Cálculo I

Licenciatura

Semana 08 - Aula 1
Taxas relacionadas e diferenciais

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Taxas relacionadas

- Problemas em que uma certa quantidade varia em relação a outras taxas de variação.

Taxas relacionadas

- Problemas em que uma certa quantidade varia em relação a outras taxas de variação.

Exemplo (Filtro cônico)

- Seja um líquido escoando por um filtro cônico;

Taxas relacionadas

- Problemas em que uma certa quantidade varia em relação a outras taxas de variação.

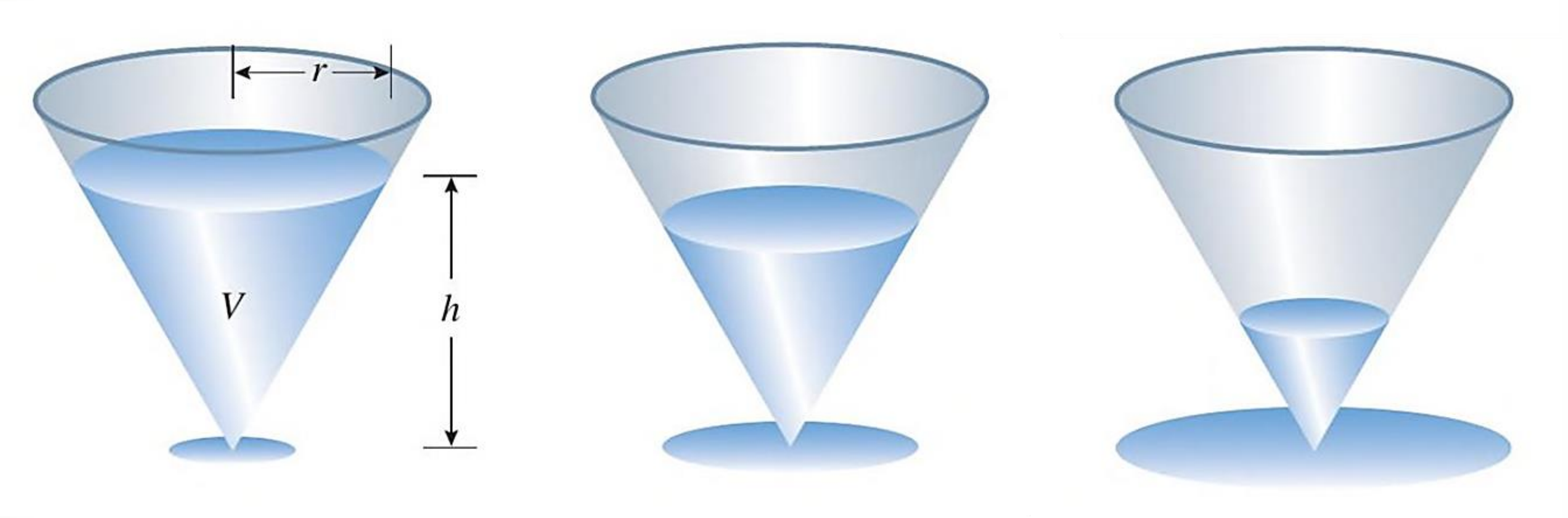
Exemplo (Filtro cônico)

- Seja um líquido escoando por um filtro cônico;

- Estaremos interessados em encontrar a taxa de variação do volume em relação ao tempo.

Taxas relacionadas

Exemplo (Filtro cônico)



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Taxas relacionadas

Exemplo (Filtro cônico)

Volume do cone:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Taxas relacionadas

Exemplo (Filtro cônico)

Volume do cone:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Mas: $r = r(\mathrm{t})$ e $h = h(t)$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Taxas relacionadas

Exemplo (Filtro cônico)

$$\frac{d}{dt}V = \frac{1}{3}\pi\frac{d}{dt}[r^2h]$$

Taxas relacionadas

Exemplo (Filtro cônico)

$$\frac{d}{dt}V = \frac{1}{3}\pi\frac{d}{dt}[r^2h]$$

$$\frac{d}{dt}V = \frac{1}{3}\pi\left\{r^2\frac{d}{dt}h + h.2r.\frac{d}{dt}r\right\}$$

Taxas relacionadas

Exemplo (Filtro cônico)

$$\frac{d}{dt}V = \frac{1}{3}\pi\frac{d}{dt}[r^2h]$$

$$\frac{d}{dt}V = \frac{1}{3}\pi\left\{r^2\frac{d}{dt}h + h.2r.\frac{d}{dt}r\right\}$$

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left\{r^2\frac{dh}{dt} + 2rh\frac{dr}{dt}\right\}}$$

Exemplo

O óleo derramado por um navio tanque se espalha em forma circular cujo raio cresce a uma taxa constante de $\mathbf{0,5\ m/s}$.

