Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 06 - Aula 3
Fórmula de Taylor

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Aproximações lineares (revisão)

- Na semana 4 estudamos a aproximação linear de uma função *f* de duas variáveis.
- Chamamos esta função de $L(x, y)$ e denominamos de aproximação linear ou aproximação pelo plano tangente.

Aproximações lineares (revisão)

- Na semana 4 estudamos a aproximação linear de uma função *f* de duas variáveis.
- Chamamos esta função de $L(x, y)$ e denominamos de aproximação linear ou aproximação pelo plano tangente.

A **aproximação linear** de f em (a, b) é

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Aproximações lineares (revisão)

- Na semana 4 estudamos a aproximação linear de uma função *f* de duas variáveis.
- Chamamos esta função de *L*(x, y) e denominamos de aproximação linear ou aproximação pelo plano tangente.

A **aproximação linear** de f em (a, b) é

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

- No entanto, muitas vezes precisamos de uma aproximação melhor do que a linear.

Polinômio de Taylor (função de uma variável)

- Para uma aproximação melhor de uma função f de uma variável utiliza-se polinômios.

Polinômio de Taylor (função de uma variável)

- Para uma aproximação melhor de uma função f de uma variável utiliza-se polinômios.
- O polinômio de grau n de f centrado em um ponto a é expresso por:

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Polinômio de Taylor (função de uma variável)

- Para uma aproximação melhor de uma função *f* de uma variável utiliza-se polinômios.
- O polinômio de grau *n* de *f* centrado em um ponto a é expresso por:

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

- Este polinômio pode ser utilizado até o grau que fornece a aproximação requerida para a função.

Polinômio de Taylor

Exemplo 1

Encontre a aproximação até segunda ordem para lnx em torno do ponto $x_0 = 2$.

Polinômio de Taylor

Exemplo 1

Encontre a aproximação até segunda ordem para lnx em torno do ponto $x_0 = 2$.

Solução:

$$p_2(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x - x_o)^2$$

Polinômio de Taylor

Exemplo 1

Encontre a aproximação até segunda ordem para lnx em torno do ponto $x_0 = 2$.

Solução:

$$p_2(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x - x_o)^2$$

$$f(x) = lnx \qquad f(2) = ln2$$

Polinômio de Taylor

Exemplo 1

Encontre a aproximação até segunda ordem para lnx em torno do ponto $x_0 = 2$.

Solução:

$$p_2(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x - x_o)^2$$

$$f(x) = lnx \qquad f(2) = ln2$$

$$f'(x) = 1/x \qquad f(2) = 1/2$$

Polinômio de Taylor

Exemplo 1

Encontre a aproximação até segunda ordem para lnx em torno do ponto $x_0 = 2$.

Solução:

$$p_2(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x - x_o)^2$$

$$f(x) = lnx \qquad f(2) = ln2$$

$$f'(x) = 1/x \qquad f(2) = 1/2$$

$$f''^{(x)} = -\frac{1}{x^2} \qquad f(2) = -1/4$$

Polinômio de Taylor

Exemplo 1

Encontre a aproximação até segunda ordem para lnx em torno do ponto $x_0 = 2$.

Solução:

$$p_2(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x - x_o)^2$$

$$f(x) = lnx \qquad f(2) = ln2$$

$$f'(x) = 1/x \qquad f(2) = 1/2$$

$$f''^{(x)} = -\frac{1}{x^2} \qquad f(2) = -1/4$$

$$p_2(x) = ln2 + \frac{1}{2}(x - 2) - \frac{1}{8}(x - 2)^2$$

Polinômio de Taylor para funções de duas variáveis

Polinômio de Taylor para função de duas variáveis

- Suponha que $f(x, y)$ e suas derivadas parciais até ordem de $n + 1$ sejam contínuas sobre uma bola aberta centrada no ponto (a, b). Considere $h, k \in \mathbb{R}$.

Polinômio de Taylor para função de duas variáveis

- Suponha que $f(x, y)$ e suas derivadas parciais até ordem de $n + 1$ sejam contínuas sobre uma bola aberta centrada no ponto (a, b). Considere $h, k \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
f(a+h, b+k) = {} & f(a, b) + (hf_x + kf_y)\big|_{(a,b)} \\
& + \frac{1}{2!}(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy})\big|_{(a,b)} \\
& + \frac{1}{3!}(h^3 f_{xxx} + 3h^2 k f_{xxy} + 3hk^2 f_{xyy} + k^3 f_{yyy})\big|_{(a,b)} + \cdots \\
& + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\Bigg|_{(a,b)} \\
& + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\Bigg|_{(a+ch,\, b+ck)}
\end{aligned}
$$

