Cálculo II

Bacharelado e Engenharias

Semana 08 - Aula 3
Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Integrais duplas sobre regiões gerais

- Nas integrais duplas, queremos integrar a função f não somente sobre retângulos.
- Existem regiões curvilíneas como da Figura 1 e estas também podem ser integradas.

Integrais duplas sobre regiões gerais

- Nas integrais duplas, queremos integrar a função f não somente sobre retângulos.
- Existem regiões curvilíneas como da Figura 1 e estas também podem ser integradas.
- Vamos supor que uma região D seja uma região limitada.
- Isto significa que D pode estar contida em uma região retangular R como na Figura 2.

Integrais duplas sobre regiões gerais

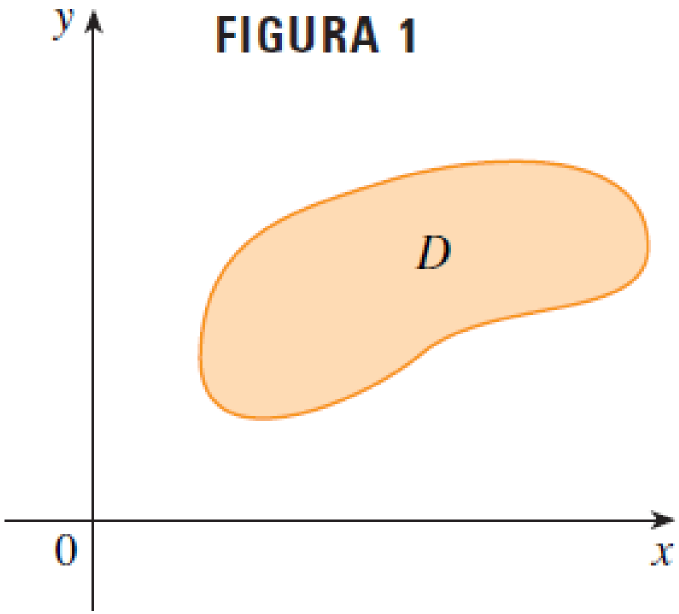


FIGURA 1

Integrais duplas sobre regiões gerais

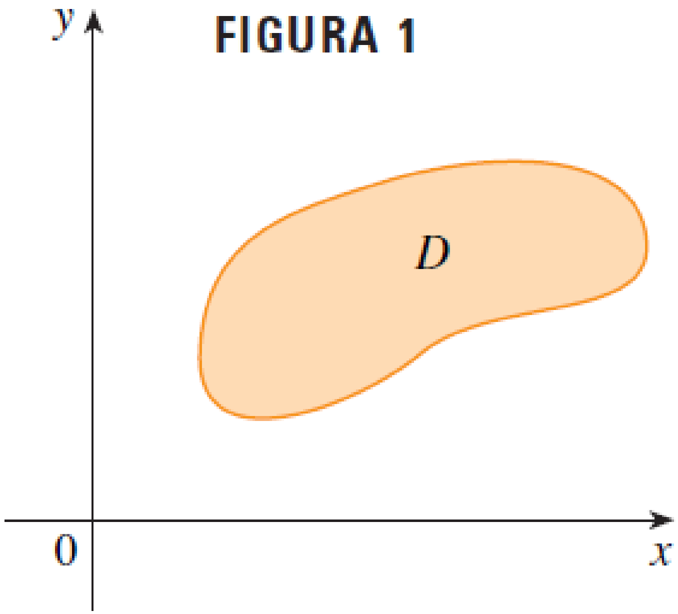


FIGURA 1

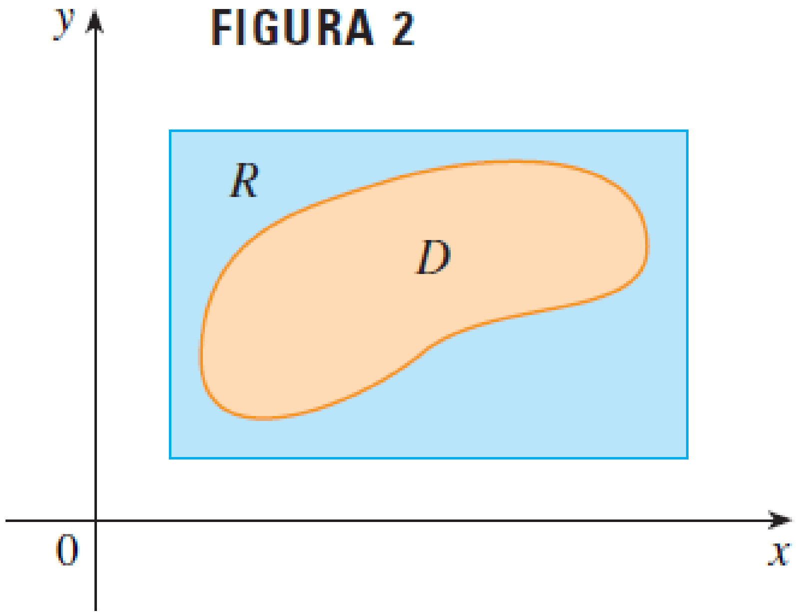


FIGURA 2

Integrais duplas sobre regiões gerais

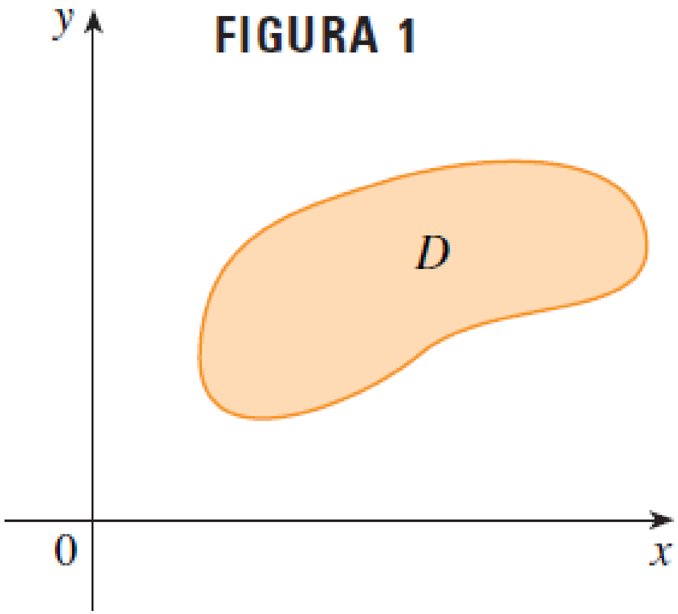


FIGURA 1

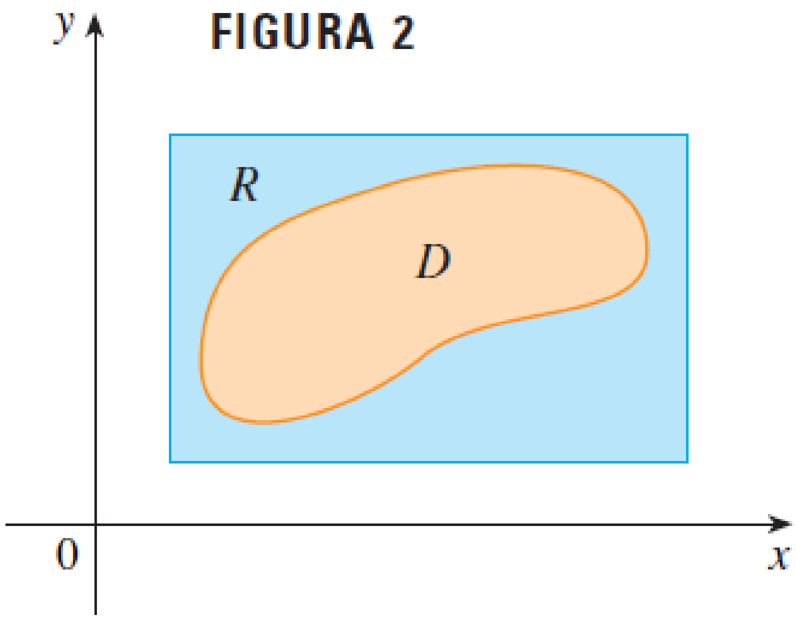


FIGURA 2

- Definimos uma nova função F, com domínio R, por:

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \text{ está em } D \\ 0 & \text{se } (x, y) \text{ está em } R \text{ mas não em } D \end{cases} \qquad 1$$

Integrais duplas sobre regiões gerais

- Se F for integrável em R, então definimos a **integral dupla de *f* em D** por:

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R F(x, y)\, dA \qquad \text{onde } F \text{ é dada pela Equação 1}$$

Integrais duplas sobre regiões gerais