Com que velocidade a área estará crescendo quando o raio for de $\mathbf{30\ m}$?

Exemplo

O óleo derramado por um navio tanque se espalha em forma circular cujo raio cresce a uma taxa constante de $\mathbf{0,5\ m/s}$.

Com que velocidade a área estará crescendo quando o raio for de $\mathbf{30\ m}$?

$$\boldsymbol{A = \pi r^2}$$

Exemplo

O óleo derramado por um navio tanque se espalha em forma circular cujo raio cresce a uma taxa constante de $\mathbf{0,5\ m/s}$.

Com que velocidade a área estará crescendo quando o raio for de $\mathbf{30\ m}$?

$\boldsymbol{A = \pi r^2}$ Para $\boldsymbol{r = 30\ m}$ e

Exemplo

O óleo derramado por um navio tanque se espalha em forma circular cujo raio cresce a uma taxa constante de $\mathbf{0,5\ m/s}$.

Com que velocidade a área estará crescendo quando o raio for de $\mathbf{30\ m}$?

$\boldsymbol{A = \pi r^2}$ Para $\boldsymbol{r = 30\ m}$ e $\boldsymbol{\frac{dr}{dt} = 0,5\ m/s}$

Exemplo

O óleo derramado por um navio tanque se espalha em forma circular cujo raio cresce a uma taxa constante de $\mathbf{0,5\ m/s}$.

Com que velocidade a área estará crescendo quando o raio for de $\mathbf{30\ m}$?

$\boldsymbol{A = \pi r^2}$ Para $\boldsymbol{r = 30\ m}$ e $\boldsymbol{\frac{dr}{dt} = 0,5\ m/s}$

$$\frac{d}{dt}A = \pi\frac{d}{dt}[r^2]$$

Exemplo

O óleo derramado por um navio tanque se espalha em forma circular cujo raio cresce a uma taxa constante de $\mathbf{0,5\ m/s}$.

Com que velocidade a área estará crescendo quando o raio for de $\mathbf{30\ m}$?

$\boldsymbol{A = \pi r^2}$ Para $\boldsymbol{r = 30\ m}$ e $\boldsymbol{\frac{dr}{dt} = 0,5\ m/s}$

$$\frac{d}{dt}A = \pi \frac{d}{dt}[r^2] = \pi 2r \frac{d[r]}{dt}$$

Exemplo

O óleo derramado por um navio tanque se espalha em forma circular cujo raio cresce a uma taxa constante de $\mathbf{0,5\ m/s}$.

Com que velocidade a área estará crescendo quando o raio for de $\mathbf{30\ m}$?

$\boldsymbol{A = \pi r^2}$ Para $\boldsymbol{r = 30\ m}$ e $\boldsymbol{\frac{dr}{dt} = 0,5\ m/s}$

$$\frac{d}{dt}A = \pi \frac{d}{dt}[r^2] = \pi 2r \frac{d[r]}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}A = 2\pi \times 30 \times 0{,}5$$

Exemplo

O óleo derramado por um navio tanque se espalha em forma circular cujo raio cresce a uma taxa constante de $\mathbf{0,5\ m/s}$.

Com que velocidade a área estará crescendo quando o raio for de $\mathbf{30\ m}$?

$\boldsymbol{A = \pi r^2}$ Para $\boldsymbol{r = 30\ m}$ e $\boldsymbol{\frac{dr}{dt} = 0,5\ m/s}$

$$\frac{d}{dt}A = \pi \frac{d}{dt}[r^2] = \pi 2r \frac{d[r]}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}A = 2\pi \times 30 \times 0,5$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}A = 94,2\ m^2/s}$$

prof. Henrique A M Faria

Taxas relacionadas

Uma Estratégia para Resolver Problemas de Taxas Relacionadas

Passo 1 Associe uma letra a cada quantidade que varia com o tempo e às demais que possam ser relevantes ao problema. Dê uma definição para cada letra.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Taxas relacionadas

Uma Estratégia para Resolver Problemas de Taxas Relacionadas

Passo 1 Associe uma letra a cada quantidade que varia com o tempo e às demais que possam ser relevantes ao problema. Dê uma definição para cada letra.

