Cálculo I

Licenciatura

Semana 06 - Aula 2
Derivada de Funções trigonométricas

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Derivadas das funções trigonométricas

- Para as seis funções trigonométricas básicas:

$$\boldsymbol{senx} \qquad \boldsymbol{cosx} \qquad \boldsymbol{tgx = \frac{senx}{cosx}}$$

Derivadas das funções trigonométricas

- Para as seis funções trigonométricas básicas:

$$\boldsymbol{senx} \qquad \boldsymbol{cosx} \qquad \boldsymbol{tgx = \frac{senx}{cosx}}$$

$$cossecx = \frac{1}{senx} \qquad secx = \frac{1}{cosx} \qquad cotgx = \frac{cosx}{senx}$$

Derivadas das funções trigonométricas

- Para as seis funções trigonométricas básicas:

$$\boldsymbol{senx} \qquad \boldsymbol{cosx} \qquad \boldsymbol{tgx = \frac{senx}{cosx}}$$

$$cossecx = \frac{1}{senx} \qquad secx = \frac{1}{cosx} \qquad cotgx = \frac{cosx}{senx}$$

- A variável independente $\boldsymbol{x}$ será definida em unidades de radianos.

Derivadas do *senx* a partir da definição

- Seja $f(x) = \text{sen}x$

Derivadas do *senx* a partir da definição

- Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$

- Pela definição:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - senx}{h}$$

Derivadas do *senx* a partir da definição

- Seja $f(x) = \text{sen}x$

- Pela definição:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - senx}{h}$$

- Utilizaremos dois limites fundamentais (Teorema 2.6.4):

$$\lim_{h \to 0} \frac{senh}{h} = 1 \qquad e \qquad \lim_{h \to 0} \frac{1 - cosh}{h} = 0$$

Derivadas do *senx* a partir da definição

$f(x) = \mathrm{sen}x$ $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h) - senx}{h}$$

Derivadas do *senx* a partir da definição

$$f(x) = \text{sen}x \qquad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - senx}{h}$$

Da relação da adição do seno sabe-se que:

$$sen(x+h) = senx\ cosh + cosx\ senh$$

Derivadas do *senx* a partir da definição

$$f(x) = \text{sen}x \qquad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - senx}{h}$$

Da relação da adição do seno sabe-se que:

$$sen(x+h) = senx\ cosh + cosx\ senh$$

Então:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{senx\ cosh + cosx\ senh\ - senx}{h}$$

Derivadas do *senx* a partir da definição

$$f(x) = \text{sen}x \qquad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - senx}{h}$$

Da relação da adição do seno sabe-se que:

$$sen(x+h) = senx\, cosh + cosx\, senh$$

Então:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{senx\, cosh + cosx\, senh - senx}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{senx(cosh - 1)}{h} + \frac{cosx(senh)}{h} \right]$$

Derivadas do *senx* a partir da definição

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{senx(cosh - 1)}{h} + \frac{cosx(senh)}{h} \right]$$

Derivadas do *senx* a partir da definição

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{senx(cosh - 1)}{h} + \frac{cosx(senh)}{h} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[senx \frac{(cosh - 1)}{h} + cosx \frac{(senh)}{h} \right]$$

Derivadas do *senx* a partir da definição

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{senx(cosh - 1)}{h} + \frac{cosx(senh)}{h}\right]$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[senx\frac{(cosh - 1)}{h} + cosx\frac{(senh)}{h}\right]$$

$$f'(x) = senx\left[-\lim_{h\to 0}\frac{(1 - cosh)}{h}\right] + cosx\left[\lim_{h\to 0}\frac{(senh)}{h}\right]$$

Derivadas do *senx* a partir da definição

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{senx(cosh - 1)}{h} + \frac{cosx(senh)}{h}\right]$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[senx\frac{(cosh - 1)}{h} + cosx\frac{(senh)}{h}\right]$$

$$f'(x) = senx\left[\underbrace{-\lim_{h\to 0}\frac{(1 - cosh)}{h}}_{\lim_{h\to 0}\frac{1 - cosh}{h} = 0}\right] + cosx\left[\lim_{h\to 0}\frac{(senh)}{h}\right]$$