- Se F for integrável em R, então definimos a **integral dupla de *f* em D** por:

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R F(x, y)\, dA \qquad \text{onde } F \text{ é dada pela Equação 1}$$

- Isso significa que não importa qual o retângulo R tomado, desde que contenha D.

Integrais duplas sobre regiões gerais

- Se F for integrável em R, então definimos a **integral dupla de *f* em D** por:

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R F(x, y)\, dA \qquad \text{onde } F \text{ é dada pela Equação 1}$$

- Isso significa que não importa qual o retângulo R tomado, desde que contenha D.
- No caso em que $f(x, y) \geq 0$, podemos ainda interpretar como o volume do sólido que está acima de D e abaixo da superfície z = *f*(x, y).

Tipos particulares de regiões

Região plana do tipo I – contínua em x

- Uma região plana D é do **tipo I** se for a região entre o gráfico de duas funções contínuas de x, ou seja:

$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$

Tipos particulares de regiões

Região plana do tipo I – contínua em x

- Uma região plana D é do **tipo I** se for a região entre o gráfico de duas funções contínuas de x, ou seja:

$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$

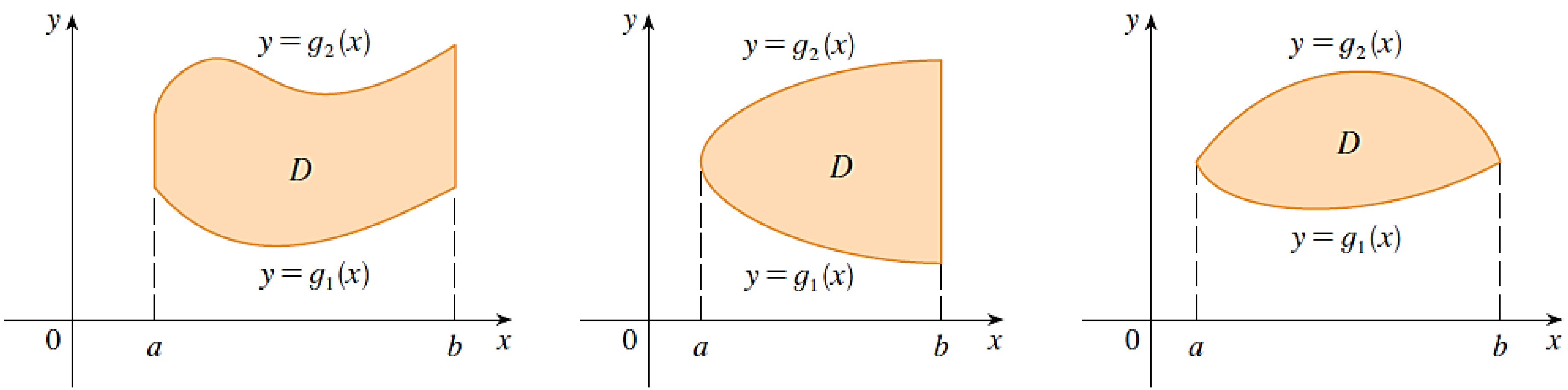
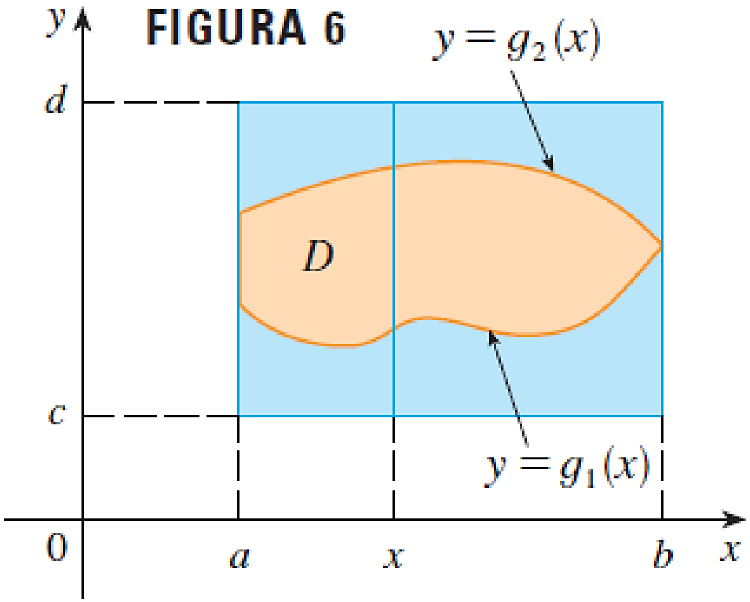


FIGURA 5 Algumas regiões do tipo I

Tipos particulares de regiões

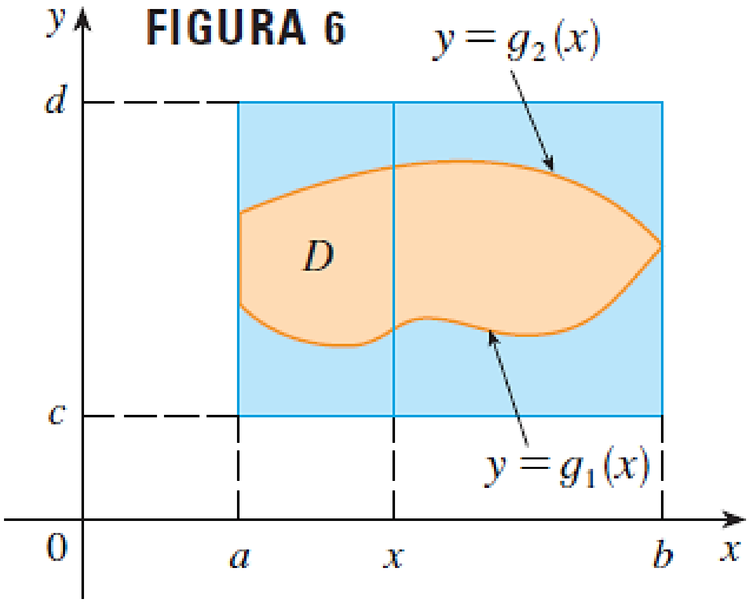
- Para calcularmos a integral quando D é do tipo I, escolhemos um retângulo R = [a, b] × [c, d] que contenha D, como na Figura 6