Passo 2 Identifique as taxas de variação que são conhecidas e a taxa de variação que deve ser encontrada. Interprete cada taxa como uma derivada.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Taxas relacionadas

Uma Estratégia para Resolver Problemas de Taxas Relacionadas

Passo 1 Associe uma letra a cada quantidade que varia com o tempo e às demais que possam ser relevantes ao problema. Dê uma definição para cada letra.

Passo 2 Identifique as taxas de variação que são conhecidas e a taxa de variação que deve ser encontrada. Interprete cada taxa como uma derivada.

Passo 3 Encontre uma equação que relacione as variáveis cujas taxas de variação foram identificadas no Passo 2. Para isso, muitas vezes é conveniente esboçar uma figura devidamente etiquetada que ilustre as relações.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Taxas relacionadas

Uma Estratégia para Resolver Problemas de Taxas Relacionadas

Passo 1 Associe uma letra a cada quantidade que varia com o tempo e às demais que possam ser relevantes ao problema. Dê uma definição para cada letra.

Passo 2 Identifique as taxas de variação que são conhecidas e a taxa de variação que deve ser encontrada. Interprete cada taxa como uma derivada.

Passo 3 Encontre uma equação que relacione as variáveis cujas taxas de variação foram identificadas no Passo 2. Para isso, muitas vezes é conveniente esboçar uma figura devidamente etiquetada que ilustre as relações.

Passo 4 Derive ambos os lados da equação obtida no Passo 3 em relação ao tempo para obter uma relação entre as taxas de variação conhecidas e a taxa de variação desconhecida.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Taxas relacionadas

Uma Estratégia para Resolver Problemas de Taxas Relacionadas

Passo 1 Associe uma letra a cada quantidade que varia com o tempo e às demais que possam ser relevantes ao problema. Dê uma definição para cada letra.

Passo 2 Identifique as taxas de variação que são conhecidas e a taxa de variação que deve ser encontrada. Interprete cada taxa como uma derivada.

Passo 3 Encontre uma equação que relacione as variáveis cujas taxas de variação foram identificadas no Passo 2. Para isso, muitas vezes é conveniente esboçar uma figura devidamente etiquetada que ilustre as relações.

Passo 4 Derive ambos os lados da equação obtida no Passo 3 em relação ao tempo para obter uma relação entre as taxas de variação conhecidas e a taxa de variação desconhecida.

Passo 5 *Depois* de completar o Passo 4, substitua todos os valores conhecidos das taxas de variação e das variáveis, e só então resolva a equação para a taxa de variação desconhecida.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Aproximação local

Aproximação local

- Na seção 3.2 vimos que se uma função for diferenciável em $\boldsymbol{x_o}$, então uma pequena parte de seu gráfico em torno do ponto $\boldsymbol{P(x_o, f(x_o))}$ se aproxima de uma reta não vertical.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Aproximação local

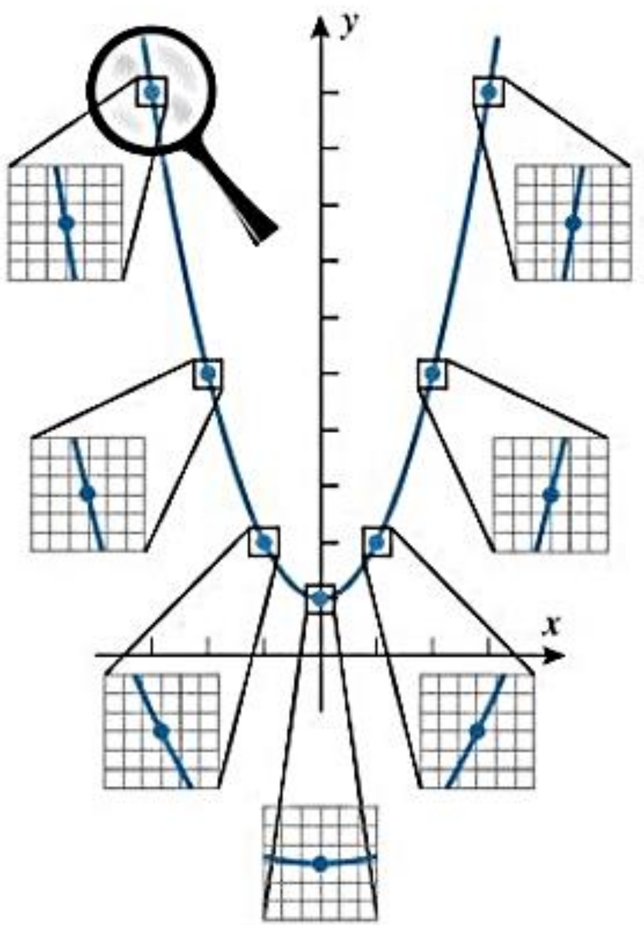
- Na seção 3.2 vimos que se uma função for diferenciável em $\boldsymbol{x_o}$, então uma pequena parte de seu gráfico em torno do ponto $\boldsymbol{P(x_o, f(x_o))}$ se aproxima de uma reta não vertical.

