Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 06 - Aula 1
Valores de máximo e mínimo

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Valores de máximo e mínimo

- Um dos principais usos da derivada ordinária é na determinação dos valores máximo e mínimo.
- Nesta aula veremos como usar as derivadas parciais para localizar os pontos de máximo e mínimo de uma função de duas variáveis.

Valores de máximo e mínimo

- Um dos principais usos da derivada ordinária é na determinação dos valores máximo e mínimo.
- Nesta aula veremos como usar as derivadas parciais para localizar os pontos de máximo e mínimo de uma função de duas variáveis.
- Este conceito pode ser usado para maximizar ou minimizar dimensões de objetos ou relações de dependência.
- Por exemplo, maiores volumes de embalagens gastando a menor quantidade de material.

Valores de máximo e mínimo

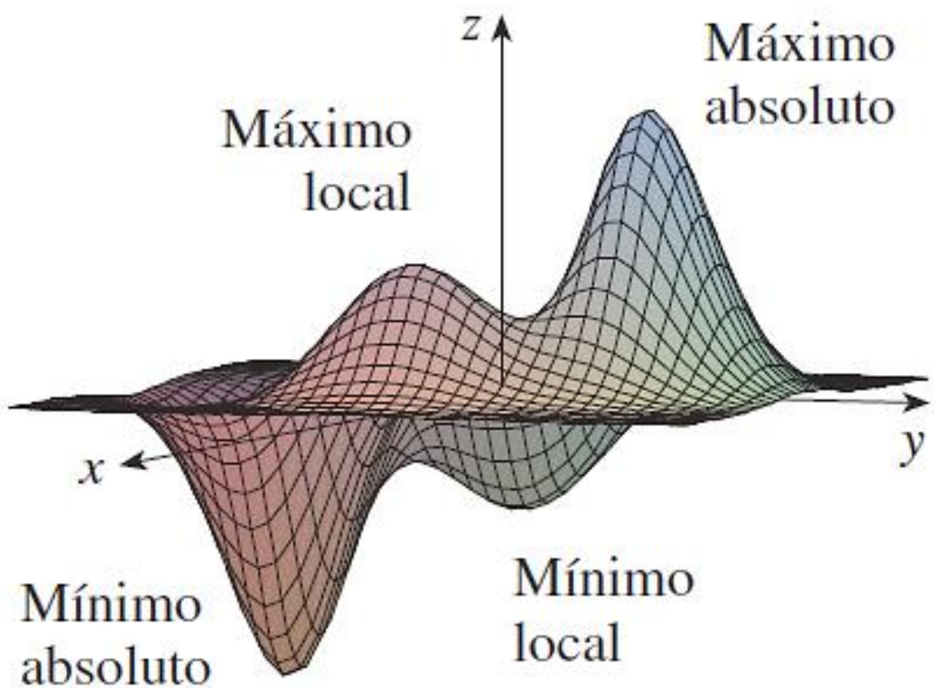


FIGURA 1

- Na Figura 1 existem dois pontos (a, b) nos quais *f* tem um máximo local.