Tipos particulares de regiões

- Para calcularmos a integral quando D é do tipo I, escolhemos um retângulo R = [a, b] × [c, d] que contenha D, como na Figura 6

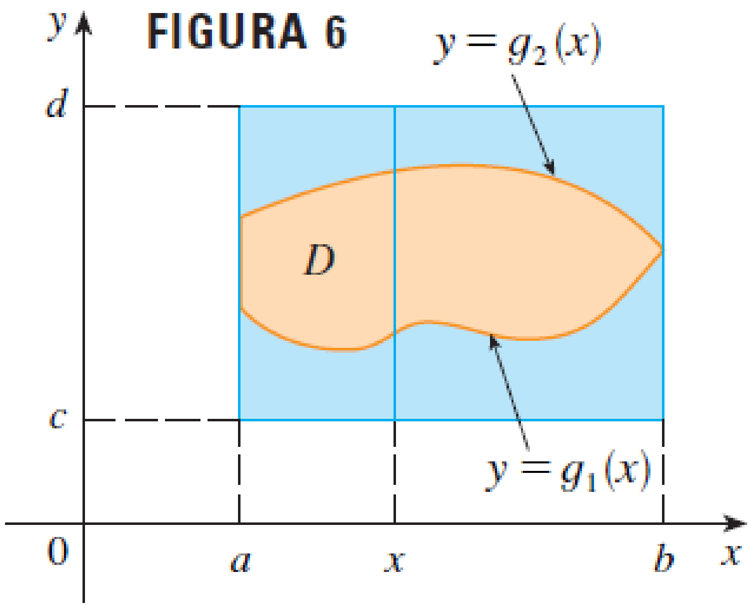
FIGURA 6



- Pelo teorema de Fubini:

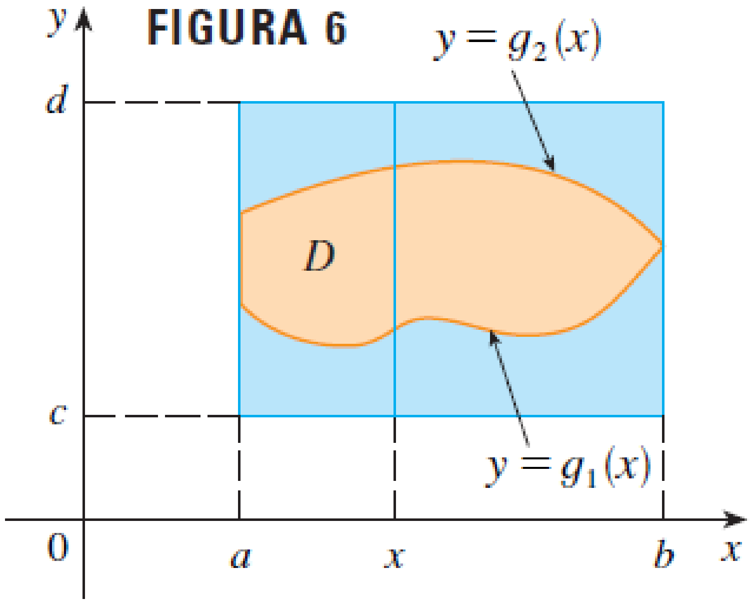
$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R F(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d F(x, y)\, dy\, dx$$

Tipos particulares de regiões



- Observamos que F(x, y) = 0 se $y < g_1(x)$ ou $y > g_2(x)$.

Tipos particulares de regiões



- Observamos que F(x, y) = 0 se $y < g_1(x)$ ou $y > g_2(x)$.

- Portanto, temos a seguinte expressão para o tipo I:

$$\int_c^d F(x, y)\, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y)\, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy$$

Tipos particulares de regiões

Região plana do tipo II – contínua em y

- Uma região plana D é do **tipo II** se for a região entre o gráfico de duas funções contínuas de y, ou seja:

$$D = \left\{(x, y) \,\middle|\, c \leqslant y \leqslant d,\ h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\right\}$$

Tipos particulares de regiões

Região plana do tipo II – contínua em y

- Uma região plana D é do **tipo II** se for a região entre o gráfico de duas funções contínuas de y, ou seja:

$$D = \{(x, y) \mid c \leqslant y \leqslant d,\ h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\}$$

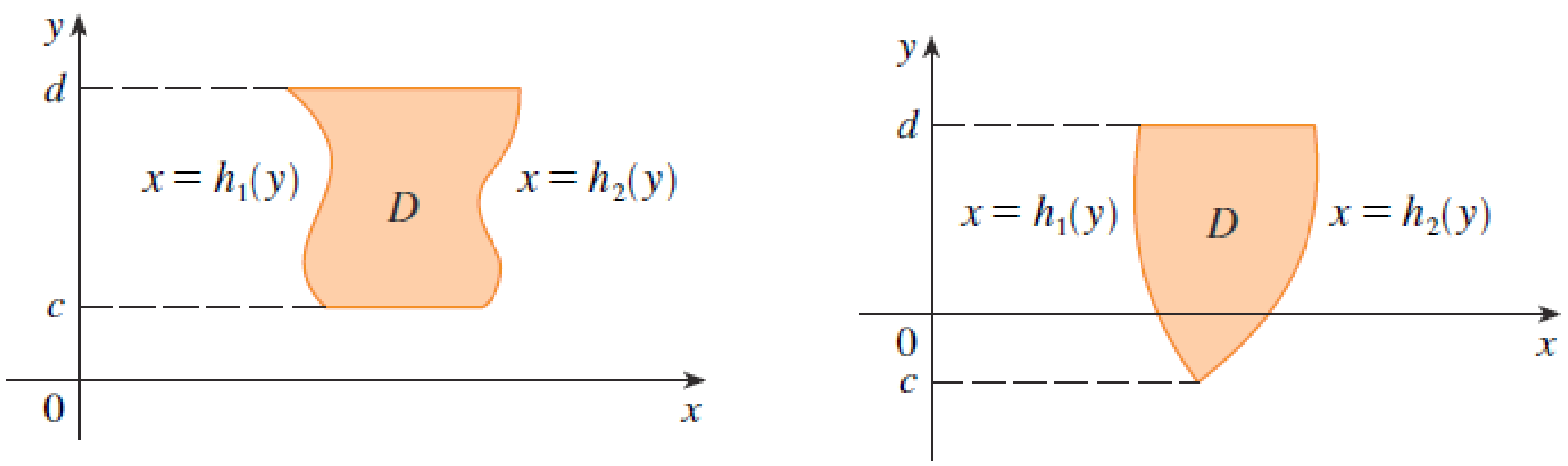


FIGURA 7 Algumas regiões do tipo II

Tipos particulares de regiões

- Para calcularmos a integral quando D é do tipo II, escolhemos um retângulo R = [a, b] × [c, d] que contenha D.