- Por **exemplo**, no gráfico $\boldsymbol{y = x^2 + 1}$ a reta que melhor se aproxima de $\boldsymbol{f}$ em $\boldsymbol{P(x_o, f(x_o))}$ é a reta tangente:

$$\boldsymbol{y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Aproximação local

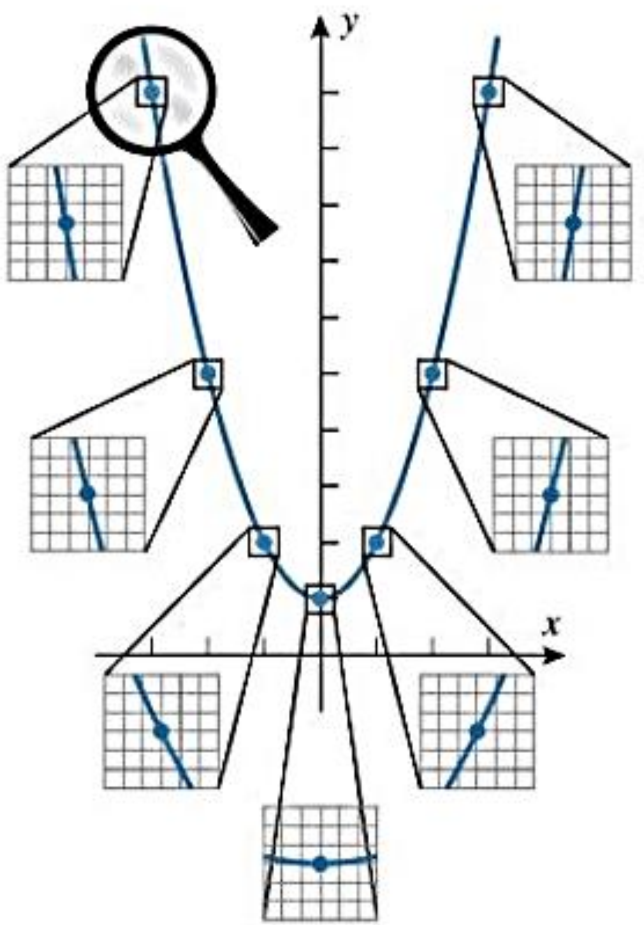


Ampliando partes do gráfico de $y = x^2 + 1$

- Exemplo, $y = x^2 + 1$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Aproximação local



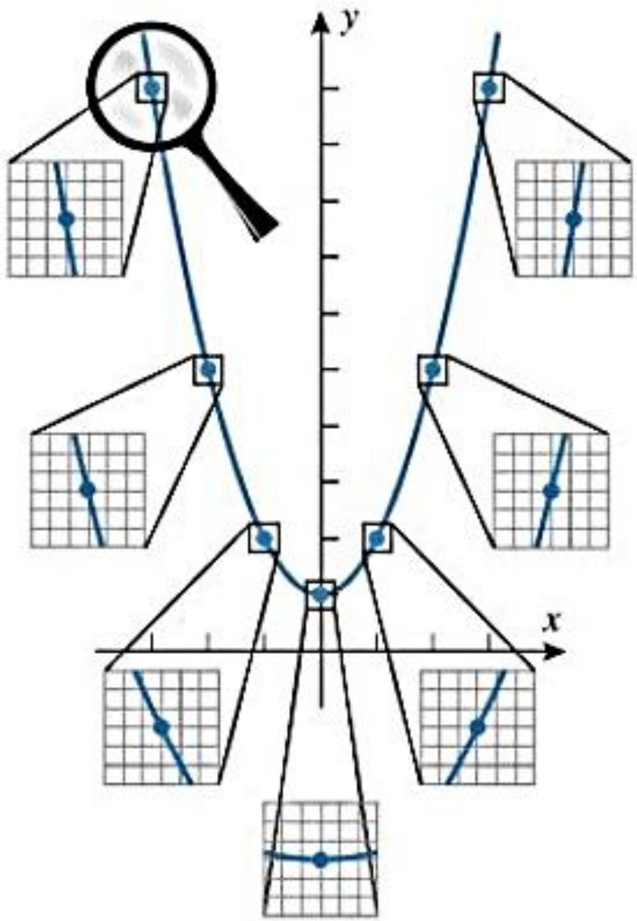
Ampliando partes do gráfico de $y = x^2 + 1$