Valores de máximo e mínimo

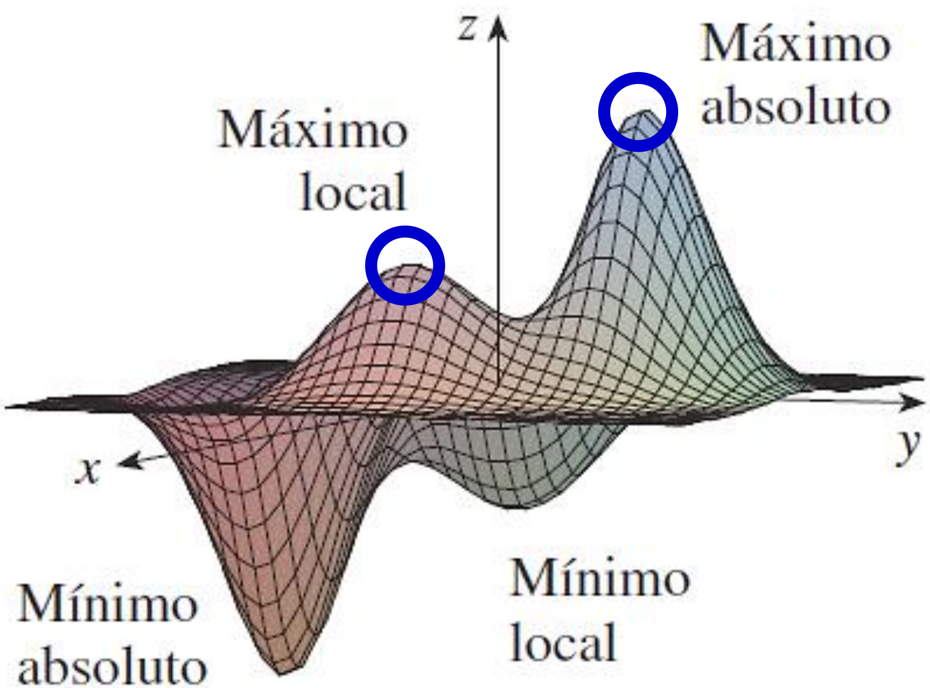


FIGURA 1

- Na Figura 1 existem dois pontos (a, b) nos quais *f* tem um máximo local.
- O maior destes dois valores é o máximo absoluto.

Valores de máximo e mínimo

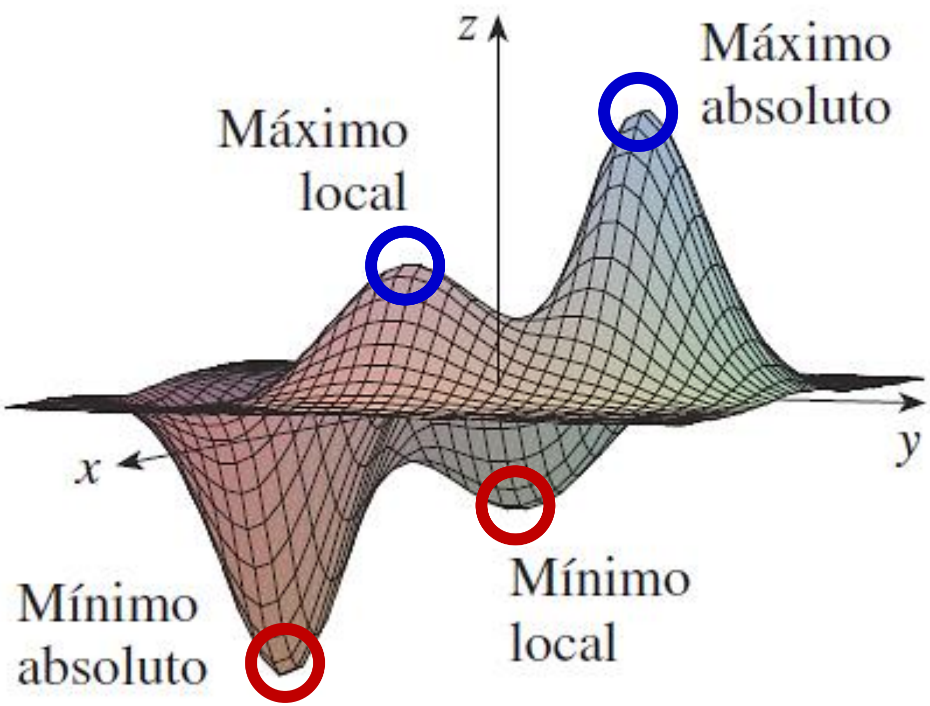


FIGURA 1

- Na Figura 1 existem dois pontos (a, b) nos quais *f* tem um máximo local.
- O maior destes dois valores é o máximo absoluto.
- Esta função *f* tem dois mínimos locais onde *f* (a, b) é menor que os valores próximos.

Valores de máximo e mínimo

Definição 1

Uma função de duas variáveis tem um **máximo local** em (a, b) se

$$f(x, y) \leqslant f(a, b) \text{ quando } (x, y) \text{ está próximo de } (a, b.)$$

Valores de máximo e mínimo

Definição 1

Uma função de duas variáveis tem um **máximo local** em (a, b) se

$f(x, y) \leqslant f(a, b)$ quando (x, y) está próximo de $(a, b.)$

Isso significa que $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ para todos os pontos (x, y) em alguma bola aberta com centro (a, b).

O número $f(a, b)$ é chamado **valor máximo local**.

Valores de máximo e mínimo

Definição 1

Uma função de duas variáveis tem um **máximo local** em (a, b) se

$$f(x, y) \leq f(a, b) \text{ quando } (x, y) \text{ está próximo de } (a, b.)$$

Isso significa que $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todos os pontos (x, y) em alguma bola aberta com centro (a, b).

O número $f(a, b)$ é chamado **valor máximo local**.

