Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 08 - Aula 1
Integrais duplas sobre retângulos

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Integrais duplas

- Nas funções de uma variável o problema de determinar áreas nos levou à definição de integral definida.
- Aplicaremos um procedimento semelhante para as funções de duas variáveis.

Integrais duplas

- Nas funções de uma variável o problema de determinar áreas nos levou à definição de integral definida.
- Aplicaremos um procedimento semelhante para as funções de duas variáveis.
- Este processo nos levará à definição de integral dupla.
- As aplicações para integral dupla vão desde o volume de um sólido, áreas de superfícies, massa e até probabilidades.

Integrais duplas

- Vamos relembrar a integral definida de uma função de uma variável.

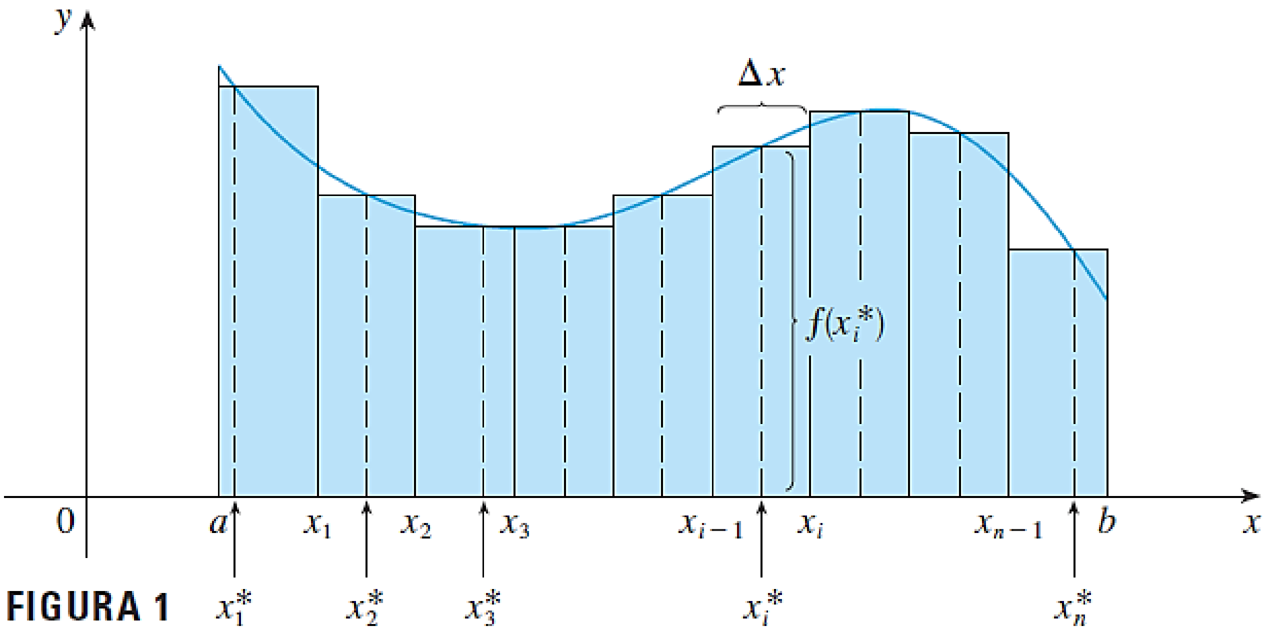


FIGURA 1

Integrais duplas

- Vamos relembrar a integral definida de uma função de uma variável.

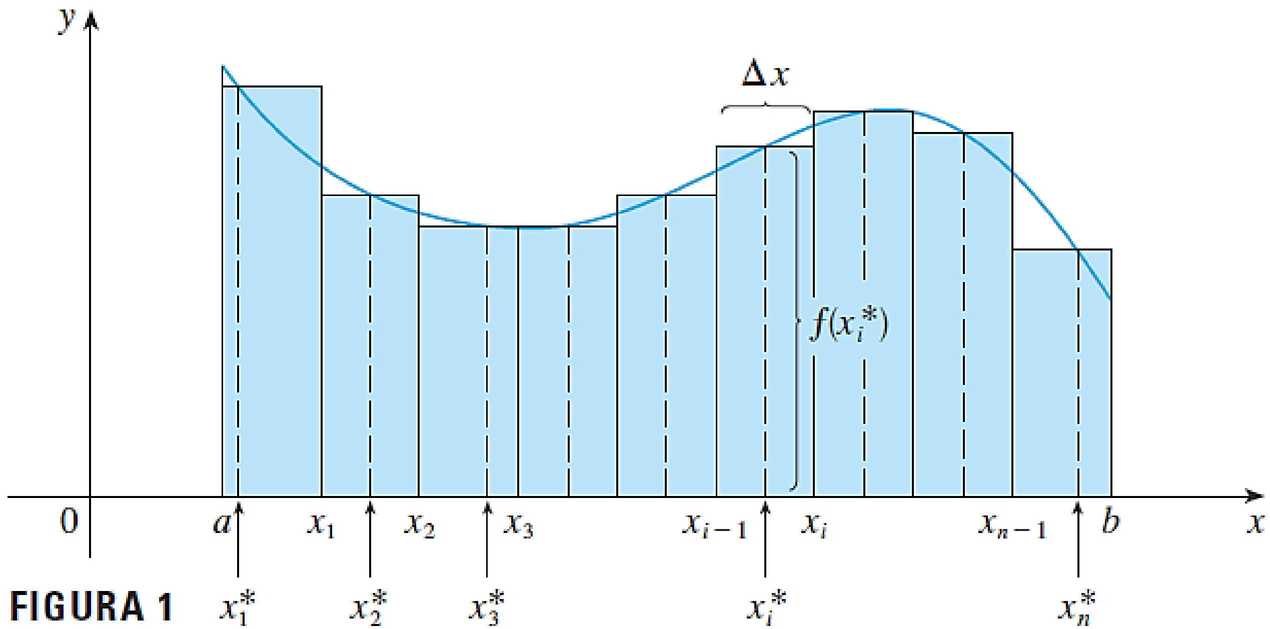


FIGURA 1

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Integrais duplas

➢ Vamos relembrar a integral definida de uma função de uma variável.