- Exemplo, $y = x^2 + 1$
- Então, para valores de x muito próximos de x_o, tem-se:

$$f(x) \approx f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Aproximação local



Ampliando partes do gráfico de $y = x^2 + 1$

- Exemplo, $y = x^2 + 1$
- Então, para valores de x muito próximos de x_o, tem-se:

$$f(x) \approx f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$$

- Esse tratamento é denominado **aproximação local de f em x_o**. Também expresso por:

$$f(x_o + \Delta x) \approx f(x_o) + f'(x_o)(\Delta x)$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo

(a) Encontrar a aproximação linear local de $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$ em $\boldsymbol{x_o = 1}$;

(b) Use a aproximação de (a) para estimar a raiz $\boldsymbol{\sqrt{1,1}}$ com duas casas decimais.

Exemplo

(a) Encontrar a aproximação linear local de $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$ em $\boldsymbol{x_o = 1}$;

(b) Use a aproximação de (a) para estimar a raiz $\boldsymbol{\sqrt{1,1}}$ com duas casas decimais.

(a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Exemplo

(a) Encontrar a aproximação linear local de $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$ em $\boldsymbol{x_o = 1}$;

(b) Use a aproximação de (a) para estimar a raiz $\boldsymbol{\sqrt{1,1}}$ com duas casas decimais.

(a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad como\colon\ f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Exemplo

(a) Encontrar a aproximação linear local de $f(x) = \sqrt{x}$ em $x_o = 1$;

(b) Use a aproximação de (a) para estimar a raiz $\sqrt{1,1}$ com duas casas decimais.

(a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad$ $como$: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$\sqrt{x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) \quad \rightarrow$$

Exemplo

(a) Encontrar a aproximação linear local de $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$ em $\boldsymbol{x_o = 1}$;

(b) Use a aproximação de (a) para estimar a raiz $\boldsymbol{\sqrt{1,1}}$ com duas casas decimais.

(a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad como\colon\ f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$\sqrt{x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) \quad \rightarrow \quad \boxed{\sqrt{x} \approx 1 + \frac{1}{2}(x - 1)}$$

Exemplo

(a) Encontrar a aproximação linear local de $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$ em $\boldsymbol{x_o = 1}$;

(b) Use a aproximação de (a) para estimar a raiz $\boldsymbol{\sqrt{1,1}}$ com duas casas decimais.

(a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad como\colon f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$\sqrt{x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) \quad \rightarrow \quad \boxed{\sqrt{x} \approx 1 + \frac{1}{2}(x - 1)}$$

(b) $\quad \sqrt{1{,}1} \approx 1 + \dfrac{1}{2}(1{,}1 - 1) \quad \rightarrow$

Exemplo

(a) Encontrar a aproximação linear local de $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$ em $\boldsymbol{x_o = 1}$;

(b) Use a aproximação de (a) para estimar a raiz $\boldsymbol{\sqrt{1,1}}$ com duas casas decimais.