Derivadas do *senx* a partir da definição

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{senx(cosh - 1)}{h} + \frac{cosx(senh)}{h}\right]$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[senx\frac{(cosh - 1)}{h} + cosx\frac{(senh)}{h}\right]$$

$$f'(x) = senx\left[\underbrace{-\lim_{h\to 0}\frac{(1 - cosh)}{h}}_{\lim\limits_{h\to 0}\frac{1 - cosh}{h} = 0}\right] + cosx\left[\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{(senh)}{h}}_{\lim\limits_{h\to 0}\frac{senh}{h} = 1}\right]$$

Derivadas do *senx* a partir da definição

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{senx(cosh - 1)}{h} + \frac{cosx(senh)}{h} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[senx \frac{(cosh - 1)}{h} + cosx \frac{(senh)}{h} \right]$$

$$f'(x) = senx \left[\underbrace{-\lim_{h \to 0} \frac{(1 - cosh)}{h}}_{\lim_{h \to 0} \frac{1 - cosh}{h} = 0} \right] + cosx \left[\underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{(senh)}{h}}_{\lim_{h \to 0} \frac{senh}{h} = 1} \right]$$

Portanto:

$\text{Se} \quad f(x) = \text{sen}x$

Derivadas do *senx* a partir da definição

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{senx(cosh-1)}{h} + \frac{cosx(senh)}{h}\right]$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[senx\frac{(cosh-1)}{h} + cosx\frac{(senh)}{h}\right]$$

$$f'(x) = senx\left[\underbrace{-\lim_{h\to 0}\frac{(1-cosh)}{h}}_{\lim_{h\to 0}\frac{1-cosh}{h}=0}\right] + cosx\left[\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{(senh)}{h}}_{\lim_{h\to 0}\frac{senh}{h}=1}\right]$$

Portanto:

Se $f(x) = senx$

Então: $f'(x) = cosx$

Derivadas do *senx* e *cosx*

- Como resultado da definição:

$$\frac{d}{dx}[\text{sen}x] = cosx$$

Derivadas do *senx* e *cosx*

- Como resultado da definição:

$$\frac{d}{dx}[\text{sen}x] = cosx$$

- Por raciocínio análogo obtém-se:

$$\frac{d}{dx}[\text{cos}x] = -senx$$

Fazer como exercício.

Exemplo 1

Encontrar a derivada da função $f(x) = x\ senx$

Exemplo 1

Encontrar a derivada da função $f(x) = x\, senx$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[x\, senx]$$

Exemplo 1

Encontrar a derivada da função $f(x) = x\, senx$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[x\, senx]$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[x]senx + x\frac{d}{dx}[senx]$$

Exemplo 1

Encontrar a derivada da função $f(x) = x\ senx$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[x\ senx]$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[x]senx + x\frac{d}{dx}[senx]$$

$$f'(x) = 1\ senx + x\frac{d}{dx}[senx]$$

Exemplo 1

Encontrar a derivada da função $f(x) = x\, senx$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[x\, senx]$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[x]senx + x\frac{d}{dx}[senx]$$

$$f'(x) = 1\, senx + x\frac{d}{dx}[senx]$$

$$f'(x) = \ senx + xcosx$$

Demais funções trigonométricas

- As outras quatro funções trigonométricas podem ser derivadas através das regras do quociente, produto e dos resultados para $senx$ e $cosx$.

Demais funções trigonométricas

- As outras quatro funções trigonométricas podem ser derivadas através das regras do quociente, produto e dos resultados para ***senx*** e ***cosx***.

$$tgx = \frac{senx}{cosx} \qquad cossecx = \frac{1}{senx}$$

$$secx = \frac{1}{cosx} \qquad cotgx = \frac{cosx}{senx}$$

Exemplo 2

Encontrar a derivada da função $tgx = \frac{senx}{cosx}$

Exemplo 2

$$f(x) = \frac{senx}{cosx} = tgx$$

Exemplo 2

$$f(x) = \frac{senx}{cosx} = tgx$$

$$f'(x) = \frac{cosx\,\frac{d}{dx}[senx] \; - senx\,\frac{d}{dx}[cosx]}{cos^2x}$$