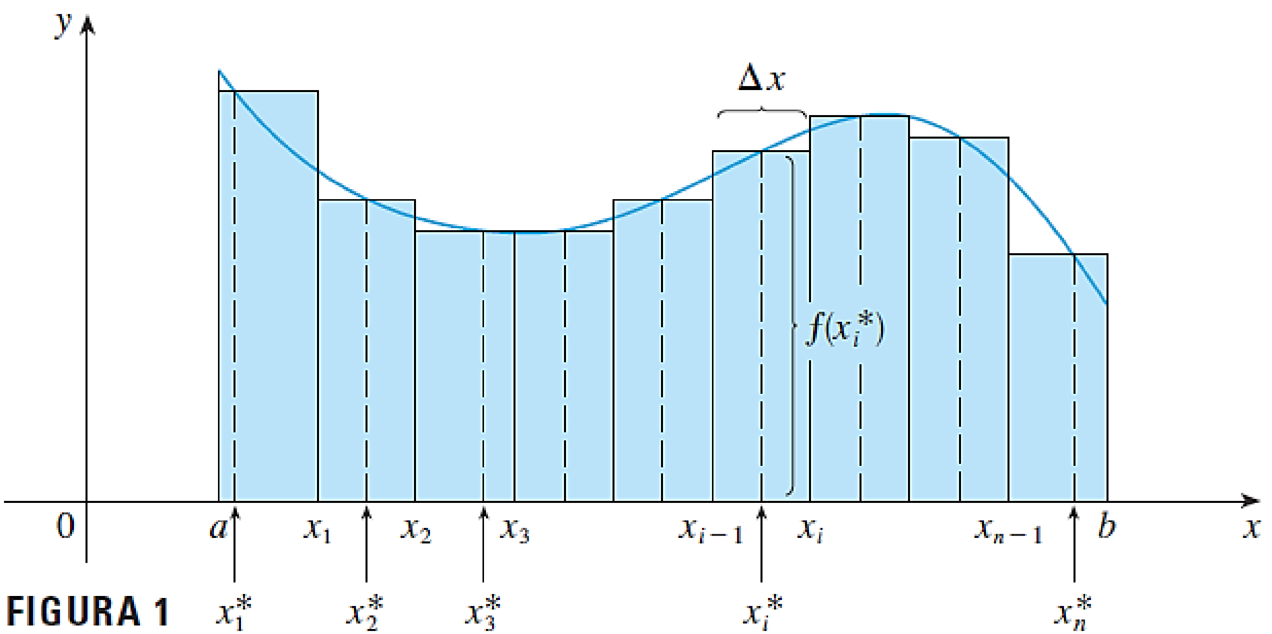


FIGURA 1

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x \qquad\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Volumes e integrais duplas

vamos considerar uma função f de duas variáveis definida em um retângulo fechado

$$R = [a, b] \times [c, d] = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\right\}$$

Volumes e integrais duplas

vamos considerar uma função f de duas variáveis definida em um retângulo fechado

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$$

O gráfico de f é a superfície com equação $z = f(x, y)$.
vamos inicialmente supor que $f(x, y) \geqslant 0$

Volumes e integrais duplas

vamos considerar uma função f de duas variáveis definida em um retângulo fechado

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$$

O gráfico de f é a superfície com equação $z = f(x, y)$.
vamos inicialmente supor que $f(x, y) \geqslant 0$

Seja S o sólido que está acima da região R e abaixo do gráfico de f, (Veja a Figura 2.)

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leqslant z \leqslant f(x, y),\ (x, y) \in R\}$$

Volumes e integrais duplas

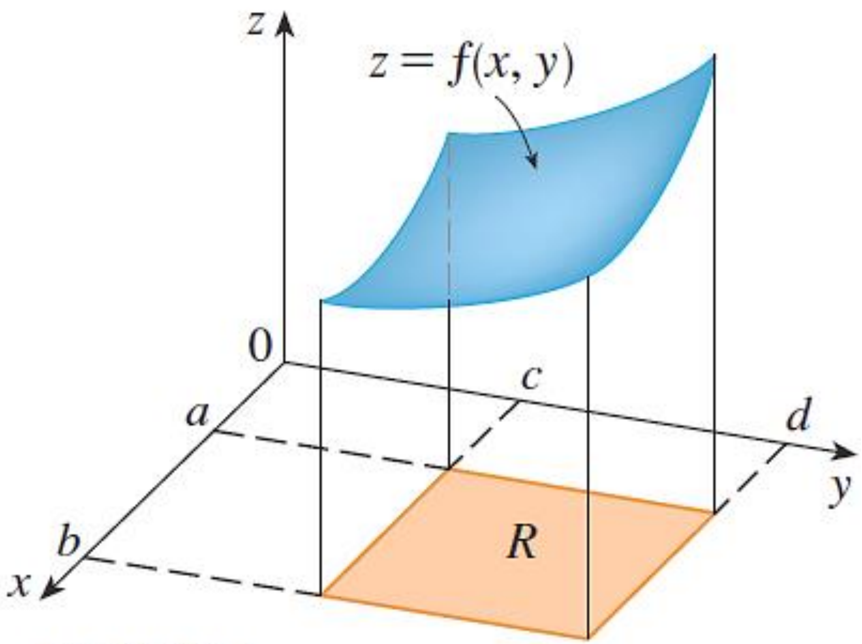


FIGURA 2

- Nosso objetivo é determinar o volume de S.

Volumes e integrais duplas

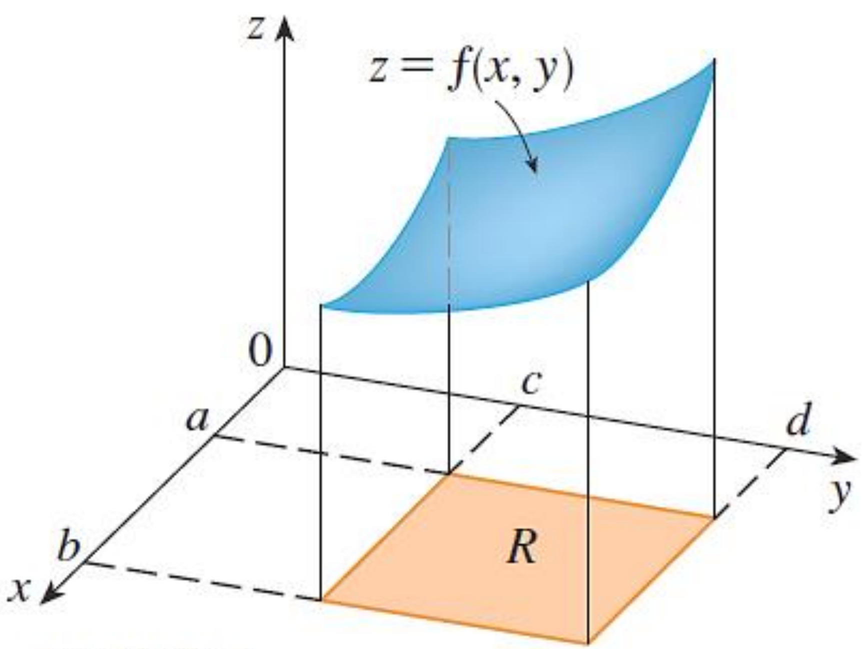


FIGURA 2

- Nosso objetivo é determinar o volume de S.
- Iremos dividir o retângulo R em sub-retângulos.

Volumes e integrais duplas

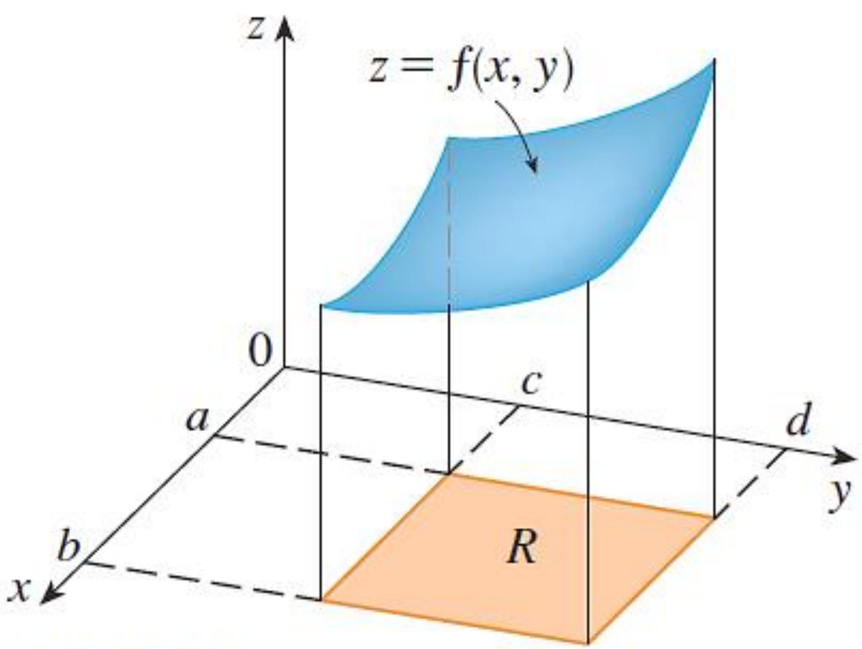


FIGURA 2

- Nosso objetivo é determinar o volume de S.
- Iremos dividir o retângulo R em sub-retângulos.
- Para isso traçamos retas paralelas aos eixos coordenados, passando pelas extremidades dos subintervalos.