Se $f(x, y) \geq f(a, b)$ quando (x, y) está próximo de $(a, b.)$

então f tem um **mínimo local** em (a, b) e $f(a, b)$ é um **valor mínimo local**.

Valores de máximo e mínimo

Definição 1

Se as inequações da Definição 1 valerem para *todos* os pontos (x, y) do domínio de f, então f tem um **máximo absoluto** (ou **mínimo absoluto**) em (a, b).

Valores de máximo e mínimo

Definição 1

Se as inequações da Definição 1 valerem para *todos* os pontos (x, y) do domínio de f, então f tem um **máximo absoluto** (ou **mínimo absoluto**) em (a, b).

Teorema 2

Se f tem um máximo ou mínimo local em (a, b) e as derivadas parciais de primeira ordem de f existem nesses pontos, então

$$f_x(a, b) = 0 \text{ e } f_y(a, b) = 0.$$

Valores de máximo e mínimo

- A interpretação geométrica do Teorema 2 é que o gráfico de f tem um plano tangente em um máximo ou mínimo local.
- Portanto, o plano tangente deve ser horizontal.

Valores de máximo e mínimo

- A interpretação geométrica do Teorema 2 é que o gráfico de f tem um plano tangente em um máximo ou mínimo local.
- Portanto, o plano tangente deve ser horizontal.
- Se impusermos f_x (a, b) = 0 e f_y (a, b) = 0 na equação do plano tangente:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Valores de máximo e mínimo

- A interpretação geométrica do Teorema 2 é que o gráfico de *f* tem um plano tangente em um máximo ou mínimo local.
- Portanto, o plano tangente deve ser horizontal.
- Se impusermos $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$ na equação do plano tangente:

$$z - z_0 = \cancel{f_x(x_0, y_0)}(x - x_0) + \cancel{f_y(x_0, y_0)}(y - y_0)$$

$$z = z_0$$

Valores de máximo e mínimo

- Um ponto (a, b) é chamado ponto crítico (ou ponto estacionário) de f se $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$.
- Ou se uma das derivadas parciais não existir.

Valores de máximo e mínimo

- Um ponto (a, b) é chamado ponto crítico (ou ponto estacionário) de f se f_x (a, b) = 0 e f_y (a, b) = 0.
- Ou se uma das derivadas parciais não existir.
- O Teorema 2 diz que se f tem um máximo ou mínimo local em (a, b), então (a, b) é um ponto crítico de f .

Valores de máximo e mínimo

- Um ponto (a, b) é chamado ponto crítico (ou ponto estacionário) de f se f_x (a, b) = 0 e f_y (a, b) = 0.
- Ou se uma das derivadas parciais não existir.
- O Teorema 2 diz que se f tem um máximo ou mínimo local em (a, b), então (a, b) é um ponto crítico de f.
- No entanto, nem todos os pontos críticos originam máximos ou mínimos.
- Em um ponto crítico, f pode ter um máximo local ou um mínimo local, ou ainda nenhum dos dois.

Valores de máximo e mínimo

Exemplo 1

Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

Determine se há pontos de mínimo ou de máximo.

Valores de máximo e mínimo

Exemplo 1

Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

Determine se há pontos de mínimo ou de máximo.

Solução:

$$f_x(x, y) = 2x - 2$$

$$f_y(x, y) = 2y - 6$$

Valores de máximo e mínimo

Exemplo 1

Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

Determine se há pontos de mínimo ou de máximo.

Solução:

$f_x(x, y) = 2x - 2$ são nulas quando $x = 1$ e $y = 3$

$f_y(x, y) = 2y - 6$ portanto, o único ponto crítico é $(1, 3)$

Valores de máximo e mínimo

Exemplo 1

Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

Determine se há pontos de mínimo ou de máximo.

Solução:

$f_x(x, y) = 2x - 2$ são nulas quando $x = 1$ e $y = 3$

$f_y(x, y) = 2y - 6$ portanto, o único ponto crítico é $(1, 3)$

Completando os quadrados, achamos

$$f(x, y) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2$$

Valores de máximo e mínimo

Exemplo 1

Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

Determine se há pontos de mínimo ou de máximo.

Solução:

$f_x(x, y) = 2x - 2$ são nulas quando $x = 1$ e $y = 3$

$f_y(x, y) = 2y - 6$ portanto, o único ponto crítico é $(1, 3)$

Completando os quadrados, achamos

$$f(x, y) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2$$

Já que $(x - 1)^2 \geqslant 0$ e $(y - 3)^2 \geqslant 0$, temos $f(x, y) \geqslant 4$

Valores de máximo e mínimo

Exemplo 1

Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

Determine se há pontos de mínimo ou de máximo.