(a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad como\text{: } f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$\sqrt{x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) \quad \rightarrow \quad \boxed{\sqrt{x} \approx 1 + \frac{1}{2}(x - 1)}$$

(b) $\sqrt{1,1} \approx 1 + \dfrac{1}{2}(1,1 - 1) \quad \rightarrow \quad \boxed{\sqrt{1,1} \approx 1,05}$

Diferenciais

Diferenciais

- No desenvolvimento do Cálculo a notação de Leibniz (dy/dx) acabou prevalecendo sobre a notação de Newton;

Diferenciais

- No desenvolvimento do Cálculo a notação de Leibniz (dy/dx) acabou prevalecendo sobre a notação de Newton;
- Uma das razões é por sugerir formas como a **regra da cadeia**:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Diferenciais

- No desenvolvimento do Cálculo a notação de Leibniz (dy/dx) acabou prevalecendo sobre a notação de Newton;
- Uma das razões é por sugerir formas como a **regra da cadeia**:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

- Nesta seção iremos definir os símbolos "$\boldsymbol{dy}$" e "$\boldsymbol{dx}$", chamados de **diferenciais**, de modo que dy/dx possa ser tratados como um razão.

Diferenciais

- Seja uma função f diferenciável em um ponto x;
- Sendo dx definido como variável independente, que poderá assumir qualquer valor real;

Diferenciais

- Seja uma função ***f*** diferenciável em um ponto ***x***;
- Sendo ***dx*** definido como variável independente, que poderá assumir qualquer valor real;
- Definimos então que:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad \Longrightarrow \qquad dy = f'(x)dx$$

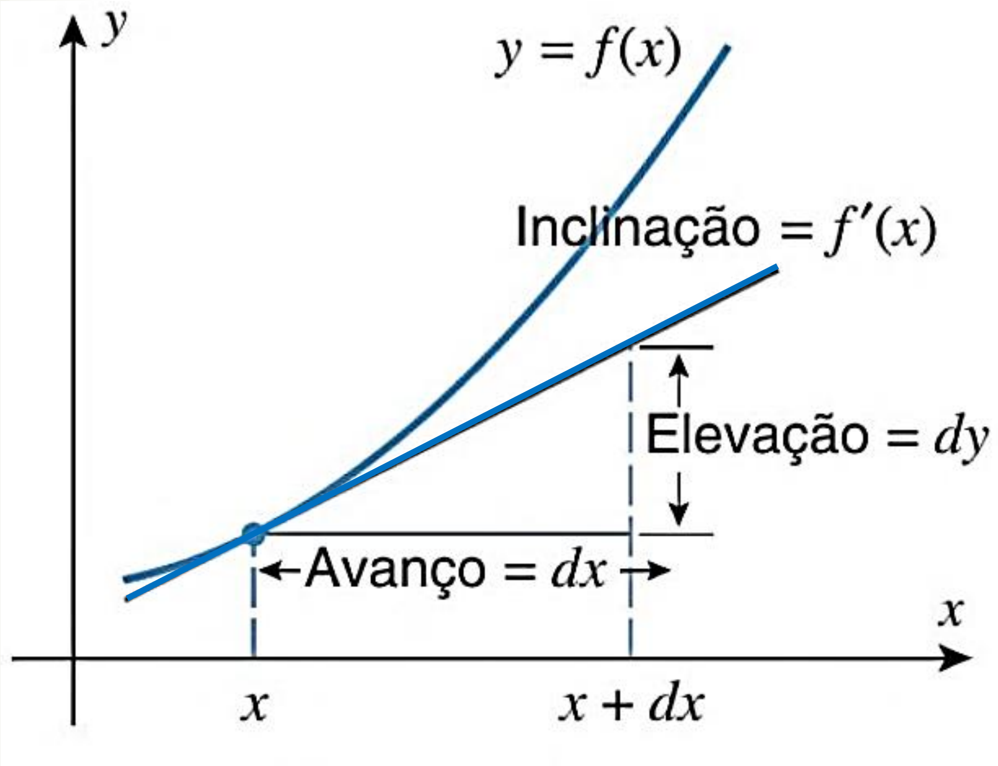
Diferenciais

- Geometricamente, $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente gráfico de f em x;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Diferenciais

- Geometricamente, $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente gráfico de f em x;



- As **diferenciais** podem ser vistas como **elevação e avanço dessa reta tangente**.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo

Expresse a derivada em relação a $\boldsymbol{x}$ de $y = x^2$ na forma diferencial e discuta a relação entre dy e dx.

Exemplo

Expresse a derivada em relação a $\boldsymbol{x}$ de $y = x^2$ na forma diferencial e discuta a relação entre dy e dx.

- O avanço de uma unidade em dx produz uma avanço de duas unidades em dy ao longo da reta tangente.

