Cálculo I

Licenciatura

Semana 05 - Aula 2
Técnicas de diferenciação

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

1 – Derivada de uma constante (c)

Se $f(x) = c$ a sua derivada é:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

1 – Derivada de uma constante (c)

Se $f(x) = c$ a sua derivada é:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} =$$

1 – Derivada de uma constante (c)

Se $f(x) = c$ a sua derivada é:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

1 – Derivada de uma constante (c)

Se $f(x) = c$ a sua derivada é:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

$$f'(x) = \frac{d[c]}{dx} = 0$$

1 – Derivada de uma constante (c)

2.3.1 TEOREMA *A derivada de uma função constante é 0; isto é, se c for um número real qualquer, então*

$$\frac{d}{dx}[c] = 0 \tag{1}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

1 – Derivada de uma constante (c)

2.3.1 TEOREMA *A derivada de uma função constante é 0; isto é, se c for um número real qualquer, então*

$$\frac{d}{dx}[c] = 0 \qquad (1)$$

Exemplos:

$$\frac{d}{dx}[1] = 0$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

1 – Derivada de uma constante (c)

2.3.1 TEOREMA *A derivada de uma função constante é 0; isto é, se c for um número real qualquer, então*

$$\frac{d}{dx}[c] = 0 \qquad (1)$$

Exemplos:

$$\frac{d}{dx}[1] = 0$$

$$\frac{d}{dx}[-3] = 0$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

2 – Derivada de potências de x (x^n)

2.3.2 TEOREMA ***(Regra da Potência)*** *Se n for um número inteiro positivo, então*

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1} \tag{5}$$

Esta regra pode ser ampliada para qualquer potência real $\boldsymbol{r}$.

2 – Derivada de potências de x (x^n)

2.3.2 TEOREMA ***(Regra da Potência)*** *Se n for um número inteiro positivo, então*

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1} \tag{5}$$

Esta regra pode ser ampliada para qualquer potência real $\boldsymbol{r}$.

Exemplo:

$$\frac{d}{dx}[x^2] =$$

2 – Derivada de potências de x (x^n)

2.3.2 TEOREMA ***(Regra da Potência)*** *Se n for um número inteiro positivo, então*

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1} \tag{5}$$

Esta regra pode ser ampliada para qualquer potência real $\boldsymbol{r}$.

Exemplo:

$$\frac{d}{dx}[x^2] = 2x^{2-1} =$$

2 – Derivada de potências de x (x^n)

2.3.2 TEOREMA ***(Regra da Potência)*** *Se n for um número inteiro positivo, então*

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1} \tag{5}$$

Esta regra pode ser ampliada para qualquer potência real $\boldsymbol{r}$.

Exemplo:

$$\frac{d}{dx}[x^2] = 2x^{2-1} = 2x$$

3 – Constante vezes a função $(cf(x))$

2.3.4 TEOREMA (*Regra do Múltiplo Constante*) *Se f for diferenciável em x e c for um número real qualquer, então cf também será diferenciável em x e*

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)] \tag{8}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

3 – Constante vezes a função $(cf(x))$

2.3.4 TEOREMA ***(Regra do Múltiplo Constante)*** *Se f for diferenciável em x e c for um número real qualquer, então cf também será diferenciável em x e*

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)] \tag{8}$$

Exemplo:

$$\frac{d}{dx}[4x^8] =$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

3 – Constante vezes a função $(cf(x))$

2.3.4 TEOREMA ***(Regra do Múltiplo Constante)*** *Se f for diferenciável em x e c for um número real qualquer, então cf também será diferenciável em x e*

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)] \tag{8}$$

Exemplo:

$$\frac{d}{dx}[4x^8] = 4\frac{d}{dx}[x^8]$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

3 – Constante vezes a função $(cf(x))$

2.3.4 TEOREMA (*Regra do Múltiplo Constante*) *Se f for diferenciável em x e c for um número real qualquer, então cf também será diferenciável em x e*

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)] \qquad (8)$$

Exemplo:

$$\frac{d}{dx}[4x^8] = 4\frac{d}{dx}[x^8] = 4(8x^{8-1}) =$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

3 – Constante vezes a função $(cf(x))$

2.3.4 TEOREMA ***(Regra do Múltiplo Constante)*** *Se f for diferenciável em x e c for um número real qualquer, então cf também será diferenciável em x e*

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)] \tag{8}$$

Exemplo:

$$\frac{d}{dx}[4x^8] = 4\frac{d}{dx}[x^8] = 4(8x^{8-1}) = 32x^7$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

4 – Regra da soma e da diferença

2.3.5 TEOREMA ***(Regras da Soma e da Diferença)*** *Se f e g forem diferenciáveis em x, então $f+g$ e $f-g$ também o serão e*

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)] \tag{9}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)] \tag{10}$$

Em palavras, *a derivada de uma soma é igual à soma das derivadas*, e *a derivada de uma diferença é igual à diferença das derivadas.*