- Pelo teorema de Fubini:

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

Integrais duplas em regiões gerais **Exemplo 1**

Calcule $\iint_D (x + 2y)\, dA$, onde D é a região limitada pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

Integrais duplas em regiões gerais **Exemplo 1**

Calcule $\iint_D (x + 2y)\, dA$, onde D é a região limitada pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

Solução:

As parábolas se interceptam quando

$$2x^2 = 1 + x^2$$

$$x^2 = 1, \qquad \text{logo, } x = \pm 1.$$

Integrais duplas em regiões gerais Exemplo 1

Calcule $\iint_D (x + 2y)\, dA$, onde D é a região limitada pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

Solução:

As parábolas se interceptam quando

$$2x^2 = 1 + x^2$$

$$x^2 = 1, \qquad \text{logo, } x = \pm 1.$$

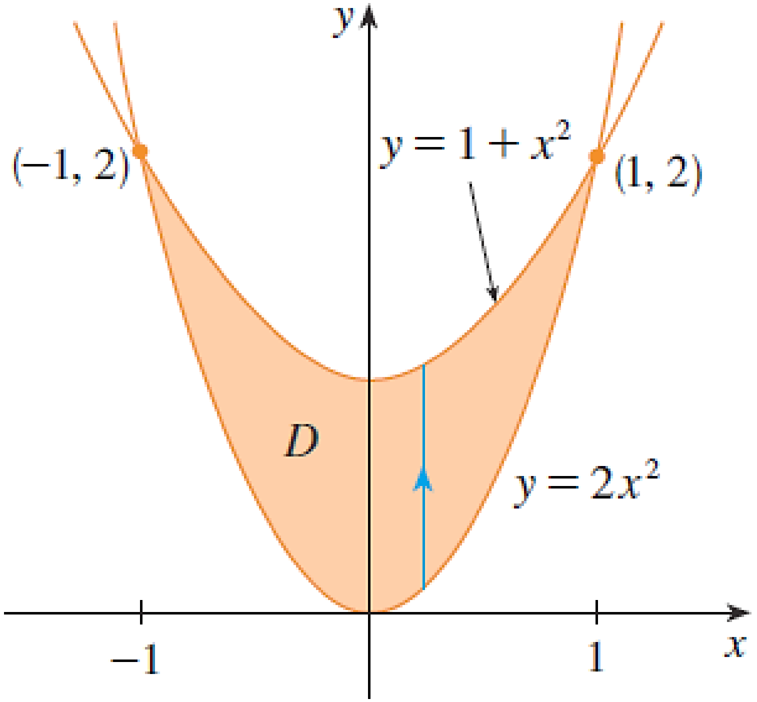


FIGURA 8

Integrais duplas em regiões gerais **Exemplo 1**

Calcule $\iint_D (x + 2y)\, dA$, onde D é a região limitada pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

Solução:

As parábolas se interceptam quando

$$2x^2 = 1 + x^2$$

$$x^2 = 1, \qquad \text{logo, } x = \pm 1.$$

Observamos que a região D, é uma região do tipo I, e podemos escrever

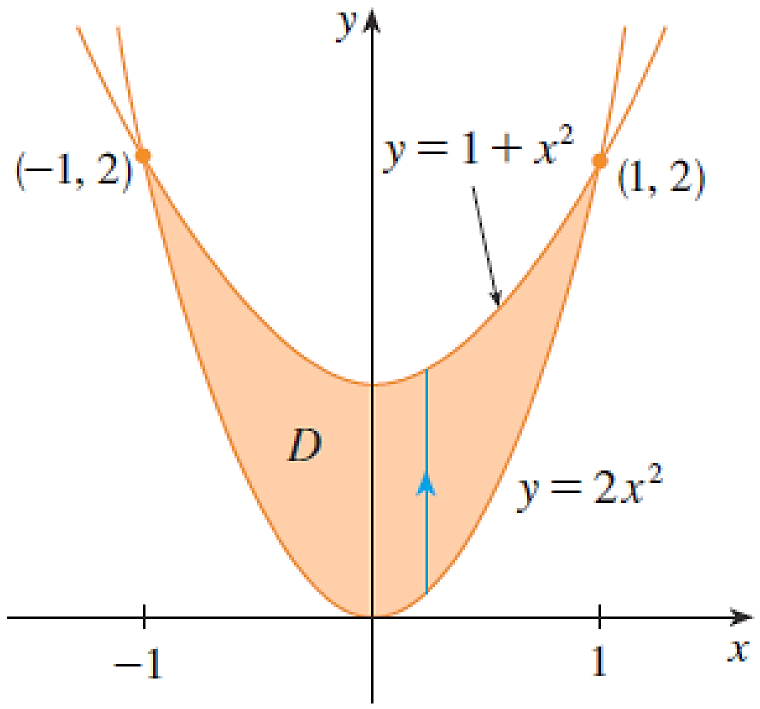


FIGURA 8

$$D = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 2x^2 \leqslant y \leqslant 1 + x^2\}$$

Integrais duplas em regiões gerais Exemplo 1

Solução - continuação:

Como o limite inferior é $y = 2x^2$ e o superior é $y = 1 + x^2$, a Equação 3 leva a

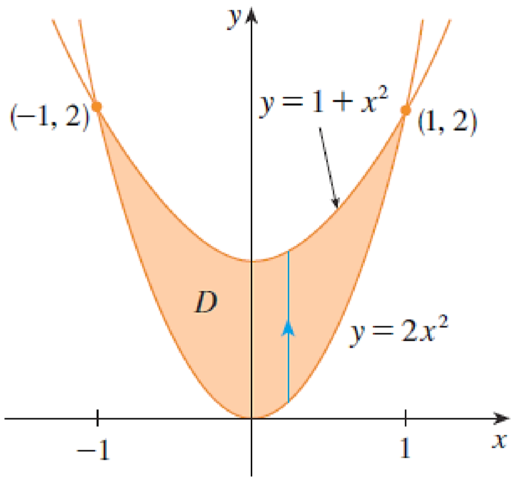


FIGURA 8

Integrais duplas em regiões gerais Exemplo 1

Solução - continuação:

Como o limite inferior é $y = 2x^2$ e o superior é $y = 1 + x^2$, a Equação 3 leva a

$$\iint_D (x + 2y)\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)\, dy\, dx$$