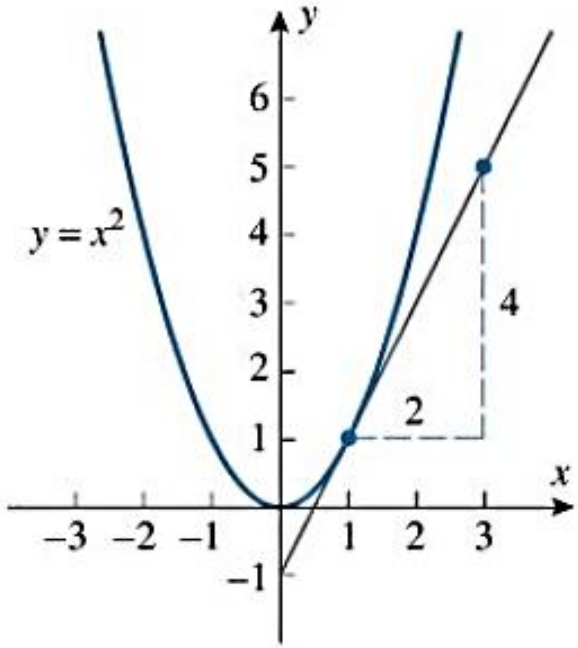
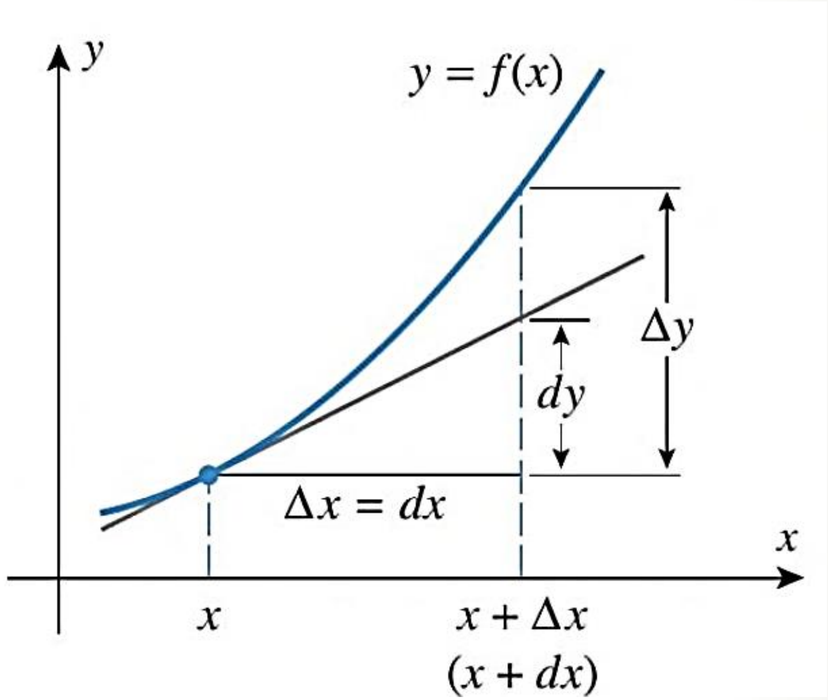


Figura 3.5.6

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Diferença entre incremento e diferencial

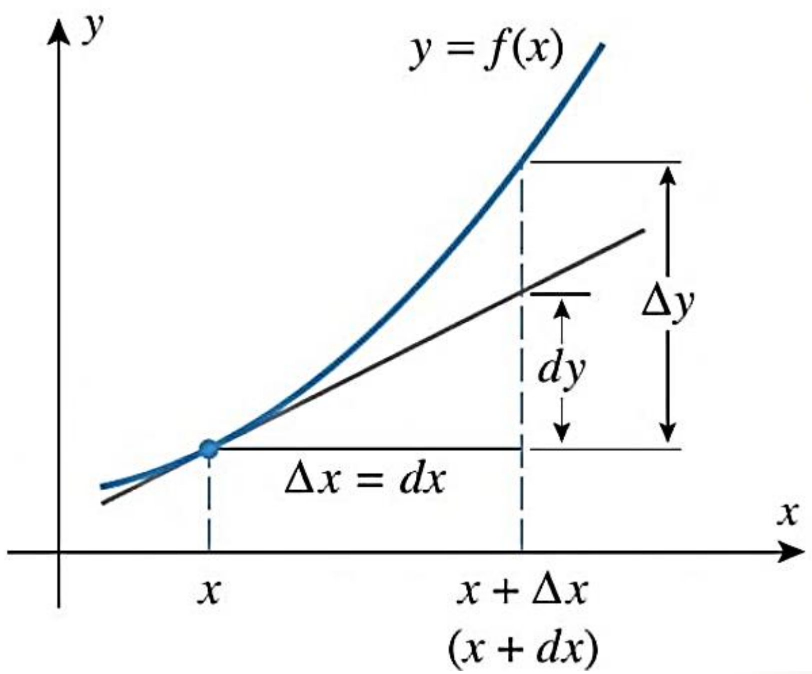
- Seja $\boldsymbol{dx} = \Delta\boldsymbol{x}$;
- Caminha-se de $\boldsymbol{x}$ até $\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}$;