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

4 – Regra da soma e da diferença

2.3.5 TEOREMA ***(Regras da Soma e da Diferença)*** *Se f e g forem diferenciáveis em x, então f + g e f − g também o serão e*

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)] \tag{9}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)] \tag{10}$$

Em palavras, *a derivada de uma soma é igual à soma das derivadas,* e *a derivada de uma diferença é igual à diferença das derivadas.*

Exemplo:

$$\frac{d}{dx}[2x^6 + x^{-9}] =$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

4 – Regra da soma e da diferença

2.3.5 TEOREMA (*Regras da Soma e da Diferença*) *Se f e g forem diferenciáveis em x, então $f+g$ e $f-g$ também o serão e*

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)] \qquad (9)$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)] \qquad (10)$$

Em palavras, *a derivada de uma soma é igual à soma das derivadas*, e *a derivada de uma diferença é igual à diferença das derivadas.*

Exemplo:

$$\frac{d}{dx}[2x^6 + x^{-9}] = 2\frac{d}{dx}[x^6] + \frac{d}{dx}x^{-9}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

4 – Regra da soma e da diferença

2.3.5 TEOREMA ***(Regras da Soma e da Diferença)*** *Se f e g forem diferenciáveis em x, então $f+g$ e $f-g$ também o serão e*

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)] \tag{9}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)] \tag{10}$$

Em palavras, *a derivada de uma soma é igual à soma das derivadas*, e *a derivada de uma diferença é igual à diferença das derivadas.*

Exemplo:

$$\frac{d}{dx}[2x^6 + x^{-9}] = 2\frac{d}{dx}[x^6] + \frac{d}{dx}x^{-9} = 12x^5 - 9x^{-10}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

5 – Regra do produto $\left(\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\right)$

2.4.1 TEOREMA ***(Regra do Produto)*** *Se f e g forem diferenciáveis em x, então o produto $f \cdot g$ também será e*

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] \quad (1)$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

5 – Regra do produto $\left(\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\right)$

2.4.1 TEOREMA ***(Regra do Produto)*** *Se f e g forem diferenciáveis em x, então o produto $f \cdot g$ também será e*

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] \quad (1)$$

Exemplo:

$$\frac{d}{dt}\left[(1+t)\sqrt{t}\,\right] =$$

5 – Regra do produto ($\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]$)

2.4.1 TEOREMA ***(Regra do Produto)*** *Se f e g forem diferenciáveis em x, então o produto $f \cdot g$ também será e*

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] \quad (1)$$

Exemplo:

$$\frac{d}{dt}\left[(1+t)\sqrt{t}\,\right] = (1+t)\frac{d}{dt}\left[t^{\frac{1}{2}}\right]$$

5 – Regra do produto $\left(\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\right)$

2.4.1 TEOREMA ***(Regra do Produto)*** *Se f e g forem diferenciáveis em x, então o produto $f \cdot g$ também será e*

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] \tag{1}$$

Exemplo:

$$\frac{d}{dt}\left[(1+t)\sqrt{t}\,\right] = (1+t)\frac{d}{dt}\left[t^{\frac{1}{2}}\right] + \sqrt{t}\frac{d}{dt}(1+t)$$

5 – Regra do produto $\left(\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\right)$

2.4.1 TEOREMA ***(Regra do Produto)*** *Se f e g forem diferenciáveis em x, então o produto $f \cdot g$ também será e*

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] \quad (1)$$

Exemplo:

$$\frac{d}{dt}\left[(1+t)\sqrt{t}\,\right] = (1+t)\frac{d}{dt}\left[t^{\frac{1}{2}}\right] + \sqrt{t}\frac{d}{dt}(1+t)$$

$$= (1+\mathrm{t})\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1}$$

5 – Regra do produto $\left(\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\right)$

2.4.1 TEOREMA ***(Regra do Produto)*** *Se f e g forem diferenciáveis em x, então o produto $f \cdot g$ também será e*

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] \qquad (1)$$

Exemplo:

$$\frac{d}{dt}\left[(1+t)\sqrt{t}\,\right] = (1+t)\frac{d}{dt}\left[t^{\frac{1}{2}}\right] + \sqrt{t}\frac{d}{dt}(1+t)$$

$$= (1+\mathrm{t})\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1} + \sqrt{t}(0+1)$$

5 – Regra do produto $\left(\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\right)$

2.4.1 TEOREMA ***(Regra do Produto)*** *Se f e g forem diferenciáveis em x, então o produto $f \cdot g$ também será e*

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] \qquad (1)$$

Exemplo:

$$\frac{d}{dt}\left[(1+t)\sqrt{t}\,\right] = (1+t)\frac{d}{dt}\left[t^{\frac{1}{2}}\right] + \sqrt{t}\frac{d}{dt}(1+t)$$

$$= (1+\mathrm{t})\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1} + \sqrt{t}(0+1)$$

$$= \frac{(1+t)}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}$$

prof. Henrique A M Faria

6 – Regra do quociente $\left(\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]\right)$