Volumes e integrais duplas

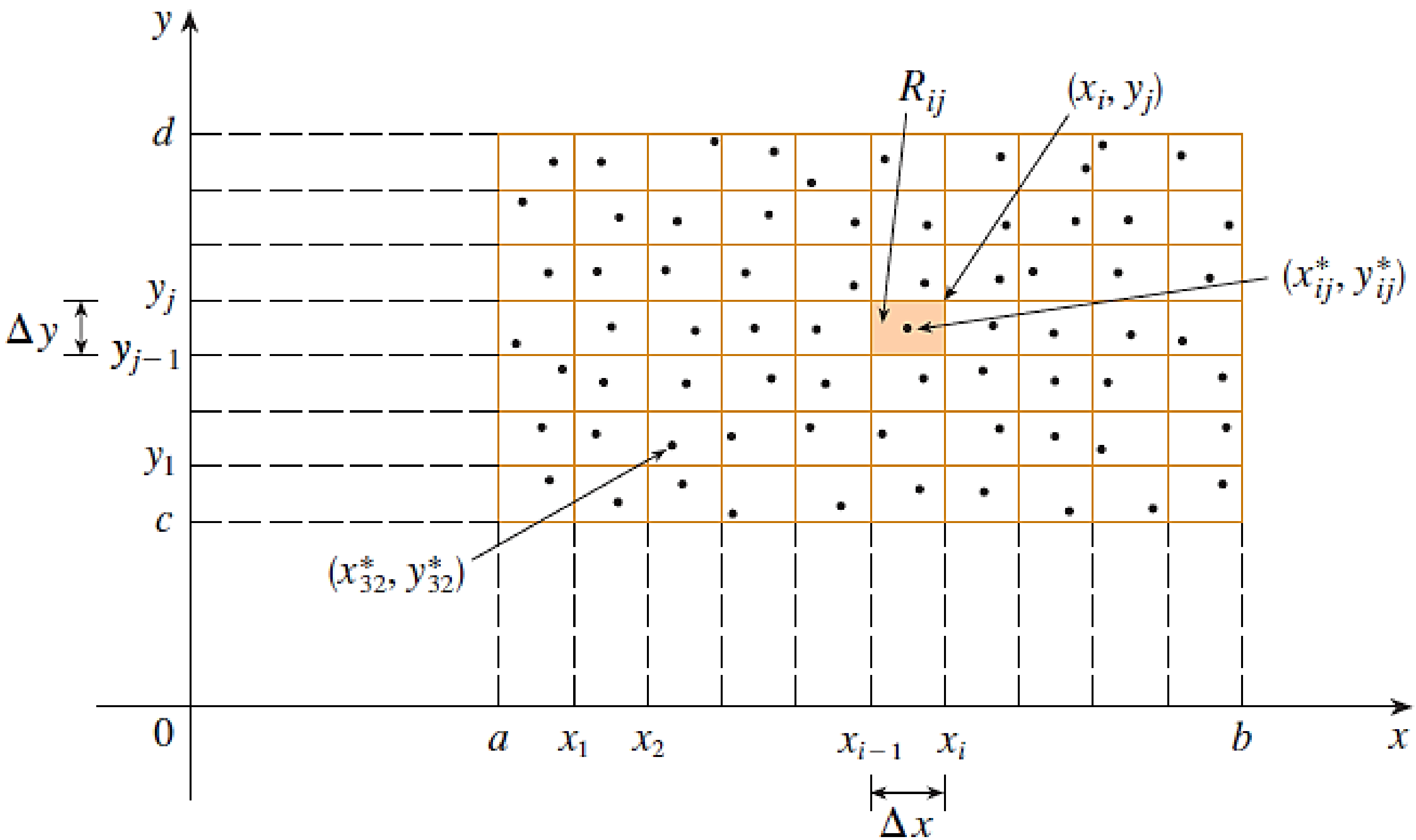


FIGURA 3 Dividindo R em sub-retângulos

Volumes e integrais duplas

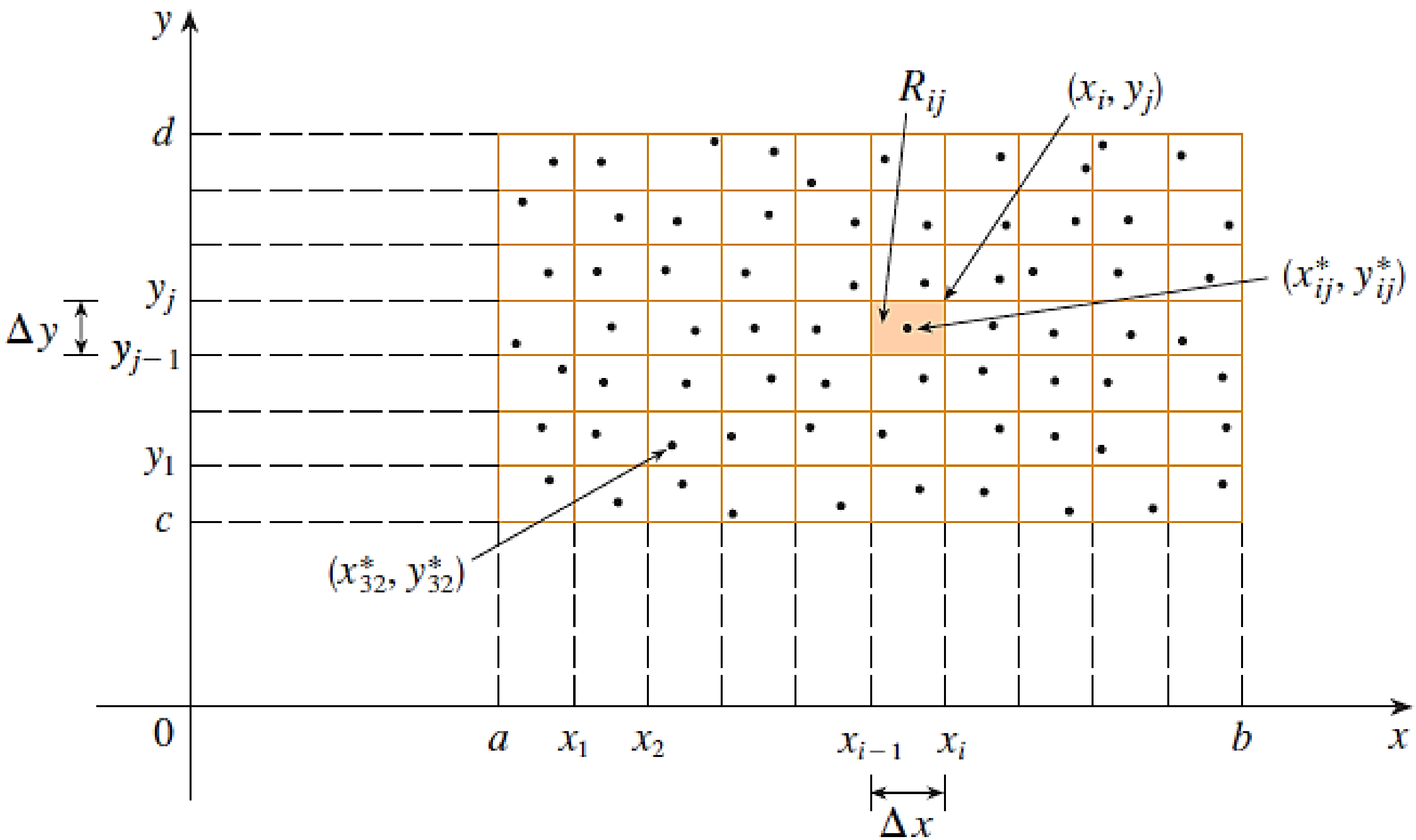


FIGURA 3 Dividindo R em sub-retângulos

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j\}$$