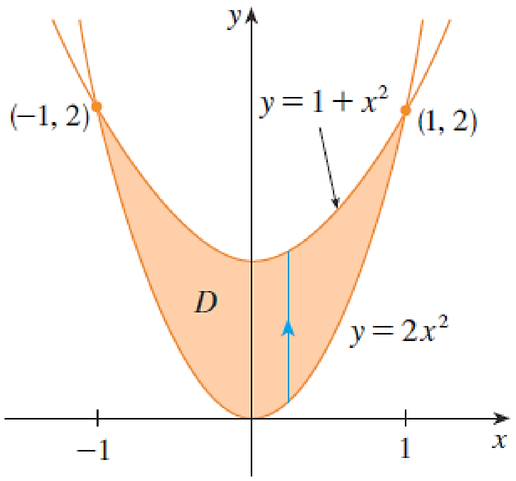


FIGURA 8

Integrais duplas em regiões gerais Exemplo 1

Solução - continuação:

Como o limite inferior é $y = 2x^2$ e o superior é $y = 1 + x^2$, a Equação 3 leva a

$$\iint_D (x + 2y)\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[xy + y^2\right]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx$$

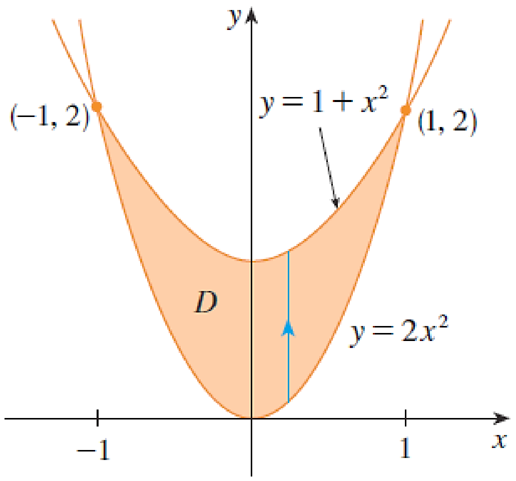


FIGURA 8

Integrais duplas em regiões gerais Exemplo 1

Solução - continuação:

Como o limite inferior é $y = 2x^2$ e o superior é $y = 1 + x^2$, a Equação 3 leva a

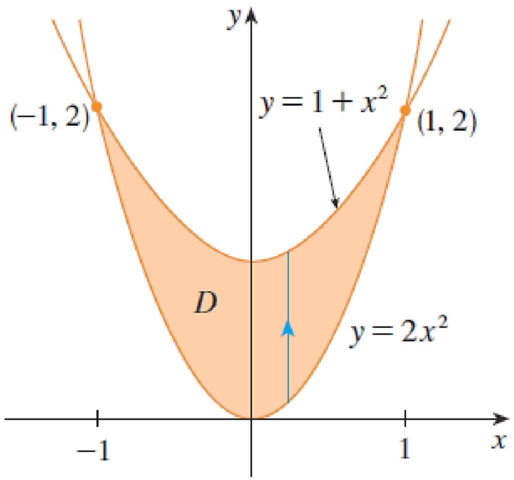


FIGURA 8

$$\iint_D (x + 2y)\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[xy + y^2\right]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} [x(1 + x^2) + (1 + x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2]\, dx$$

 Exemplo 1

Solução - continuação:

Como o limite inferior é $y = 2x^2$ e o superior é $y = 1 + x^2$, a Equação 3 leva a

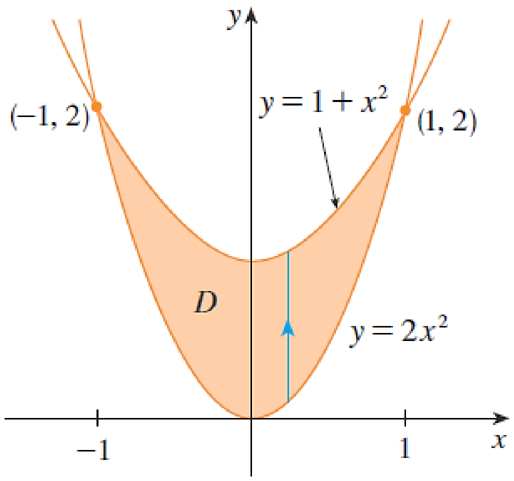


FIGURA 8

$$\iint_D (x + 2y)\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \Big[xy + y^2\Big]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} [x(1 + x^2) + (1 + x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2]\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1)\, dx$$

Integrais duplas em regiões gerais Exemplo 1

Solução - continuação:

Como o limite inferior é $y = 2x^2$ e o superior é $y = 1 + x^2$, a Equação 3 leva a

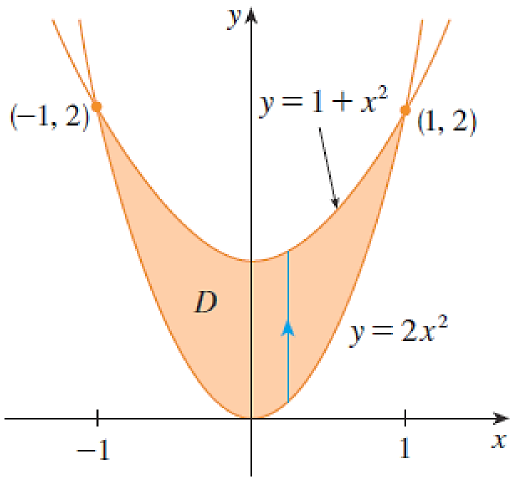


FIGURA 8

$$\iint_D (x + 2y)\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[xy + y^2\right]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} [x(1 + x^2) + (1 + x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2]dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1)\, dx$$

$$= -3\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\Big]_{-1}^{1} = \frac{32}{15}$$

Integrais duplas em regiões gerais Exemplo 2

Determine o volume do sólido que está abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.

Integrais duplas em regiões gerais **Exemplo 2**

Determine o volume do sólido que está abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.

Solução 1:

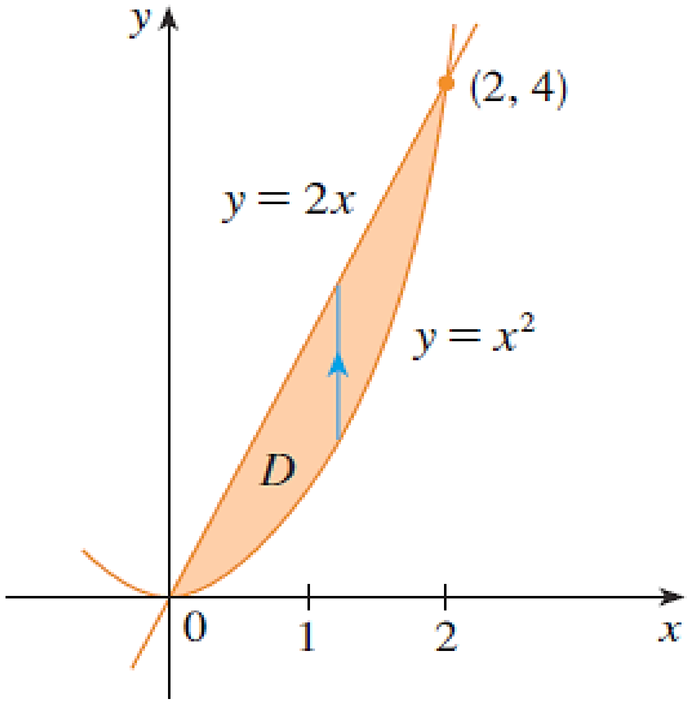


FIGURA 9
D como uma região do tipo I

Integrais duplas em regiões gerais **Exemplo 2**

Determine o volume do sólido que está abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.