Solução:

$f_x(x, y) = 2x - 2$

$f_y(x, y) = 2y - 6$

são nulas quando $x = 1$ e $y = 3$

portanto, o único ponto crítico é $(1, 3)$

Completando os quadrados, achamos

$$f(x, y) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2$$

Já que $(x - 1)^2 \geqslant 0$ e $(y - 3)^2 \geqslant 0$, temos $f(x, y) \geqslant 4$

Logo, $f(1, 3) = 4$ é um mínimo local.

Valores de máximo e mínimo

Exemplo 1

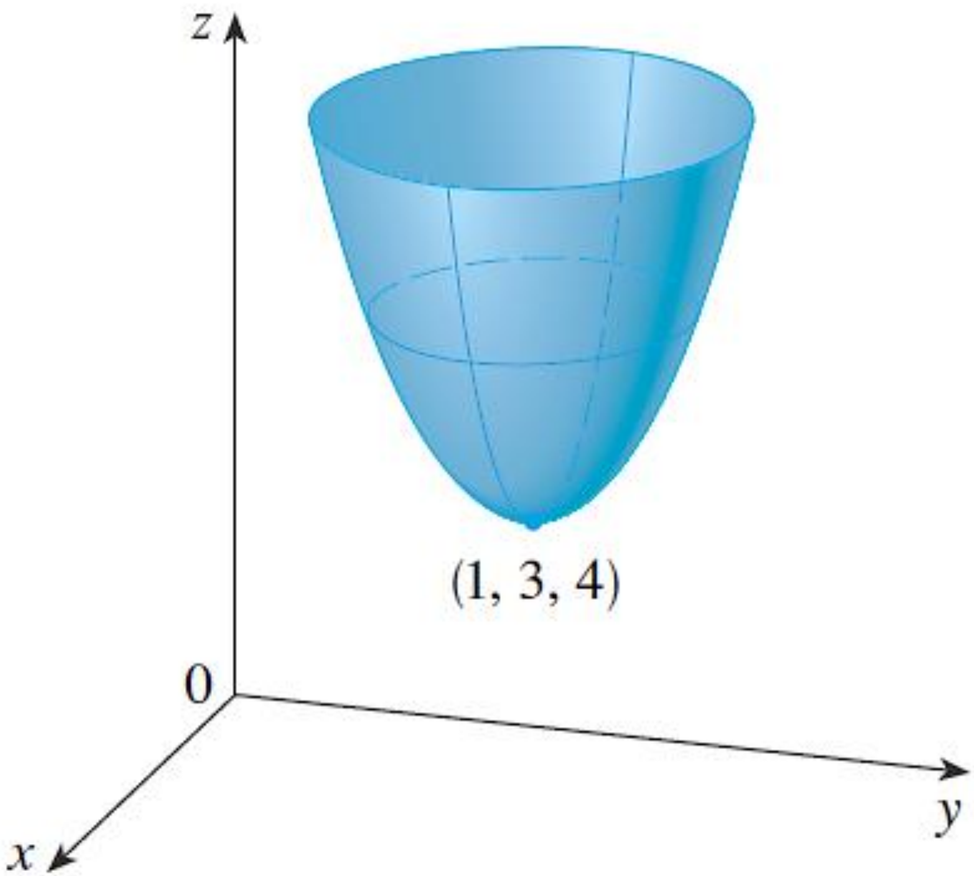


FIGURA 2 $z = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

ponto crítico

$(1, 3)$

Valores de máximo e mínimo

Exemplo 2

Determine os valores extremos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

Exemplo 2

Determine os valores extremos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

Solução:

Como $f_x = -2x$ e $f_y = 2y$, o único ponto crítico é $(0, 0)$.