Volumes e integrais duplas

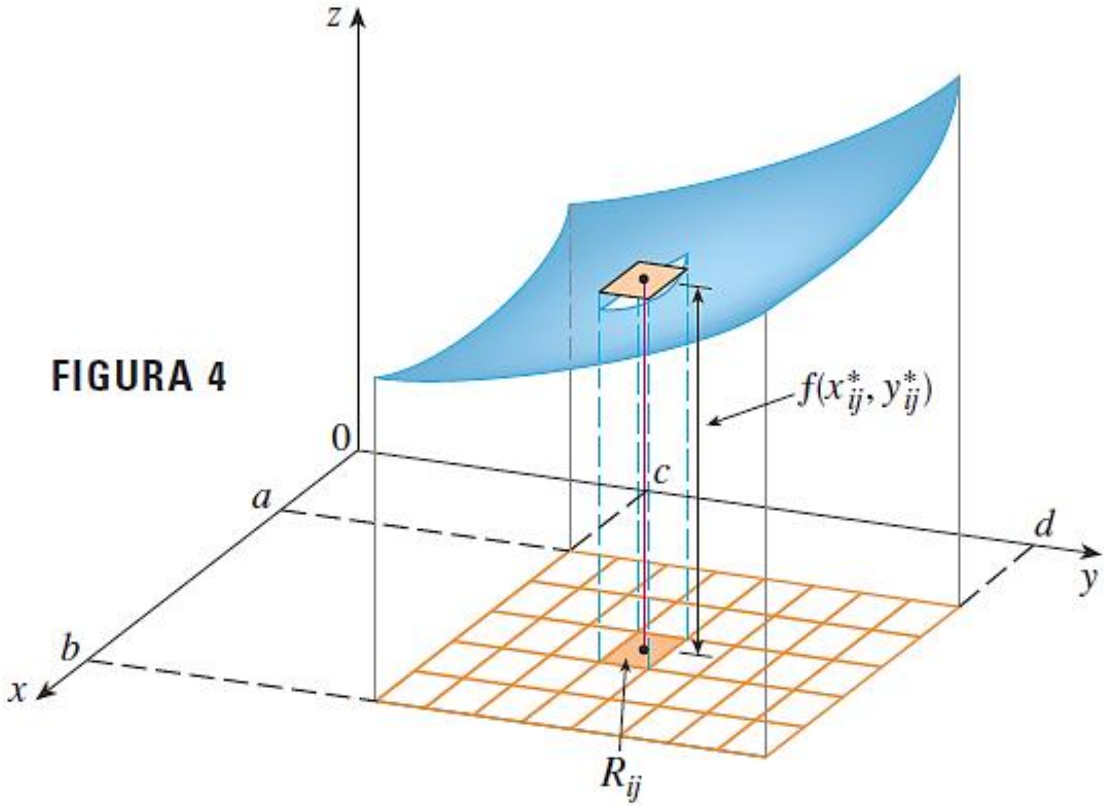


FIGURA 4

Volumes e integrais duplas

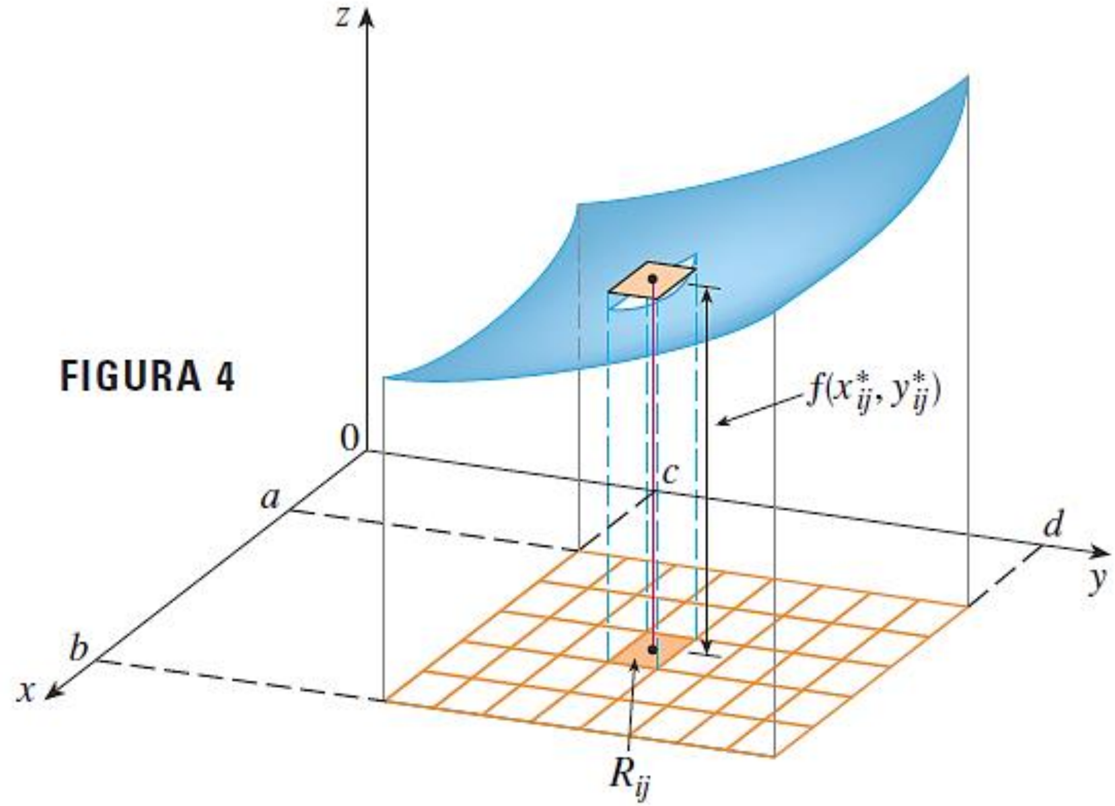


FIGURA 4

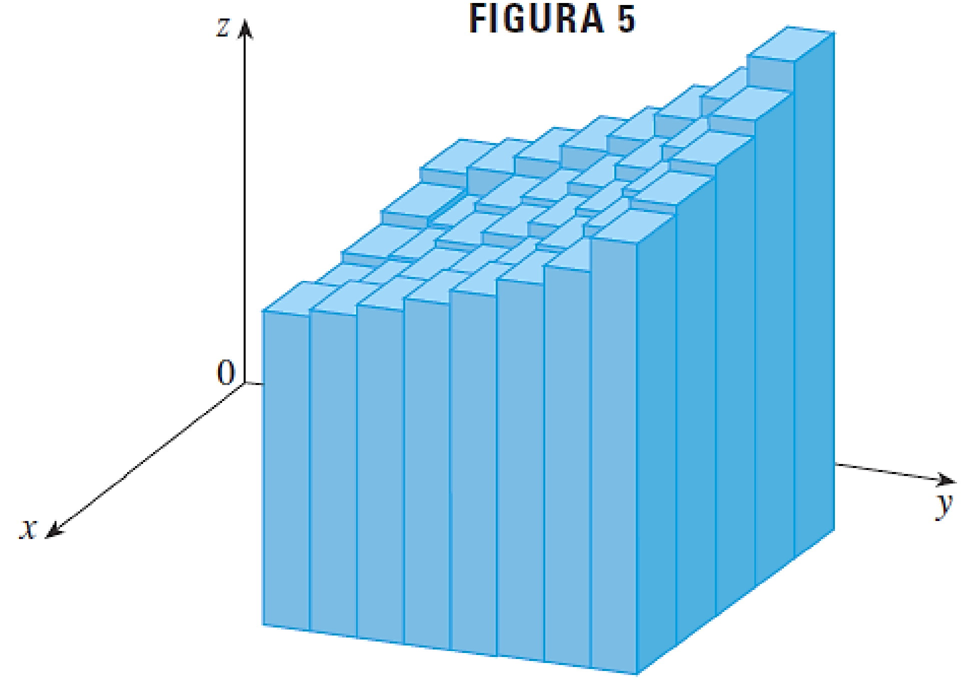
O volume dessa caixa é dado pela sua altura vezes a área do retângulo da base:

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$$

Volumes e integrais duplas

Se seguirmos com esse procedimento para todos os retângulos e somarmos os volumes das caixas correspondentes, obteremos uma aproximação do volume total de S:

FIGURA 5

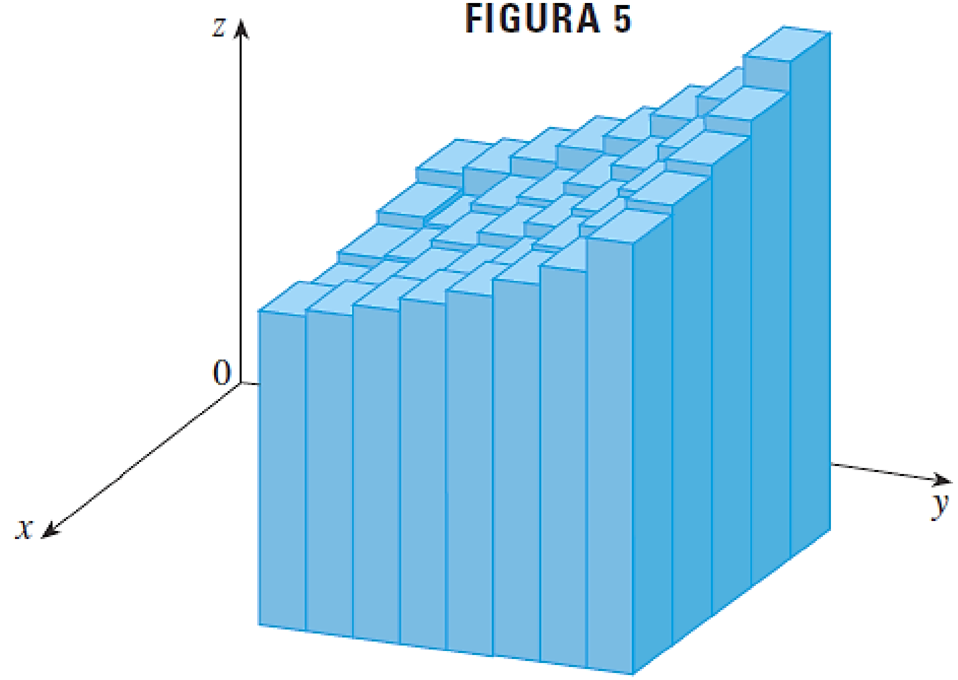


Volumes e integrais duplas

Se seguirmos com esse procedimento para todos os retângulos e somarmos os volumes das caixas correspondentes, obteremos uma aproximação do volume total de S:

$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$$

FIGURA 5



Volumes e integrais duplas

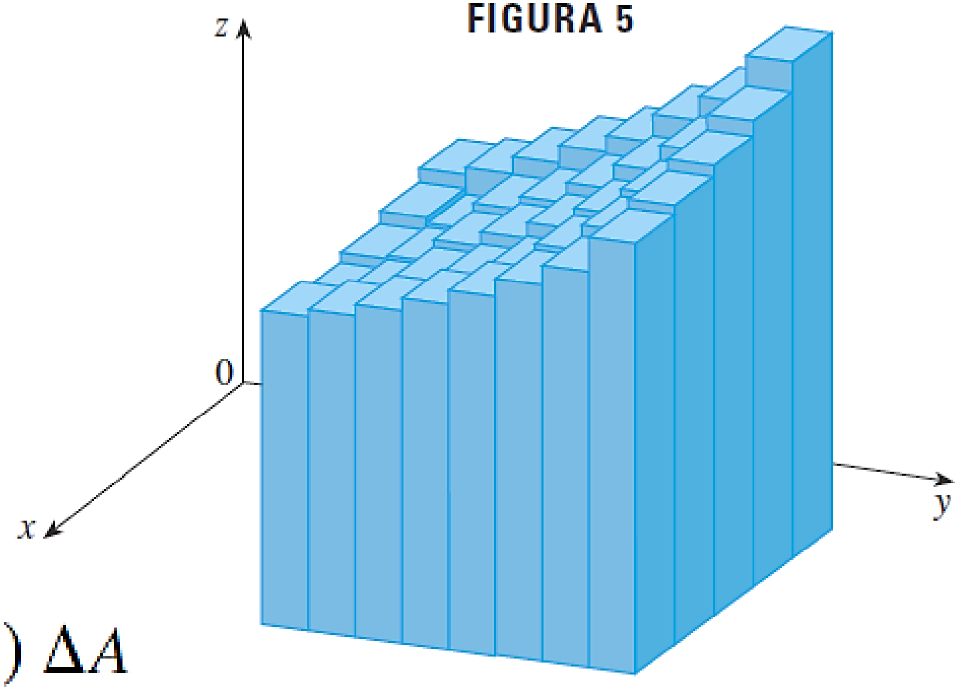
Se seguirmos com esse procedimento para todos os retângulos e somarmos os volumes das caixas correspondentes, obteremos uma aproximação do volume total de S:

$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$$

quando aumentamos os valores de m e n devemos esperar que

$$V = \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$$

FIGURA 5



Integrais duplas

Definição 5

A **integral dupla** de f sobre o retângulo R é se esse limite existir.

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$$

Integrais duplas

Definição 5

A **integral dupla** de f sobre o retângulo R é se esse limite existir.

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$$

O ponto de amostragem (x_{ij}^*, y_{ij}^*) pode ser tomado como qualquer ponto no sub-retângulo R_{ij}, como o canto superior direito (x_i, y_j),

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\, \Delta A$$

Integrais duplas

Se $f(x, y) \geqslant 0$, então o volume V do sólido que está acima do retângulo R e abaixo da superfície $z = f(x, y)$ é

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA$$

Integrais duplas

Se $f(x, y) \geqslant 0$, então o volume V do sólido que está acima do retângulo R e abaixo da superfície $z = f(x, y)$ é

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA$$

soma dupla de Riemann

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$$

Se f for uma função *positiva*, então a soma dupla de Riemann representa a soma dos volumes das colunas, como na Figura 5, e é uma aproximação do volume abaixo do gráfico de f.

Exemplo 1

Estime o volume do sólido que está acima do quadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$ e abaixo do paraboloide elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$.

Integrais duplas

Exemplo 1

Estime o volume do sólido que está acima do quadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$ e abaixo do paraboloide elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$.

Solução:

A área de cada quadrado é $\Delta A = 1$. Aproximando o volume pela soma de Riemann com $m = n = 2$, temos

$$V \approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j)\, \Delta A$$

Integrais duplas

Exemplo 1

Estime o volume do sólido que está acima do quadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$ e abaixo do paraboloide elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$.