Solução 1:

Da Figura 9 vemos que D é uma região do tipo I e

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ x^2 \leqslant y \leqslant 2x\}$$

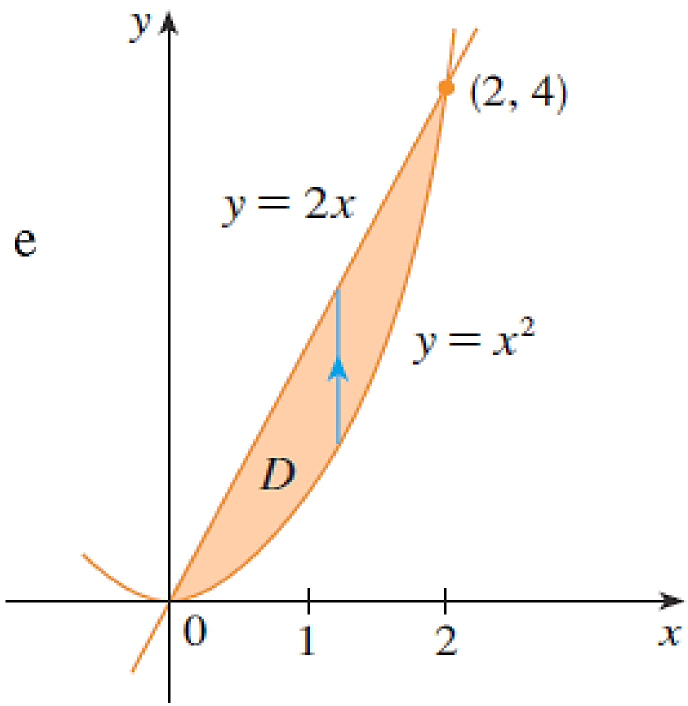


FIGURA 9
D como uma região do tipo I

Integrais duplas em regiões gerais **Exemplo 2**

Portanto, o volume abaixo de $z = x^2 + y^2$ e acima de D é

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

Integrais duplas em regiões gerais Exemplo 2

Portanto, o volume abaixo de $z = x^2 + y^2$ e acima de D é

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx = \int_0^2 \left[x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3} - x^2 x^2 - \frac{(x^2)^3}{3} \right] dx$$

Integrais duplas em regiões gerais Exemplo 2

Portanto, o volume abaixo de $z = x^2 + y^2$ e acima de D é

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx = \int_0^2 \left[x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3} - x^2 x^2 - \frac{(x^2)^3}{3} \right] dx$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3} \right) dx = -\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6} \Bigg]_0^2 = \frac{216}{35}$$

Integrais duplas em regiões gerais **Exemplo 2**

Determine o volume do sólido que está abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.

Solução 2:

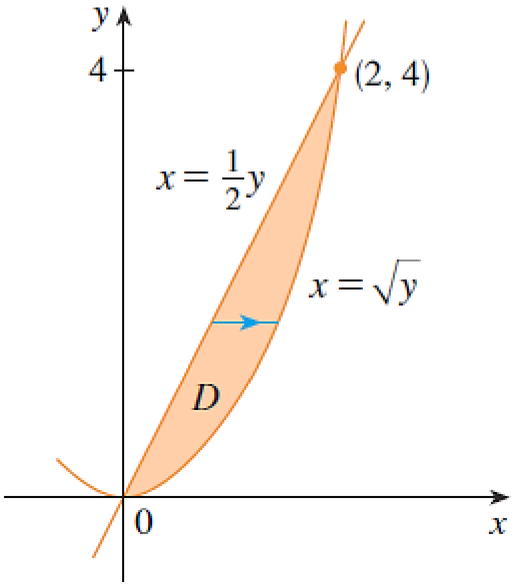


FIGURA 10
D como uma região do tipo II

Integrais duplas em regiões gerais **Exemplo 2**

Determine o volume do sólido que está abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.

Solução 2:

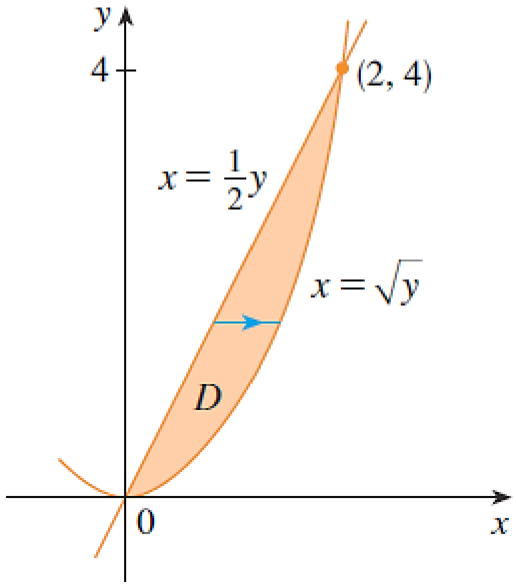


FIGURA 10
D como uma região do tipo II

Da Figura 10, vemos que D pode ser descrita como uma região do tipo II:

$$D = \left\{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 4,\ \tfrac{1}{2}y \leqslant x \leqslant \sqrt{y}\right\}$$

Integrais duplas em regiões gerais **Exemplo 2**

Determine o volume do sólido que está abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.

Solução 2:

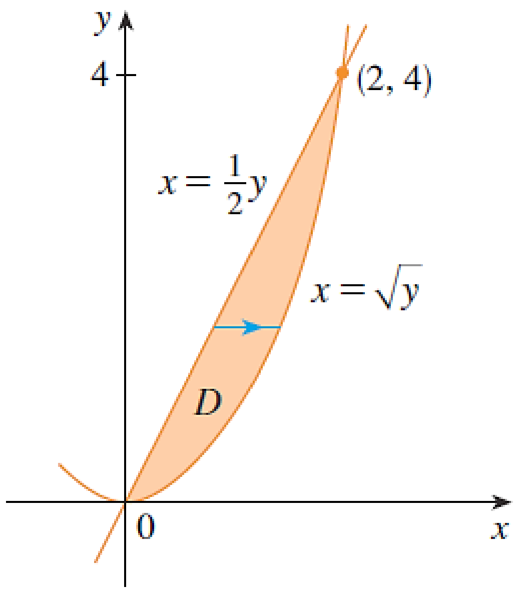


FIGURA 10
D como uma região do tipo II

Da Figura 10, vemos que D pode ser descrita como uma região do tipo II:

$$D = \left\{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 4,\ \tfrac{1}{2}y \leqslant x \leqslant \sqrt{y}\right\}$$

Logo, outra expressão para V é

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\, dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

Integrais duplas em regiões gerais **Exemplo 2**

Solução 2:

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\, dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

Integrais duplas em regiões gerais **Exemplo 2**

Solução 2:

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\,dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} dy$$