Thomas. Cálculo II
12 ed., p. 281

Polinômio de Taylor para função de duas variáveis

- O polinômio de Taylor na origem $(x, y) = (0, 0)$ é:

Polinômio de Taylor para função de duas variáveis

➢ O polinômio de Taylor na origem $(x, y) = (0, 0)$ é:

$$f(x, y) = f(0, 0) + xf_x + yf_y + \frac{1}{2!}(x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy})$$

$$+ \frac{1}{3!}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy}) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(x^n \frac{\partial^n f}{\partial x^n} + nx^{n-1}y \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y} + \cdots + y^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right)$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(x^{n+1} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}} + (n+1)x^n y \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^n \partial y} + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + y^{n+1} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}\right)\Bigg|_{(cx,\, cy)}$$

Thomas. Cálculo II
12 ed., p. 284

Polinômio de Taylor para função de duas variáveis

- O polinômio de Taylor na origem $(x, y) = (0, 0)$ é:

Termo linear

$$f(x,y) = \boxed{f(0,0) + xf_x + yf_y} + \frac{1}{2!}(x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy})$$

$$+ \frac{1}{3!}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy}) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(x^n \frac{\partial^n f}{\partial x^n} + nx^{n-1}y \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y} + \cdots + y^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right)$$

Erro da aproxi-mação

$$\boxed{+ \frac{1}{(n+1)!}\left(x^{n+1} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}} + (n+1)x^n y \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^n \partial y} + \cdots \cdots + y^{n+1} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}\right)\Bigg|_{(cx,\, cy)}}$$

Polinômio de Taylor

Exemplo 2

Encontre uma aproximação quadrática para $f(x, y) = \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y$ próxima à origem.

Polinômio de Taylor

Exemplo 2

Encontre uma aproximação quadrática para $f(x, y) = \text{sen } x \text{ sen } y$ próxima à origem.

Solução:

Tomamos $n = 2$ na Equação

$$f(x, y) = f(0, 0) + (xf_x + yf_y) + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy})$$

$$+ \frac{1}{6}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy})_{(cx,\, cy)}.$$

Polinômio de Taylor

Exemplo 2

Encontre uma aproximação quadrática para $f(x, y) = \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y$ próxima à origem.

Solução:

Tomamos $n = 2$ na Equação

$$f(x, y) = f(0, 0) + (xf_x + yf_y) + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy})$$
$$+ \frac{1}{6}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy})_{(cx,\, cy)}.$$

Calculando os valores das derivadas parciais,

$$f(0, 0) = \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y\big|_{(0,0)} = 0, \quad f_{xx}(0, 0) = -\text{sen}\, x\, \text{sen}\, y\big|_{(0,0)} = 0,$$

Polinômio de Taylor

Exemplo 2

Encontre uma aproximação quadrática para $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ próxima à origem.

Solução:

Tomamos $n = 2$ na Equação

$$f(x, y) = f(0, 0) + (xf_x + yf_y) + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy})$$
$$+ \frac{1}{6}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy})_{(cx,\, cy)}.$$

Calculando os valores das derivadas parciais,

$$f(0, 0) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\big|_{(0,0)} = 0, \quad f_{xx}(0, 0) = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\big|_{(0,0)} = 0,$$
$$f_x(0, 0) = \cos x \operatorname{sen} y\big|_{(0,0)} = 0, \quad f_{xy}(0, 0) = \cos x \cos y\big|_{(0,0)} = 1,$$

Exemplo 2

Encontre uma aproximação quadrática para $f(x, y) = \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y$ próxima à origem.

Solução:

Tomamos $n = 2$ na Equação

$$f(x, y) = f(0, 0) + (xf_x + yf_y) + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy})$$

$$+ \frac{1}{6}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy})_{(cx,\, cy)}.$$

Calculando os valores das derivadas parciais,

$$f(0, 0) = \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y\big|_{(0,0)} = 0, \quad f_{xx}(0, 0) = -\text{sen}\, x\, \text{sen}\, y\big|_{(0,0)} = 0,$$

$$f_x(0, 0) = \cos x\, \text{sen}\, y\big|_{(0,0)} = 0, \quad f_{xy}(0, 0) = \cos x \cos y\big|_{(0,0)} = 1,$$

$$f_y(0, 0) = \text{sen}\, x \cos y\big|_{(0,0)} = 0, \quad f_{yy}(0, 0) = -\text{sen}\, x\, \text{sen}\, y\big|_{(0,0)} = 0,$$

Polinômio de Taylor

Exemplo 2

Encontre uma aproximação quadrática para $f(x, y) = \text{sen}\, x\ \text{sen}\, y$ próxima à origem.