Solução:

A área de cada quadrado é $\Delta A = 1$. Aproximando o volume pela soma de Riemann com $m = n = 2$, temos

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j)\,\Delta A \\ &= f(1, 1)\,\Delta A + f(1, 2)\,\Delta A + f(2, 1)\,\Delta A + f(2, 2)\,\Delta A \end{aligned}$$

Integrais duplas

Exemplo 1

Estime o volume do sólido que está acima do quadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$ e abaixo do paraboloide elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$.

Solução:

A área de cada quadrado é $\Delta A = 1$. Aproximando o volume pela soma de Riemann com $m = n = 2$, temos

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j)\, \Delta A \\ &= f(1, 1)\, \Delta A + f(1, 2)\, \Delta A + f(2, 1)\, \Delta A + f(2, 2)\, \Delta A \\ &= 13(1) + 7(1) + 10(1) + 4(1) = 34 \end{aligned}$$

Integrais duplas

Exemplo 1

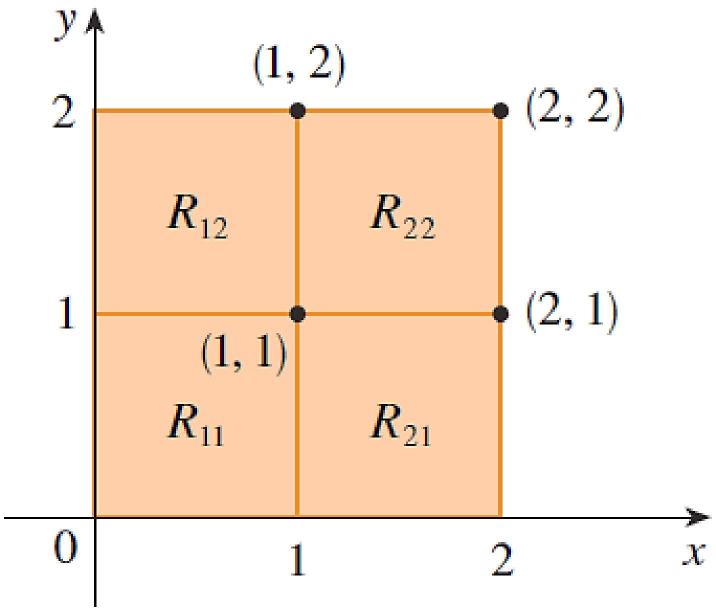


FIGURA 6

Integrais duplas

Exemplo 1

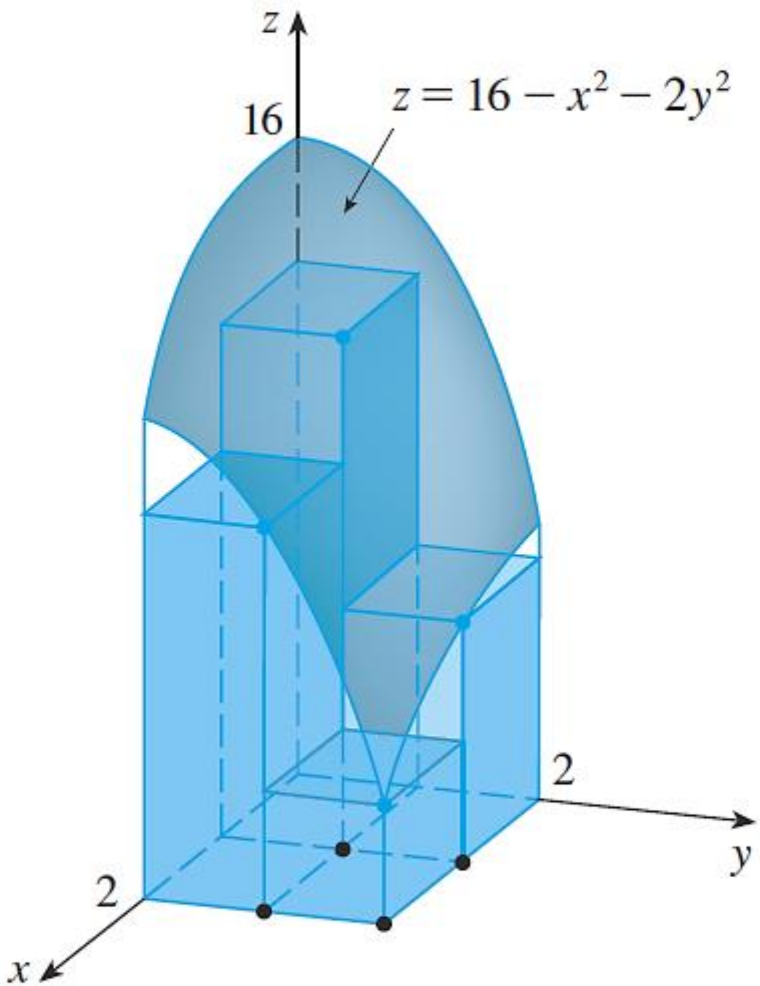


FIGURA 7

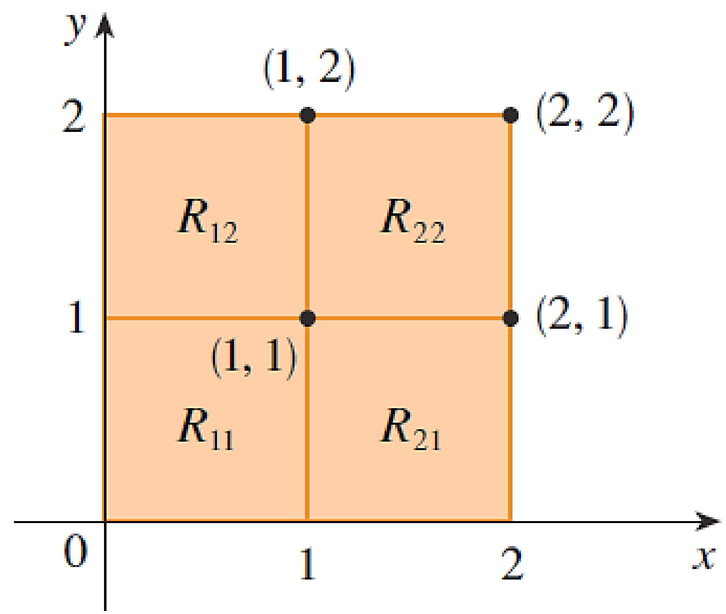
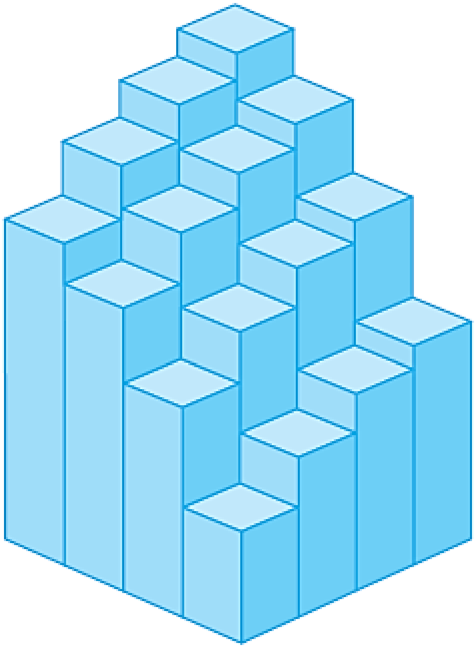