Integrais duplas em regiões gerais **Exemplo 2**

Solução 2:

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\,dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2} \right) dy$$

Integrais duplas em regiões gerais Exemplo 2

Solução 2:

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\,dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2} \right) dy$$

$$= \tfrac{2}{15} y^{5/2} + \tfrac{2}{7} y^{7/2} - \tfrac{13}{96} y^4 \Big]_0^4$$

Integrais duplas em regiões gerais **Exemplo 2**

Solução 2:

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\,dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2} \right) dy$$

$$= \tfrac{2}{15} y^{5/2} + \tfrac{2}{7} y^{7/2} - \tfrac{13}{96} y^4 \Big]_0^4$$

$$= \frac{216}{35}$$

Integrais duplas em regiões gerais Exemplo 2

Solução 2:

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\, dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2} \right) dy$$

$$= \frac{2}{15} y^{5/2} + \frac{2}{7} y^{7/2} - \frac{13}{96} y^4 \Big]_0^4$$

$$= \frac{216}{35}$$

A Figura 11 mostra o sólido cujo volume é calculado no Exemplo 2. Ele está acima do plano xy, abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e entre o plano $y = 2x$ e o cilindro parabólico $y = x^2$.

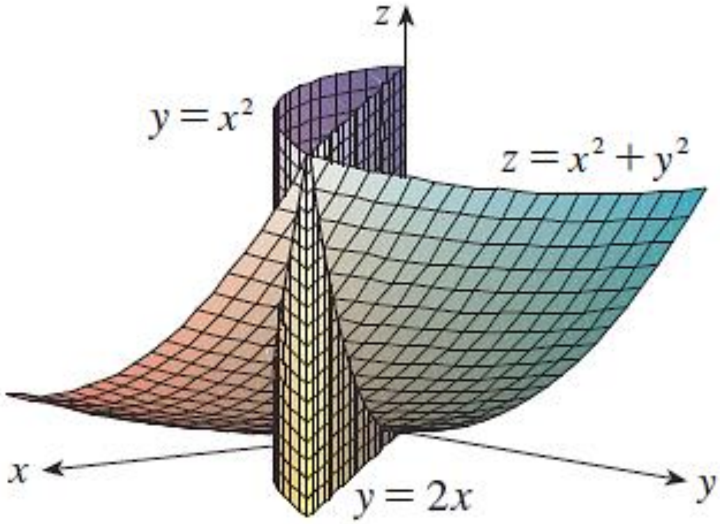


FIGURA 11

Integrais duplas em regiões gerais **Exemplo 3**

Determine o volume do tetraedro limitado pelos planos

$x + 2y + z = 2, \quad x = 2y, \quad x = 0$ e $z = 0.$

 Exemplo 3

Determine o volume do tetraedro limitado pelos planos

$x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.

Solução:

É prudente desenhar dois diagramas:
um do sólido tridimensional e outro da
região plana D

Integrais duplas em regiões gerais Exemplo 3

Determine o volume do tetraedro limitado pelos planos

$x + 2y + z = 2, \quad x = 2y, \quad x = 0$ e $z = 0$.

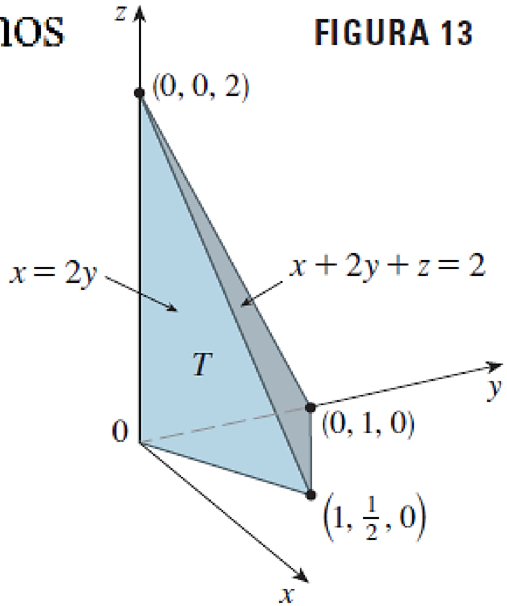


FIGURA 13

Solução:

É prudente desenhar dois diagramas: um do sólido tridimensional e outro da região plana D

Integrais duplas em regiões gerais Exemplo 3

Determine o volume do tetraedro limitado pelos planos

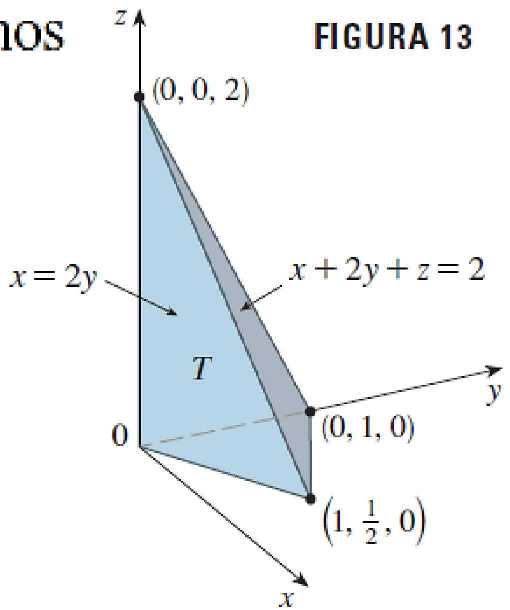
$x + 2y + z = 2, \quad x = 2y, \quad x = 0$ e $z = 0$.

Solução:

É prudente desenhar dois diagramas: um do sólido tridimensional e outro da região plana D

Como o plano $x + 2y + z = 2$ intercepta o plano xy cuja equação é $z = 0$ na reta $x + 2y = 2$, vemos que T está acima da região triangular D no plano xy limitado pelas retas $x = 2y$, $x + 2y = 2$ e $x = 0$.

FIGURA 13



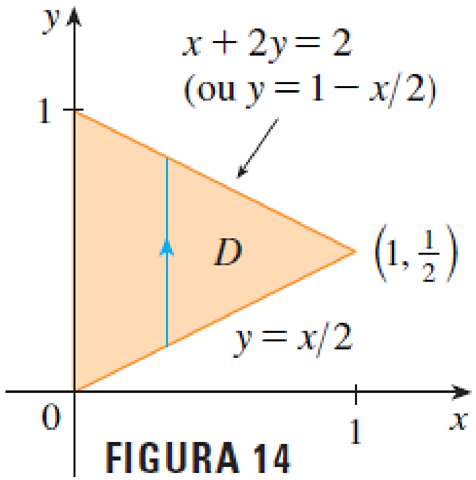


FIGURA 14

Integrais duplas em regiões gerais Exemplo 3

Solução:

O plano $x + 2y + z = 2$ pode ser escrito como $z = 2 - x - 2y$, de modo que o volume pedido está sob o gráfico da função $z = 2 - x - 2y$ e acima de

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x/2 \leqslant y \leqslant 1 - x/2\}$$