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Diferença entre incremento e diferencial

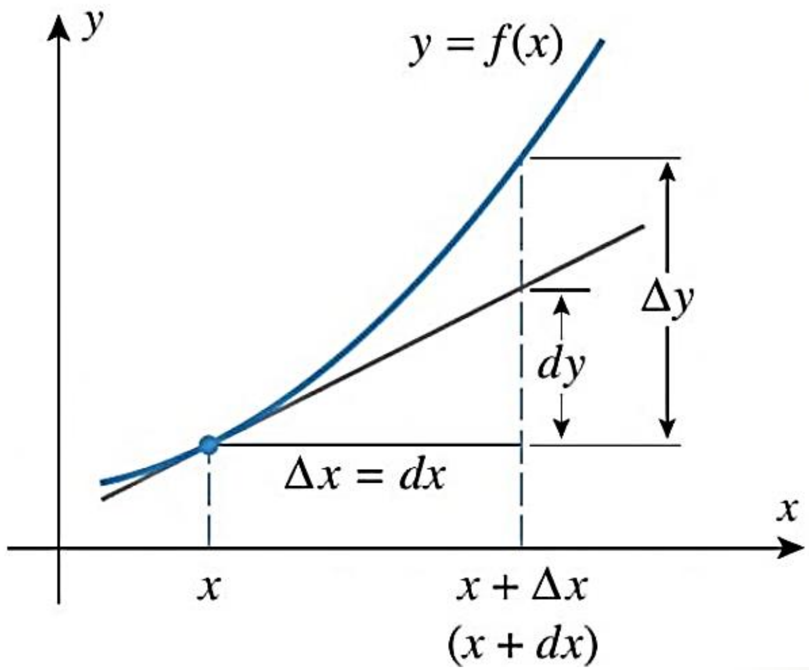
- Seja $\boldsymbol{dx} = \Delta \boldsymbol{x}$;
- Caminha-se de $\boldsymbol{x}$ até $\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}$;
- $\Delta \boldsymbol{y}$**:** variação em $\boldsymbol{y}$ quando se percorre a curva $y = f(x)$;



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Diferença entre incremento e diferencial

- Seja $\boldsymbol{dx} = \Delta \boldsymbol{x}$;
- Caminha-se de $\boldsymbol{x}$ até $\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}$;
- $\Delta \boldsymbol{y}$: variação em $\boldsymbol{y}$ quando se percorre a curva $y = f(x)$;
- $\boldsymbol{dy}$: variação em $\boldsymbol{y}$ quando se caminha ao longo da reta tangente.



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Diferenciais

FÓRMULA PARA DERIVADA	FÓRMULA PARA DIFERENCIAL
$\frac{d}{dx}[c] = 0$	$d[c] = 0$
$\frac{d}{dx}[cf] = c\frac{df}{dx}$	$d[cf] = c\,df$
$\frac{d}{dx}[f+g] = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$	$d[f+g] = df + dg$
$\frac{d}{dx}[fg] = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$	$d[fg] = f\,dg + g\,df$
$\frac{d}{dx}\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$	$d\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

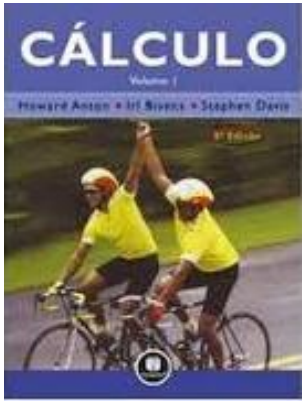
Para depois desta aula:

- Reler o capítulo no livro texto.
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Fazer a lista de exercícios.

Próxima aula:

- Derivada implícita, logarítmica e exponencial.

Bibliografia



1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.

Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br