Valores de máximo e mínimo

Exemplo 2

Determine os valores extremos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

Solução:

Como $f_x = -2x$ e $f_y = 2y$, o único ponto crítico é $(0, 0)$.

para os pontos sobre o eixo x, temos $y = 0$, portanto

$$f(x, y) = -x^2 < 0 \text{ (se } x \neq 0).$$

Valores de máximo e mínimo

Exemplo 2

Determine os valores extremos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

Solução:

Como $f_x = -2x$ e $f_y = 2y$, o único ponto crítico é $(0, 0)$.

para os pontos sobre o eixo x, temos $y = 0$, portanto

$$f(x, y) = -x^2 < 0 \text{ (se } x \neq 0\text{)}.$$

para os pontos sobre o eixo y, temos $x = 0$,

$$f(x, y) = y^2 > 0 \text{ (se } y \neq 0\text{)}.$$

Valores de máximo e mínimo

Exemplo 2

Determine os valores extremos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

Solução:

Como $f_x = -2x$ e $f_y = 2y$, o único ponto crítico é $(0, 0)$.

para os pontos sobre o eixo x, temos $y = 0$, portanto

$$f(x, y) = -x^2 < 0 \text{ (se } x \neq 0).$$

para os pontos sobre o eixo y, temos $x = 0$,

$$f(x, y) = y^2 > 0 \text{ (se } y \neq 0).$$

Então, $f(0, 0) = 0$ não pode ser um valor extremo de f, portanto f não tem valor extremo.

Valores de máximo e mínimo

Exemplo 2

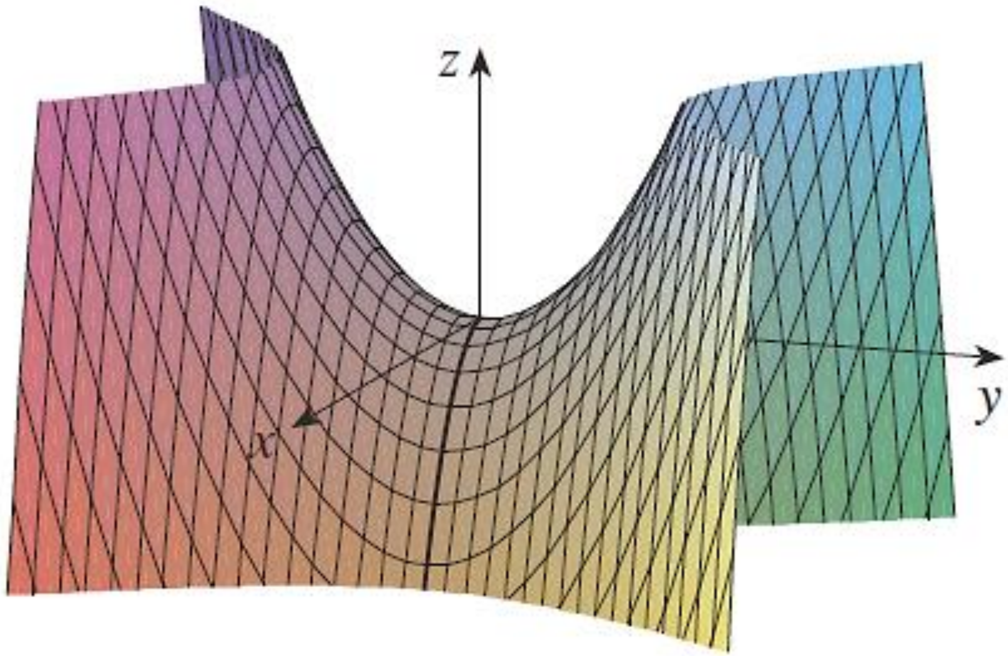


FIGURA 3 $z = y^2 - x^2$

(0, 0) é chamado *ponto de sela* de f.

Teste da derivada segunda

Suponha que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em uma bola aberta com centro em (a, b), e suponha que $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$ [(a, b) é um ponto crítico de f].

Teste da derivada segunda

Suponha que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em uma bola aberta com centro em (a, b), e suponha que $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$ [(a, b) é um ponto crítico de f]. Seja

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

Teste da derivada segunda

Suponha que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em uma bola aberta com centro em (a, b), e suponha que $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$ [(a, b) é um ponto crítico de f]. Seja

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

(a) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, então $f(a, b)$ é um mínimo local.

Teste da derivada segunda

Suponha que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em uma bola aberta com centro em (a, b), e suponha que $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$ [(a, b) é um ponto crítico de f]. Seja

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)\, f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

(a) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, então $f(a, b)$ é um mínimo local.

(b) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, então $f(a, b)$ é um máximo local.

Teste da derivada segunda

Suponha que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em uma bola aberta com centro em (a, b), e suponha que $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$ [(a, b) é um ponto crítico de f]. Seja

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)\, f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

(a) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, então $f(a, b)$ é um mínimo local.

(b) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, então $f(a, b)$ é um máximo local.