Solução:

Tomamos $n = 2$ na Equação

$$f(x, y) = f(0, 0) + (xf_x + yf_y) + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy})$$

$$+ \frac{1}{6}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy})_{(cx,\, cy)}.$$

Calculando os valores das derivadas parciais,

$$f(0, 0) = \text{sen}\, x\ \text{sen}\, y\big|_{(0,0)} = 0, \qquad f_{xx}(0, 0) = -\text{sen}\, x\ \text{sen}\, y\big|_{(0,0)} = 0,$$
$$f_x(0, 0) = \cos x\ \text{sen}\, y\big|_{(0,0)} = 0, \qquad f_{xy}(0, 0) = \cos x \cos y\big|_{(0,0)} = 1,$$
$$f_y(0, 0) = \text{sen}\, x \cos y\big|_{(0,0)} = 0, \qquad f_{yy}(0, 0) = -\text{sen}\, x\ \text{sen}\, y\big|_{(0,0)} = 0,$$

$$\text{sen}\, x\ \text{sen}\, y \approx 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(x^2(0) + 2xy(1) + y^2(0)) \quad \text{ou}$$

Polinômio de Taylor

Exemplo 2

Encontre uma aproximação quadrática para $f(x, y) = \text{sen } x \text{ sen } y$ próxima à origem.

Solução:

Tomamos $n = 2$ na Equação

$$f(x, y) = f(0, 0) + (xf_x + yf_y) + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy})$$

$$+ \frac{1}{6}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy})_{(cx,\, cy)}.$$

Calculando os valores das derivadas parciais,

$$f(0, 0) = \text{sen } x \text{ sen } y\big|_{(0,0)} = 0, \qquad f_{xx}(0, 0) = -\text{sen } x \text{ sen } y\big|_{(0,0)} = 0,$$

$$f_x(0, 0) = \cos x \text{ sen } y\big|_{(0,0)} = 0, \qquad f_{xy}(0, 0) = \cos x \cos y\big|_{(0,0)} = 1,$$

$$f_y(0, 0) = \text{sen } x \cos y\big|_{(0,0)} = 0, \qquad f_{yy}(0, 0) = -\text{sen } x \text{ sen } y\big|_{(0,0)} = 0,$$

$$\text{sen } x \text{ sen } y \approx 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(x^2(0) + 2xy(1) + y^2(0)) \quad \text{ou}$$

$$\text{sen } x \text{ sen } y \approx xy.$$

Exercícios desta aula

Nos Exercícios utilize a fórmula de Taylor para $f(x, y)$ na origem para encontrar aproximações quadráticas e cúbicas de f próximas à origem.

1. $f(x, y) = xe^y$

3. $f(x, y) = y \operatorname{sen} x$

5. $f(x, y) = e^x \ln(1 + y)$

Respostas dos exercícios

1. Quadrático: $x + xy$; cúbico: $x + xy + \frac{1}{2}xy^2$

3. Quadrático: xy; cúbico: xy

5. Quadrático: $y + \frac{1}{2}(2xy - y^2)$;

cúbico: $y + \frac{1}{2}(2xy - y^2) + \frac{1}{6}(3x^2y - 3xy^2 + 2y^3)$

Para depois desta aula:

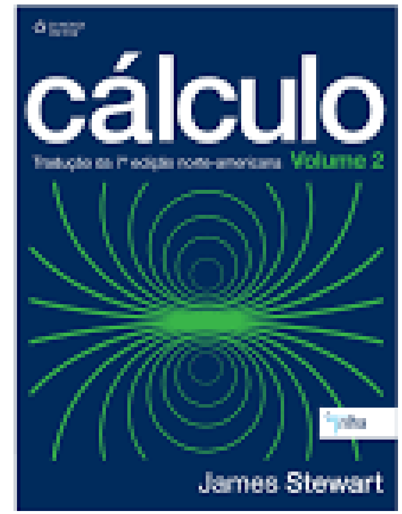
- Estudar seção 14.9 do livro texto (Thomas).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

Próxima aula:

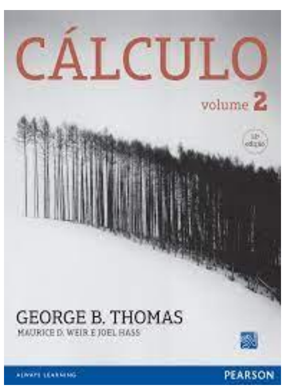
- Integrais duplas.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.



Numeração dos exercícios
com base na 7ª ed.



2. THOMAS, George B. Cálculo – volume 2, 12. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2013.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br