2.4.2 TEOREMA ***(Regra do Quociente)*** *Se f e g forem diferenciáveis em x e g(x) ≠ 0, então f/g será diferenciável em x e*

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2} \qquad (2)$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6 – Regra do quociente $\left(\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]\right)$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

Exemplo:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2-1}{x^4+1}\right] =$$

6 – Regra do quociente$\left(\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]\right)$

Exemplo:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2-1}{x^4+1}\right] =$$

$$= \frac{(x^4+1)\frac{d}{dx}(x^2-1) - (x^2-1)\frac{d}{dx}(x^4+1)}{(x^4+1)^2} =$$

6 – Regra do quociente $\left(\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]\right)$

Exemplo:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2-1}{x^4+1}\right] =$$

$$= \frac{(x^4+1)\frac{d}{dx}(x^2-1) - (x^2-1)\frac{d}{dx}(x^4+1)}{(x^4+1)^2} =$$

$$= \frac{(x^4+1)2x - (x^2-1)4x^3}{(x^4+1)^2} =$$

6 – Regra do quociente $\left(\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]\right)$

Exemplo:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2-1}{x^4+1}\right] =$$

$$= \frac{(x^4+1)\frac{d}{dx}(x^2-1) - (x^2-1)\frac{d}{dx}(x^4+1)}{(x^4+1)^2} =$$

$$= \frac{(x^4+1)2x - (x^2-1)4x^3}{(x^4+1)^2} =$$

$$= \frac{2x[(x^4+1) - (x^2-1)2x^2)]}{(x^4+1)^2}$$

6 – Regra do quociente $\left(\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]\right)$

Exemplo:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2-1}{x^4+1}\right] =$$

$$= \frac{(x^4+1)\frac{d}{dx}(x^2-1) - (x^2-1)\frac{d}{dx}(x^4+1)}{(x^4+1)^2} =$$

$$= \frac{(x^4+1)2x - (x^2-1)4x^3}{(x^4+1)^2} =$$

$$= \frac{2x[(x^4+1) - (x^2-1)2x^2)]}{(x^4+1)^2} =$$

$$= \frac{2x[\,x^4+1 - 2x^4+ 2x^2]}{(x^4+1)^2} =$$

6 – Regra do quociente$\left(\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]\right)$

Exemplo:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2-1}{x^4+1}\right] =$$

$$= \frac{(x^4+1)\frac{d}{dx}(x^2-1) \; - \; (x^2-1)\frac{d}{dx}(x^4+1)}{(x^4+1)^2} =$$

$$= \frac{(x^4+1)2x - (x^2-1)4x^3}{(x^4+1)^2} =$$

$$= \frac{2x[(x^4+1) - (x^2-1)2x^2)]}{(x^4+1)^2} =$$

$$= \frac{2x[\,x^4+1 - 2x^4 + 2x^2]}{(x^4+1)^2} =$$

$$= \frac{2x\,(-\,x^4 + 2x^2 + 1)}{(x^4+1)^2}$$

Resumo das regras de derivação

$\frac{d}{dx}[c] = 0$
$(cf)' = cf'$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Resumo das regras de derivação

REGRA

$\frac{d}{dx}[c] = 0$	$(f+g)' = f' + g'$
$(cf)' = cf'$	$(f-g)' = f' - g'$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Resumo das regras de derivação

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$\frac{d}{dx}[c] = 0$	$(f + g)' = f' + g'$	$(f \cdot g)' = f \cdot g' + g \cdot f'$
$(cf)' = cf'$	$(f - g)' = f' - g'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Resumo das regras de derivação

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$\frac{d}{dx}[c] = 0$	$(f+g)' = f' + g'$	$(f \cdot g)' = f \cdot g' + g \cdot f'$	
$(cf)' = cf'$	$(f-g)' = f' - g'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$	$\frac{d}{dx}[x^r] = rx^{r-1}$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Derivada de ordem superior $(f''(x), f'''(x))$

$$f', \quad f'' = (f')', \quad f''' = (f'')', \quad f^{(4)} = (f''')', f^{(5)} = (f^{(4)})', \ldots$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Derivada de ordem superior $(f''(x), f'''(x))$

$$f', \quad f'' = (f')', \quad f''' = (f'')', \quad f^{(4)} = (f''')', f^{(5)} = (f^{(4)})', \ldots$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)]$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}[f(x)]\right] = \frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]\right] = \frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Para depois desta aula:

- Reler o capítulo do livro texto (Howard).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Realizar a lista de exercícios.

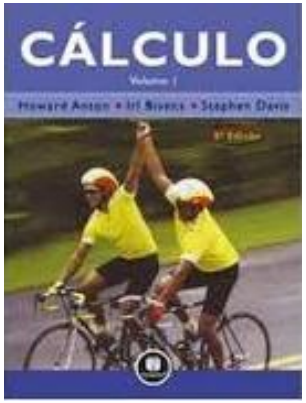
Próxima aula:

- Função derivada.

Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br