(c) Se $D < 0$, então $f(a, b)$ não é mínimo local nem máximo local.

Teste da derivada segunda

OBSERVAÇÃO 1 No caso (c) o ponto (a, b) é chamado **ponto de sela** de f e o gráfico de f cruza seu plano tangente em (a, b).

Teste da derivada segunda

OBSERVAÇÃO 1 No caso (c) o ponto (a, b) é chamado **ponto de sela** de f e o gráfico de f cruza seu plano tangente em (a, b).

OBSERVAÇÃO 2 Se $D = 0$, não dá nenhuma informação: f pode ter um máximo local ou mínimo local em (a, b), ou (a, b) pode ser um ponto de sela de f.

Teste da derivada segunda

OBSERVAÇÃO 1 No caso (c) o ponto (a, b) é chamado **ponto de sela** de f e o gráfico de f cruza seu plano tangente em (a, b).

OBSERVAÇÃO 2 Se $D = 0$, não dá nenhuma informação: f pode ter um máximo local ou mínimo local em (a, b), ou (a, b) pode ser um ponto de sela de f.

OBSERVAÇÃO 3 Para lembrar a fórmula de D, é útil escrevê-la como um determinante:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Valores de máximo e mínimo

Exemplo 3

Determine os valores máximo e mínimo e o ponto de sela de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

Valores de máximo e mínimo

Exemplo 3

Determine os valores máximo e mínimo e o ponto de sela de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

Solução:

Primeiro os pontos críticos:

$$f_x = 4x^3 - 4y \qquad x^3 - y = 0$$

Valores de máximo e mínimo

Exemplo 3

Determine os valores máximo e mínimo e o ponto de sela de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

Solução:

Primeiro os pontos críticos:

$$f_x = 4x^3 - 4y \qquad x^3 - y = 0$$

$$f_y = 4y^3 - 4x \qquad y^3 - x = 0$$

Valores de máximo e mínimo

Exemplo 3

Determine os valores máximo e mínimo e o ponto de sela de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

Solução:

Primeiro os pontos críticos:

$$f_x = 4x^3 - 4y \qquad x^3 - y = 0$$

$$f_y = 4y^3 - 4x \qquad y^3 - x = 0$$

substituímos $y = x^3$ da primeira equação na segunda.

$$x^9 - x = x(x^8 - 1) = 0$$

Valores de máximo e mínimo

Exemplo 3

Determine os valores máximo e mínimo e o ponto de sela de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

Solução:

Primeiro os pontos críticos:

$$f_x = 4x^3 - 4y \qquad x^3 - y = 0$$

$$f_y = 4y^3 - 4x \qquad y^3 - x = 0$$

substituímos $y = x^3$ da primeira equação na segunda.

$$x^9 - x = x(x^8 - 1) = 0$$

$$x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0$$

Valores de máximo e mínimo

Exemplo 3

Determine os valores máximo e mínimo e o ponto de sela de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

Solução:

Primeiro os pontos críticos:

$$f_x = 4x^3 - 4y \qquad x^3 - y = 0$$

$$f_y = 4y^3 - 4x \qquad y^3 - x = 0$$

substituímos $y = x^3$ da primeira equação na segunda.

$$x^9 - x = x(x^8 - 1) = 0$$

$$x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0$$

$$x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$

Exemplo 3

$$x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$

existem três raízes reais: $x = 0, 1, -1$.

Exemplo 3

$$x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$

existem três raízes reais: $x = 0, 1, -1$.

Os três pontos críticos são $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Exemplo 3

$$x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$

existem três raízes reais: $x = 0, 1, -1$.

Os três pontos críticos são $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Agora vamos calcular as segundas derivadas e $D(x, y)$:

$$f_{xx} = 12x^2 \qquad f_{xy} = -4 \qquad f_{yy} = 12y^2$$

$$x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$

Exemplo 3

existem três raízes reais: $x = 0, 1, -1$.

Os três pontos críticos são $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Agora vamos calcular as segundas derivadas e $D(x, y)$:

$$f_{xx} = 12x^2 \qquad f_{xy} = -4 \qquad f_{yy} = 12y^2$$

$$D(x, y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$

Exemplo 3

$$x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$

existem três raízes reais: $x = 0, 1, -1$.

Os três pontos críticos são $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Agora vamos calcular as segundas derivadas e $D(x, y)$:

$$f_{xx} = 12x^2 \qquad f_{xy} = -4 \qquad f_{yy} = 12y^2$$

$$D(x, y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$

Como $D(0, 0) = -16 < 0$, caso, (c) é um ponto de sela;

Exemplo 3

$$x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$

existem três raízes reais: $x = 0, 1, -1$.