FIGURA 6

$$V \approx 34$$

Integrais duplas

Exemplo 1

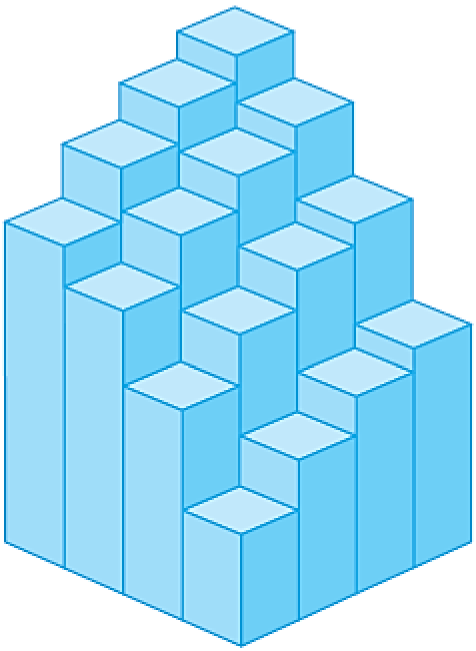


(a) $m = n = 4$, $V \approx 41{,}5$

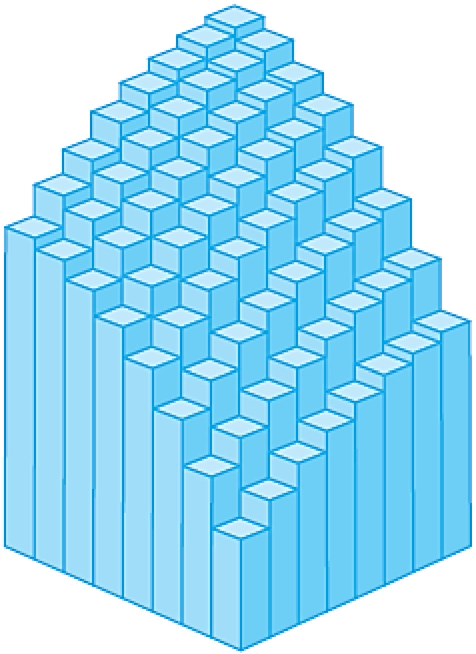
FIGURA 8 As aproximações para as somas de Riemann do volume abaixo de $z = 16 - x^2 - 2y^2$ ficam mais precisas quando m e n aumentam.

Integrais duplas

Exemplo 1



(a) $m = n = 4$, $V \approx 41{,}5$

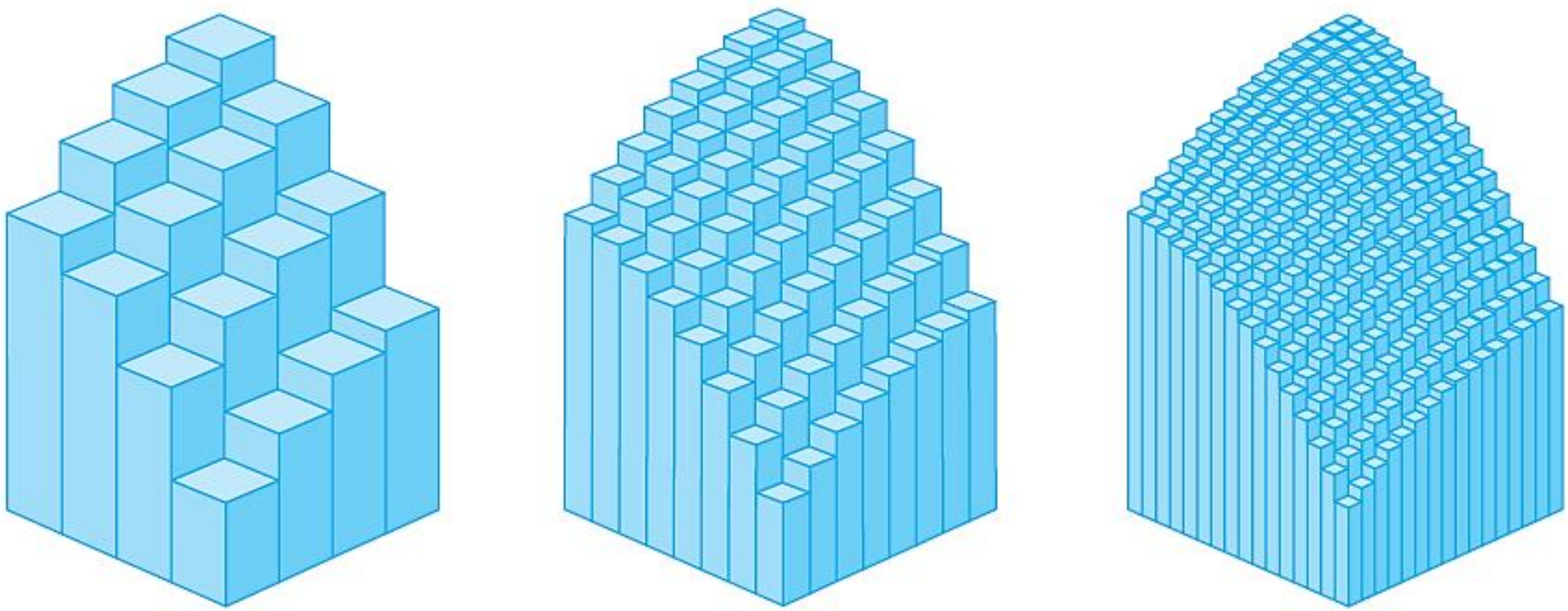


(b) $m = n = 8$, $V \approx 44{,}875$

FIGURA 8 As aproximações para as somas de Riemann do volume abaixo de $z = 16 - x^2 - 2y^2$ ficam mais precisas quando m e n aumentam.

Integrais duplas

Exemplo 1



(a) $m = n = 4$, $V \approx 41{,}5$ (b) $m = n = 8$, $V \approx 44{,}875$ (c) $m = n = 16$, $V \approx 46{,}46875$

FIGURA 8 As aproximações para as somas de Riemann do volume abaixo de $z = 16 - x^2 - 2y^2$ ficam mais precisas quando m e n aumentam.

A regra do ponto médio

- Utilizamos métodos para aproximar as integrais de funções de uma variável real.
- Por exemplo, Ponto Médio, a Regra dos Trapézios, a Regra de Simpson do Cálculo Numérico.

A regra do ponto médio

- Utilizamos métodos para aproximar as integrais de funções de uma variável real.
- Por exemplo, Ponto Médio, a Regra dos Trapézios, a Regra de Simpson do Cálculo Numérico.
- Existem regras correspondentes para integrais duplas.
- Consideraremos aqui somente a Regra do Ponto Médio para integrais duplas.

Regra do Ponto Médio para Integrais Múltiplas

$$\iint_R f(x, y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j)\, \Delta A$$

onde $\overline{x}_i$ é o ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$ e $\overline{y}_j$ é o ponto médio de $[y_{j-1}, y_j]$.

A regra do ponto médio

Exemplo 3

Use a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$ para estimar o valor da integral $\iint_R (x - 3y^2)\, dA$, onde

$R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$.