Exemplo 2

$$f(x) = \frac{senx}{cosx} = tgx$$

$$f'(x) = \frac{cosx\,\dfrac{d}{dx}[senx]\;-senx\,\dfrac{d}{dx}[cosx]}{cos^2x}$$

$$f'(x) = \frac{cosx\;cosx\;\;-senx(-senx)}{cos^2x}$$

Exemplo 2

$$f(x) = \frac{senx}{cosx} = tgx$$

$$f'(x) = \frac{cosx\,\frac{d}{dx}[senx] \; - senx\,\frac{d}{dx}[cosx]}{cos^2x}$$

$$f'(x) = \frac{cosx\;cosx \;\; - senx(-senx)}{cos^2x}$$

$$f'(x) = \frac{cos^2x + sen^2x}{cos^2x}$$

Exemplo 2

$$f(x) = \frac{senx}{cosx} = tgx$$

$$f'(x) = \frac{cosx\,\frac{d}{dx}[senx] \; - senx\,\frac{d}{dx}[cosx]}{cos^2x}$$

$$f'(x) = \frac{cosx\;cosx \; - senx(-senx)}{cos^2x}$$

$$f'(x) = \frac{cos^2x + sen^2x}{cos^2x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{cos^2x}$$

Exemplo 2

$$f(x) = \frac{senx}{cosx} = tgx$$

$$f'(x) = \frac{cosx\,\frac{d}{dx}[senx] \; - senx\,\frac{d}{dx}[cosx]}{cos^2x}$$

$$f'(x) = \frac{cosx\;cosx \; - senx(-senx)}{cos^2x}$$

$$f'(x) = \frac{cos^2x + sen^2x}{cos^2x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{cos^2x} \qquad mas: \; \frac{1}{cosx} = secx$$

Exemplo 2

$$f(x) = \frac{senx}{cosx} = tgx$$

$$f'(x) = \frac{cosx\dfrac{d}{dx}[senx] \; - senx\dfrac{d}{dx}[cosx]}{cos^2x}$$

$$f'(x) = \frac{cosx\, cosx \; - senx(-senx)}{cos^2x}$$

$$f'(x) = \frac{cos^2x + sen^2x}{cos^2x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{cos^2x} \qquad mas\colon \; \frac{1}{cosx} = secx$$

$$f'(x) = sec^2x$$

Exemplo 2

$$f(x) = \frac{senx}{cosx} = tgx$$

$$f'(x) = \frac{cosx\,\frac{d}{dx}[senx] \; - senx\,\frac{d}{dx}[cosx]}{cos^2x}$$

$$f'(x) = \frac{cosx\;cosx \;\; - senx(-senx)}{cos^2x}$$

$$f'(x) = \frac{cos^2x + sen^2x}{cos^2x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{cos^2x} \qquad mas: \;\; \frac{1}{cosx} = secx$$

$$f'(x) = sec^2x \qquad \frac{d[tgx]}{dx} = sec^2x$$

prof. Henrique A M Faria

Exercício

Encontrar a derivada da função $secx = \frac{1}{cosx}$

Derivadas das funções trigonométricas

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = -senx$$

$$\frac{d}{dx}[\mathrm{sen}x] = cosx$$

Derivadas das funções trigonométricas

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = -senx$$

$$\frac{d}{dx}[\text{sen}x] = cosx$$

$$\frac{d}{dx}[\sec x] = tg(x)\sec(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\text{cossec}x] = -cossec(x)cotg(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\text{tg}x] = sec^2x = (secx)^2$$

$$\frac{d}{dx}[\text{cotg}x] = cossec^2x = (cossecx)^2$$

Prof. Henrique A M Faria

Regra da cadeia em derivadas

Regra da cadeia em derivadas

- Nesta seção encontraremos a regra para derivar uma função composta $\boldsymbol{f \circ g}$.

