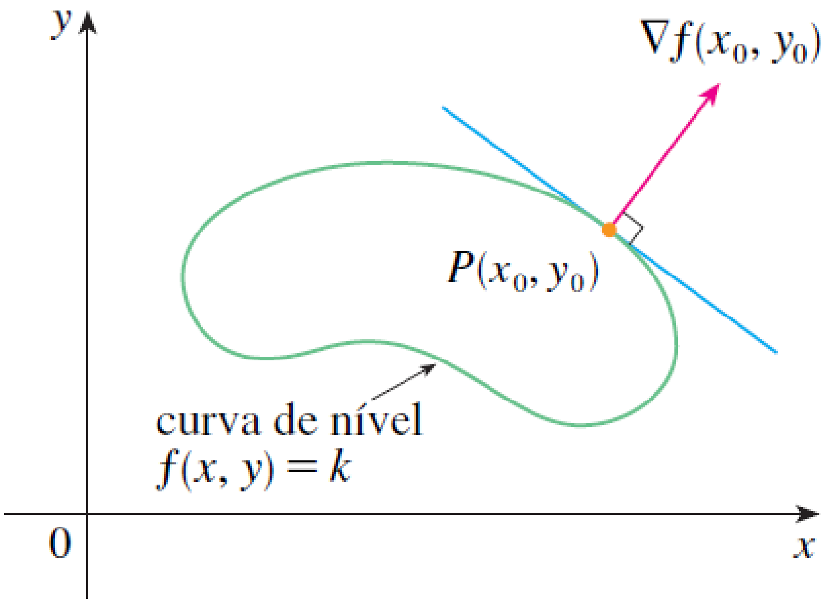


FIGURA 11

Importância do vetor gradiente

- Em um mapa topográfico de um morro se $f(x, y)$ representar a altura acima do nível do mar do ponto de coordenadas (x, y).

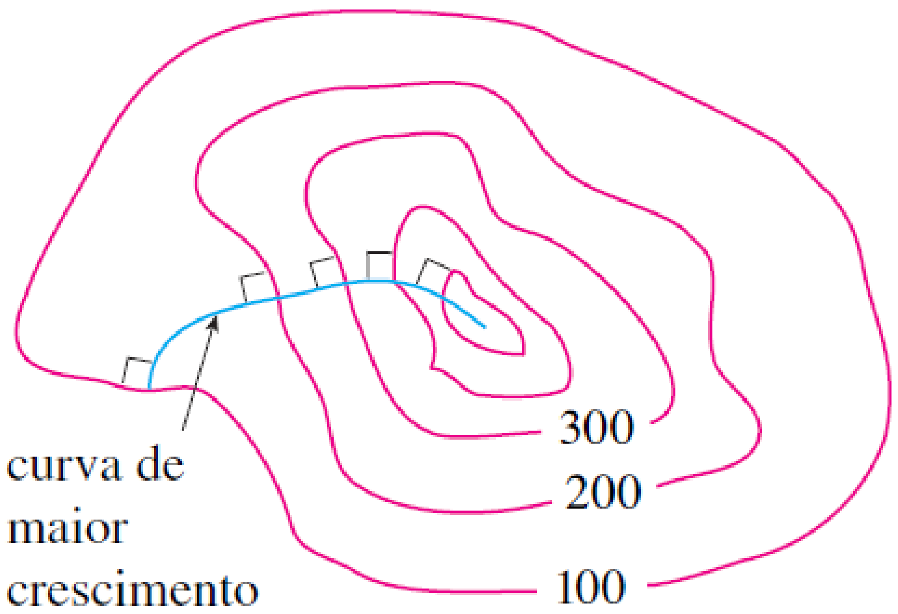


FIGURA 12

Importância do vetor gradiente

- Em um mapa topográfico de um morro se *f*(x, y) representar a altura acima do nível do mar do ponto de coordenadas (x, y).