A regra do ponto médio

Exemplo 3

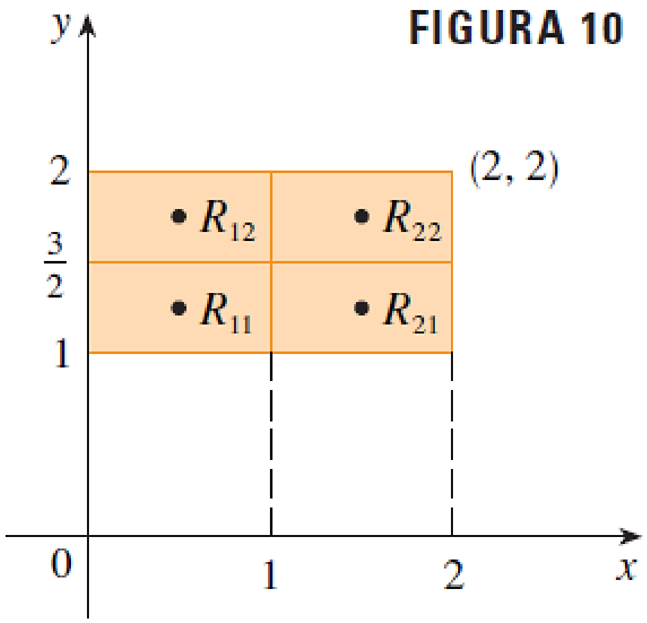
Use a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$ para estimar o valor da integral $\iint_R (x - 3y^2)\, dA$, onde

$R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$.

Solução:

Usando $m = n = 2$, calcularemos $f(x, y) = x - 3y^2$ no centro dos quatro sub-retângulos mostrados na Figura 10.

FIGURA 10



A regra do ponto médio

Exemplo 3

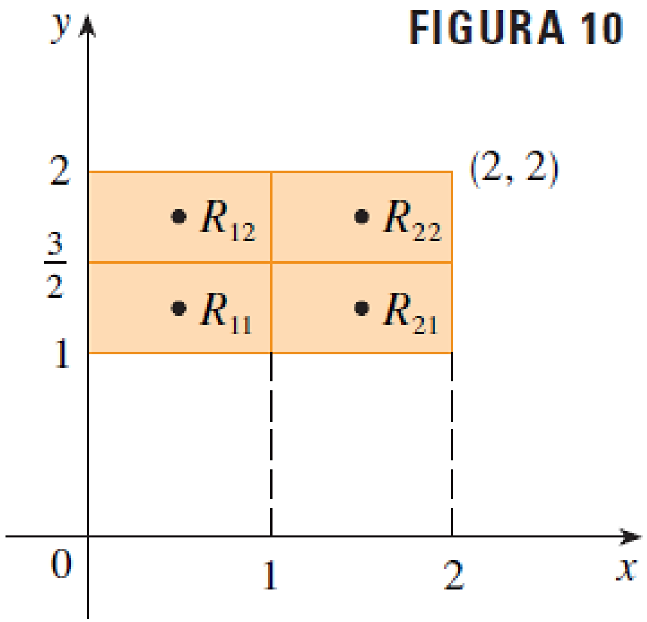
Use a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$ para estimar o valor da integral $\iint_R (x - 3y^2)\,dA$, onde

$R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$.

Solução:

Usando $m = n = 2$, calcularemos $f(x, y) = x - 3y^2$ no centro dos quatro sub-retângulos mostrados na Figura 10.

FIGURA 10



Logo, $\bar{x}_1 = \frac{1}{2}$, $\bar{x}_2 = \frac{3}{2}$, $\bar{y}_1 = \frac{5}{4}$ e $\bar{y}_2 = \frac{7}{4}$.

A área de cada sub-retângulo é $\Delta A = \frac{1}{2}$.

A regra do ponto médio

Exemplo 3

$$\iint_R (x - 3y^2)\, dA \approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j)\, \Delta A$$

A regra do ponto médio

Exemplo 3

$$\iint_R (x - 3y^2)\, dA \approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\, \Delta A$$

$$= f(\bar{x}_1, \bar{y}_1)\, \Delta A + f(\bar{x}_1, \bar{y}_2)\, \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_1)\, \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_2)\, \Delta A$$

A regra do ponto médio

Exemplo 3

$$\iint_R (x - 3y^2)\, dA \approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j)\, \Delta A$$

$$= f(\overline{x}_1, \overline{y}_1)\, \Delta A + f(\overline{x}_1, \overline{y}_2)\, \Delta A + f(\overline{x}_2, \overline{y}_1)\, \Delta A + f(\overline{x}_2, \overline{y}_2)\, \Delta A$$

$$= f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{7}{4}\right) \Delta A$$

A regra do ponto médio

Exemplo 3

$$\iint_R (x - 3y^2)\,dA \approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\,\Delta A$$

$$= f(\bar{x}_1, \bar{y}_1)\,\Delta A + f(\bar{x}_1, \bar{y}_2)\,\Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_1)\,\Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_2)\,\Delta A$$

$$= f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}\right)\Delta A + f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{4}\right)\Delta A + f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{4}\right)\Delta A + f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{7}{4}\right)\Delta A$$

$$= \left(-\tfrac{67}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{139}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{51}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{123}{16}\right)\tfrac{1}{2}$$

A regra do ponto médio

Exemplo 3

$$\iint_R (x - 3y^2)\, dA \approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\, \Delta A$$

$$= f(\bar{x}_1, \bar{y}_1)\, \Delta A + f(\bar{x}_1, \bar{y}_2)\, \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_1)\, \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_2)\, \Delta A$$

$$= f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{7}{4}\right) \Delta A$$

$$= \left(-\tfrac{67}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{139}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{51}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{123}{16}\right)\tfrac{1}{2}$$

$$= -\tfrac{95}{8} = -11{,}875$$

A regra do ponto médio

Exemplo 3

$$\iint_R (x - 3y^2)\, dA \approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\, \Delta A$$

$$= f(\bar{x}_1, \bar{y}_1)\, \Delta A + f(\bar{x}_1, \bar{y}_2)\, \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_1)\, \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_2)\, \Delta A$$

$$= f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{7}{4}\right) \Delta A$$

$$= \left(-\tfrac{67}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{139}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{51}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{123}{16}\right)\tfrac{1}{2}$$

$$= -\tfrac{95}{8} = -11{,}875$$

$$\iint_R (x - 3y^2)\, dA \approx -11{,}875$$

A regra do ponto médio

Exemplo 3

$$\iint_R (x - 3y^2)\, dA \approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\, \Delta A$$

$$= f(\bar{x}_1, \bar{y}_1)\, \Delta A + f(\bar{x}_1, \bar{y}_2)\, \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_1)\, \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_2)\, \Delta A$$

$$= f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{7}{4}\right) \Delta A$$

$$= \left(-\tfrac{67}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{139}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{51}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{123}{16}\right)\tfrac{1}{2}$$

$$= -\tfrac{95}{8} = -11{,}875$$

$$\iint_R (x - 3y^2)\, dA \approx -11{,}875$$

O integrando no Exemplo 3 não é uma função positiva, dessa forma, a integral dupla não é um volume.

Para depois desta aula:

- Estudar seção 15.1 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

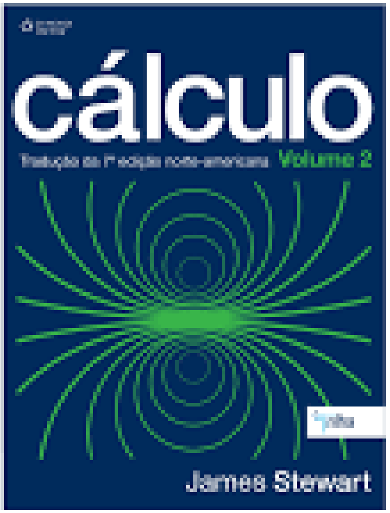
Próxima aula:

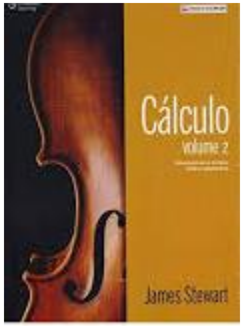
- Integrais duplas iteradas.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed.





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br