Os três pontos críticos são $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Agora vamos calcular as segundas derivadas e $D(x, y)$:

$$f_{xx} = 12x^2 \qquad f_{xy} = -4 \qquad f_{yy} = 12y^2$$

$$D(x, y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$

Como $D(0, 0) = -16 < 0$, caso, (c) é um ponto de sela;

Como $D(1, 1) = 128 > 0$ e $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$,

do caso (a) $f(1, 1) = -1$ é um mínimo local.

$$x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$

Exemplo 3

existem três raízes reais: $x = 0, 1, -1$.

Os três pontos críticos são $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Agora vamos calcular as segundas derivadas e $D(x, y)$:

$$f_{xx} = 12x^2 \qquad f_{xy} = -4 \qquad f_{yy} = 12y^2$$

$$D(x, y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$

Como $D(0, 0) = -16 < 0$, caso, (*c*) é um ponto de sela;

Como $D(1, 1) = 128 > 0$ e $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$,
do caso (a) $f(1, 1) = -1$ é um mínimo local.

Como $D(-1, -1) = 128 > 0$ e $f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$,
$f(-1, -1) = -1$ é também um mínimo local.

O gráfico de f é mostrado na Figura 4.

Exemplo 3

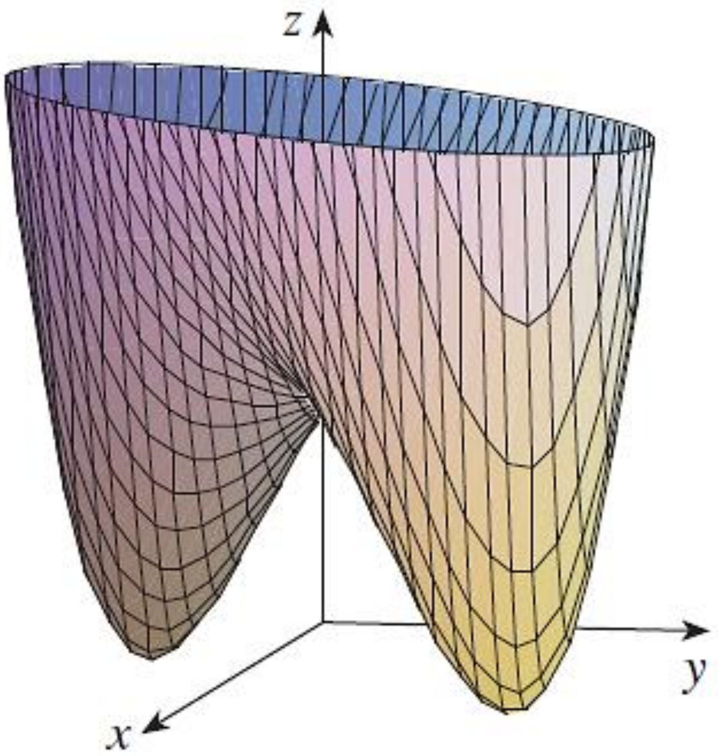


FIGURA 4 $z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

O gráfico de f é mostrado na Figura 4.