- Considere o problema de calcular:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(x^2+1\right)^{100}\right]$$

Regra da cadeia em derivadas

1. Escrevemos a função como uma composta:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) \quad em\ que: \begin{cases} g(x) = x^2 + 1 \\ f(x) = x^{100} \end{cases}$$

Regra da cadeia em derivadas

1. Escrevemos a função como uma composta:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) \quad em\ que: \begin{cases} g(x) = x^2 + 1 \\ f(x) = x^{100} \end{cases}$$

2. Introduzimos duas novas variáveis:

$$\begin{cases} u = g(x) = x^2 + 1 \\ y = (u)^{100} \end{cases} \qquad \frac{dy}{du} = 100u^{99} \quad e \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

Regra da cadeia em derivadas

1. Escrevemos a função como uma composta:

$$\boldsymbol{h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) \quad em\ que: \begin{cases} g(x) = x^2 + 1 \\ f(x) = x^{100} \end{cases}}$$

2. Introduzimos duas novas variáveis:

$$\boldsymbol{\begin{cases} u = g(x) = x^2 + 1 \\ y = (u)^{100} \end{cases} \qquad \frac{dy}{du} = 100u^{99} \qquad e \qquad \frac{du}{dx} = 2x}$$

3. Mas queremos:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\left(x^2 + 1\right)^{100}\right]}$$

Regra da cadeia em derivadas

1. Escrevemos a função como uma composta:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) \quad em\ que: \begin{cases} g(x) = x^2 + 1 \\ f(x) = x^{100} \end{cases}$$

2. Introduzimos duas novas variáveis:

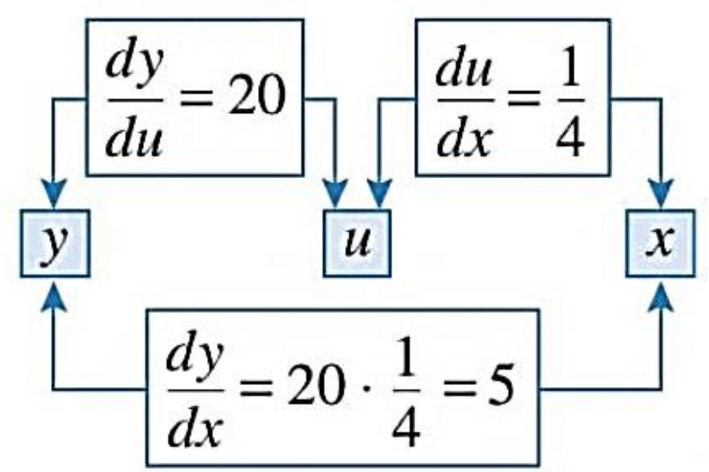
$$\begin{cases} u = g(x) = x^2 + 1 \\ y = (u)^{100} \end{cases} \qquad \frac{dy}{du} = 100u^{99} \qquad e \qquad \frac{du}{dx} = 2x$$

3. Mas queremos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\left(x^2+1\right)^{100}\right] \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 100\left(x^2+1\right)^{99} 2x$$

Regra da cadeia em derivadas

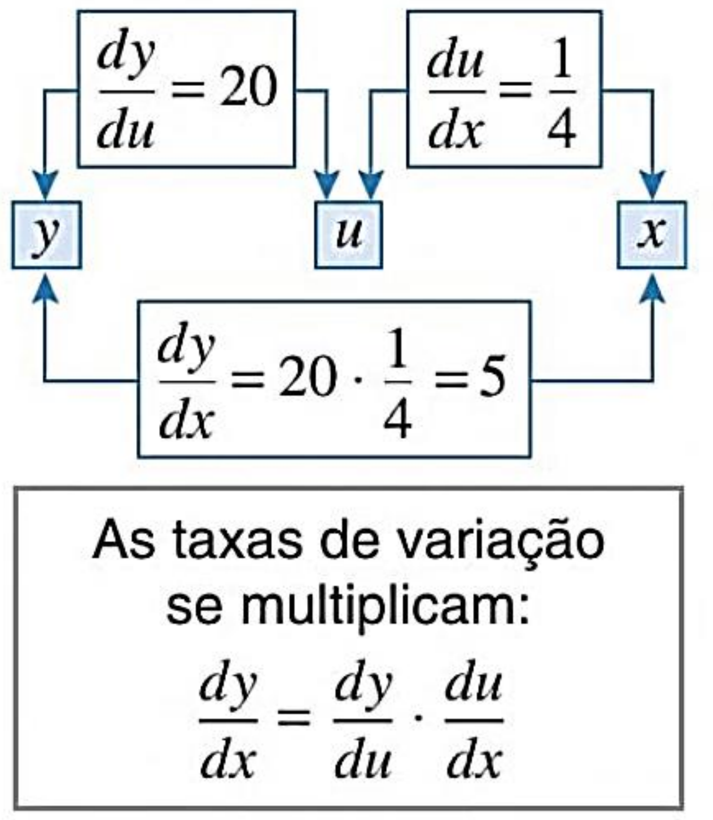
- Entendendo a derivada como taxa de variação:



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Regra da cadeia em derivadas

- Entendendo a derivada como taxa de variação:



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Regra da cadeia em derivadas

2.6.1 TEOREMA (*Regra da cadeia*) *Se g for diferenciável no ponto x e f for diferenciável no ponto g(x), então a composição $f \circ g$ será diferenciável no ponto x. Além disso, se*

$$y = f(g(x)) \quad \text{e} \quad u = g(x)$$

então $y = f(u)$ e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \tag{1}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Regra da cadeia em derivadas

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

A derivada de $f(g(x))$ é a derivada da função de fora calculada na função de dentro vezes a derivada da função de dentro.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Regra da cadeia em derivadas

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

A derivada de $f(g(x))$ é a derivada da função de fora calculada na função de dentro vezes a derivada da função de dentro.

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{Derivada da função de fora calculada na função de dentro}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{Derivada da função de dentro}}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 1

Encontrar a derivada da função $y = cos(x^3)$

Exemplo 1

Encontrar a derivada da função $y = cos(x^3)$

$$\begin{cases} \boldsymbol{u = g(x) = x^3} \\ \boldsymbol{y = cos\, u} \end{cases}$$

Exemplo 1

Encontrar a derivada da função $y = cos(x^3)$

$$\begin{cases} \boldsymbol{u = g(x) = x^3} \\ \boldsymbol{y = cos\, u} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}}$$

Exemplo 1

Encontrar a derivada da função $y = cos(x^3)$

$$\begin{cases} \boldsymbol{u = g(x) = x^3} \\ \boldsymbol{y = cos\, u} \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{du}[cosu]\frac{d}{dx}[x^3]$$

Exemplo 1

Encontrar a derivada da função $y = cos(x^3)$

$$\begin{cases} \boldsymbol{u = g(x) = x^3} \\ \boldsymbol{y = cos\, u} \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{du}[cosu]\frac{d}{dx}[x^3]$$

$$\frac{dy}{dx} = -senx^3(3x^2)$$

Exemplo 1

Encontrar a derivada da função $y = cos(x^3)$

$$\begin{cases} u = g(x) = x^3 \\ y = cos\, u \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{du}[cosu]\frac{d}{dx}[x^3]$$

$$\frac{dy}{dx} = -senx^3(3x^2)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -3x^2senx^3}$$

Exercício

Encontrar a derivada da função $y = \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x^2+1}\right]$

Fórmulas generalizadas de derivação

- Se a regra da cadeia for escrita: $$\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u)\frac{du}{dx}$$

FÓRMULAS GENERALIZADAS DE DERIVAÇÃO

$$\frac{d}{dx}[u^r] = ru^{r-1}\,\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} u] = \cos u\,\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\cos u] = -\operatorname{sen} u\,\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{tg} u] = \sec^2 u\,\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{cotg} u] = -\operatorname{cossec}^2 u\,\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\sec u] = \sec u\,\operatorname{tg} u\,\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{cossec} u] = -\operatorname{cossec} u\,\operatorname{cotg} u\,\frac{du}{dx}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

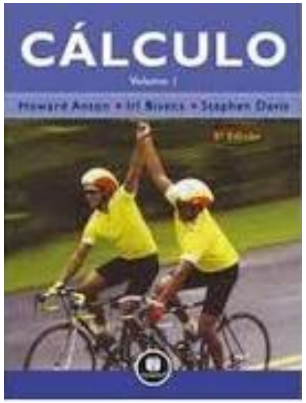
Para depois desta aula:

- Reler o capítulo no livro texto.
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Fazer a lista de exercícios.

Próxima aula:

- Derivada e taxas relacionadas.

Bibliografia



1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.

Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br