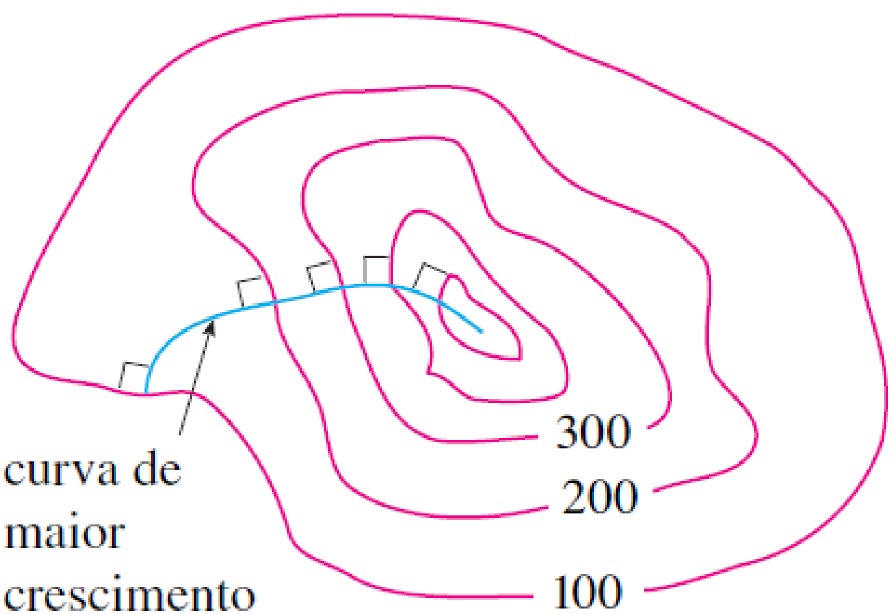


FIGURA 12

- A curva de aclive máximo pode ser desenhada como na Figura 12 utilizando o conceito do vetor gradiente.

Importância do vetor gradiente

- Para uma função $f(x, y, z)$ e $P(x_0, y_0, z_0)$ em seu domínio. Temos duas propriedades relevantes:

Importância do vetor gradiente

- Para uma função $f(x, y, z)$ e $P(x_0, y_0, z_0)$ em seu domínio. Temos duas propriedades relevantes:

  1. O vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ dá a direção de um aumento mais rápido de f.

Importância do vetor gradiente

- Para uma função $f(x, y, z)$ e $P(x_0, y_0, z_0)$ em seu domínio. Temos duas propriedades relevantes:

  1. O vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ dá a direção de um aumento mais rápido de f.
  2. O vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é ortogonal à superfície de nível S de f no ponto P.

Importância do vetor gradiente

- Para uma função $f(x, y, z)$ e $P(x_0, y_0, z_0)$ em seu domínio. Temos duas propriedades relevantes:

  1. O vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ dá a direção de um aumento mais rápido de f.
  2. O vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é ortogonal à superfície de nível S de f no ponto P.

- ✓ Quando nos afastamos de P em uma superfície de nível S, o valor da função f não se altera.
- ✓ Parece razoável que, se nos movermos em uma direção perpendicular, obteremos o maior aumento.

Para depois desta aula:

- Estudar seção 14.6 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

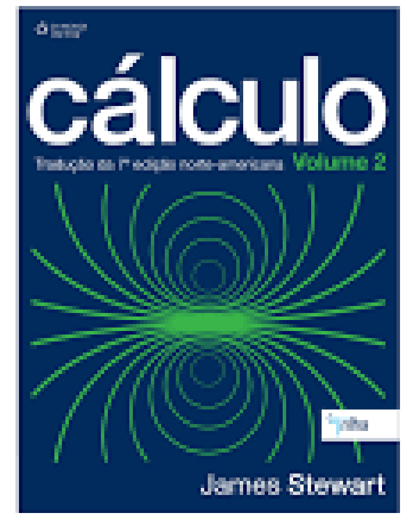
Próxima aula:

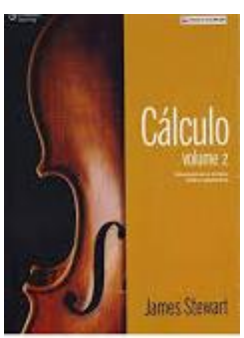
- Valores de máximo e de mínimo.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios
com base na 7ª ed.





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br