Exemplo 3

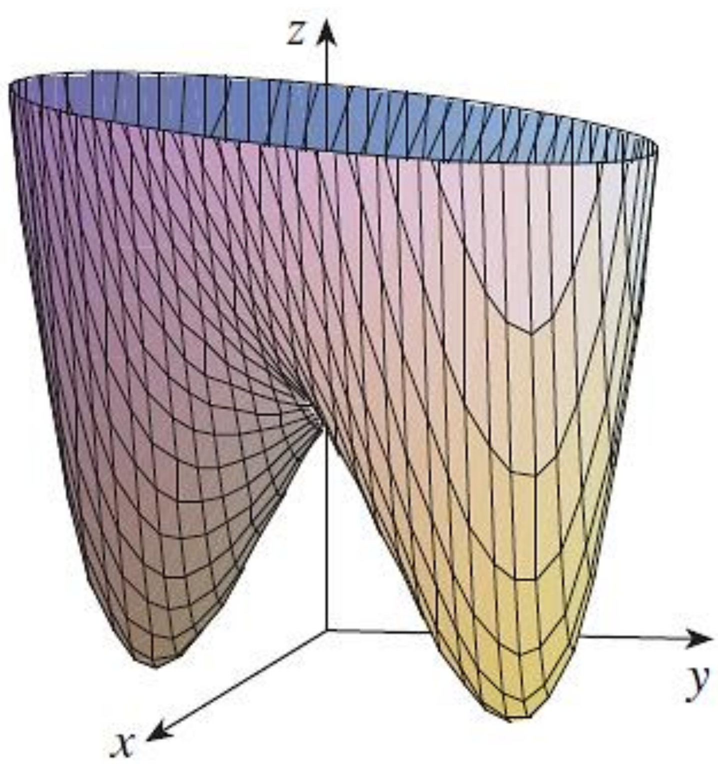


FIGURA 4 $z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

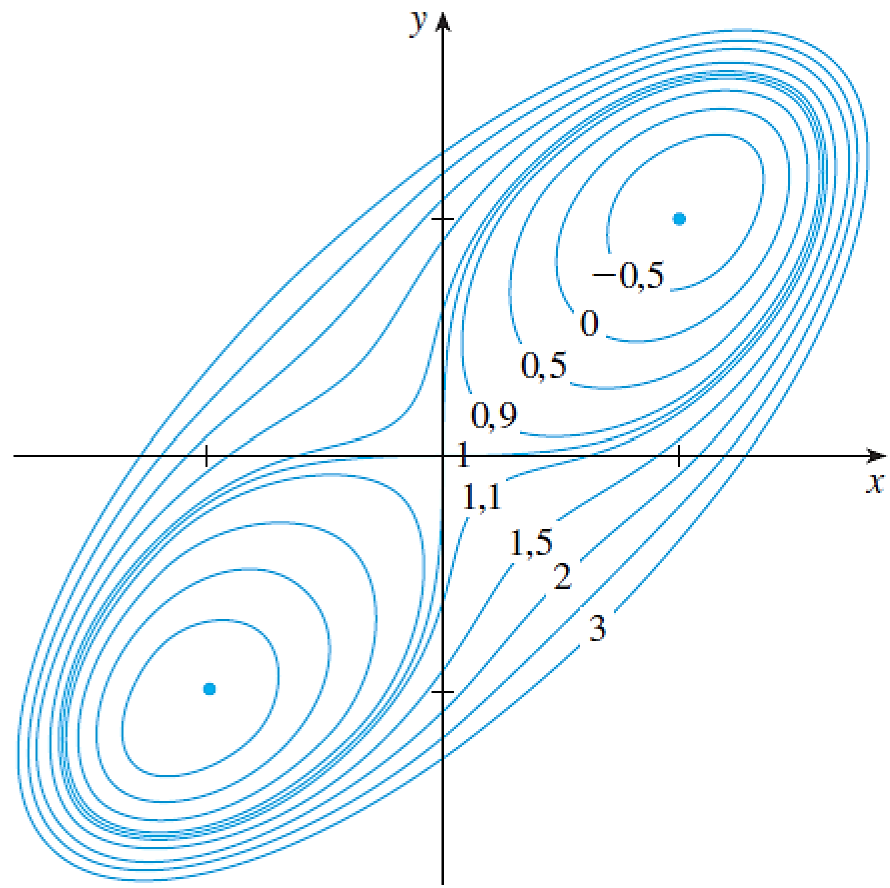


FIGURA 5 Um mapa de contorno da função f

Para depois desta aula:

- Estudar seção 14.7 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

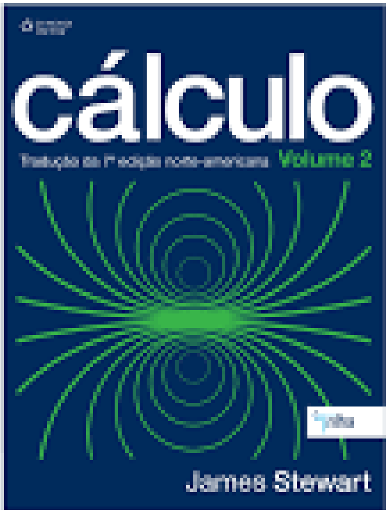
Próxima aula:

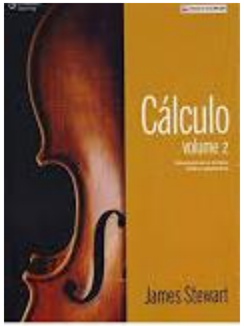
- Valores de máximo e mínimo absolutos.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed. ▶





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br