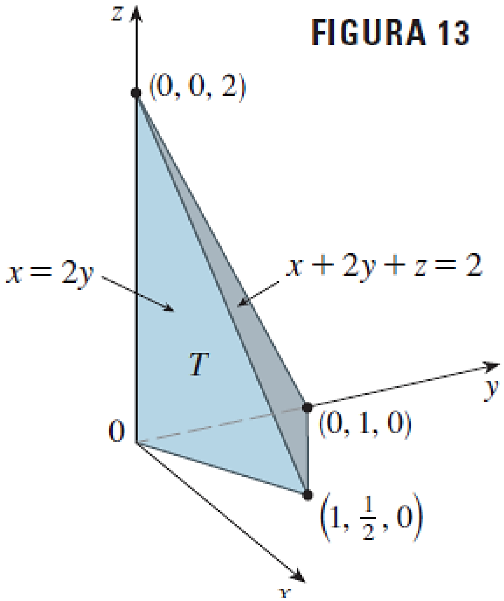


FIGURA 13

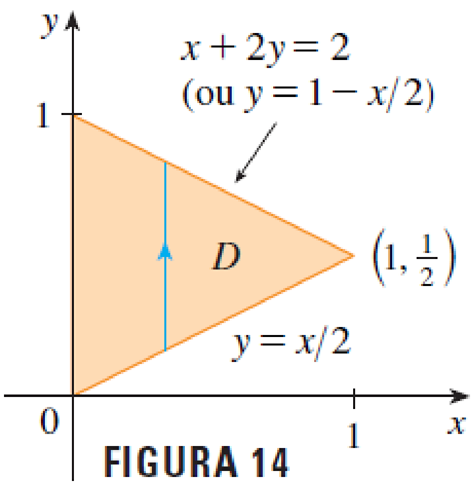


FIGURA 14

Integrais duplas em regiões gerais Exemplo 3

Solução:

O plano $x + 2y + z = 2$ pode ser escrito como $z = 2 - x - 2y$, de modo que o volume pedido está sob o gráfico da função $z = 2 - x - 2y$ e acima de

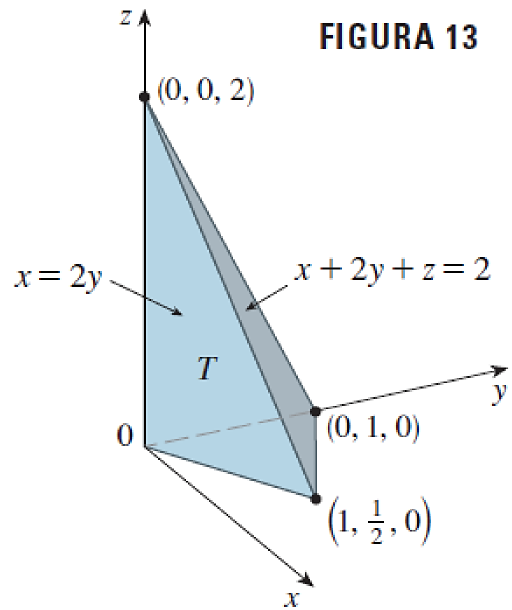


FIGURA 13

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x/2 \leqslant y \leqslant 1 - x/2\}$$

Portanto,

$$V = \iint_D (2 - x - 2y)\, dA = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx$$

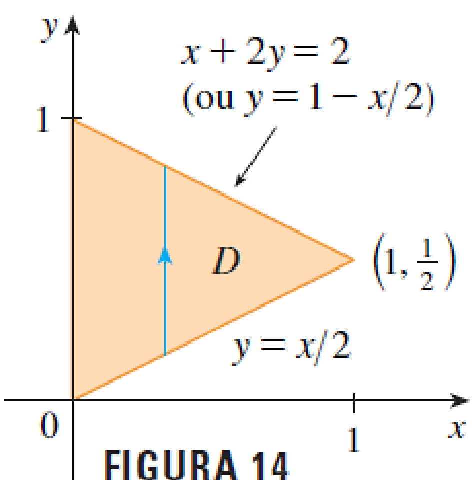


FIGURA 14

Integrais duplas em regiões gerais Exemplo 3

Solução - continuação:

$$V = \iint_D (2 - x - 2y)\, dA = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx$$

Integrais duplas em regiões gerais **Exemplo 3**

Solução - continuação:

$$V = \iint_D (2 - x - 2y)\, dA = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[2y - xy - y^2\right]_{y=x/2}^{y=1-x/2} dx$$

Integrais duplas em regiões gerais Exemplo 3

Solução - continuação:

$$V = \iint_D (2 - x - 2y)\, dA = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[2y - xy - y^2\right]_{y=x/2}^{y=1-x/2} dx$$

$$= \int_0^1 \left[2 - x - x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}\right] dx$$

Integrais duplas em regiões gerais **Exemplo 3**

Solução - continuação:

$$V = \iint_D (2 - x - 2y)\, dA = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[2y - xy - y^2\right]_{y=x/2}^{y=1-x/2} dx$$

$$= \int_0^1 \left[2 - x - x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}\right] dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\, dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x \Big]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Propriedade das integrais duplas

$$\iint_D [f(x,y) + g(x,y)]\,dA = \iint_D f(x,y)\,dA + \iint_D g(x,y)\,dA$$

$$\iint_D c f(x,y)\,dA = c \iint_D f(x,y)\,dA$$

Propriedade das integrais duplas

$$\iint_D [f(x,y) + g(x,y)]\, dA = \iint_D f(x,y)\, dA + \iint_D g(x,y)\, dA$$

$$\iint_D c f(x,y)\, dA = c \iint_D f(x,y)\, dA$$

Se $f(x,y) \geqslant g(x,y)$ para todo (x,y) em R, então

$$\iint_D f(x,y)\, dA \geqslant \iint_D g(x,y)\, dA$$

Propriedade das integrais duplas

$$\iint_D [f(x, y) + g(x, y)]\, dA = \iint_D f(x, y)\, dA + \iint_D g(x, y)\, dA$$

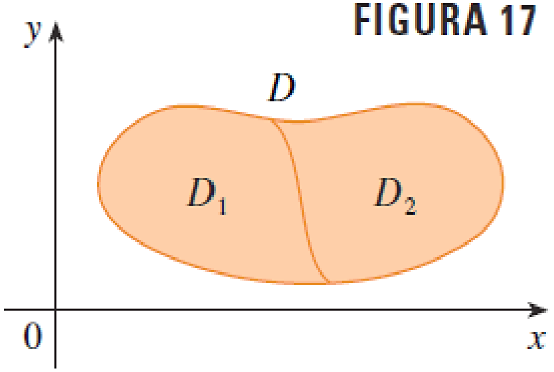
$$\iint_D c f(x, y)\, dA = c \iint_D f(x, y)\, dA$$

Se $f(x, y) \geqslant g(x, y)$ para todo (x, y) em R, então

$$\iint_D f(x, y)\, dA \geqslant \iint_D g(x, y)\, dA$$

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_{D_1} f(x, y)\, dA + \iint_{D_2} f(x, y)\, dA$$

FIGURA 17



Para depois desta aula:

- Estudar seção 15.3 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar com a lista de exercícios.

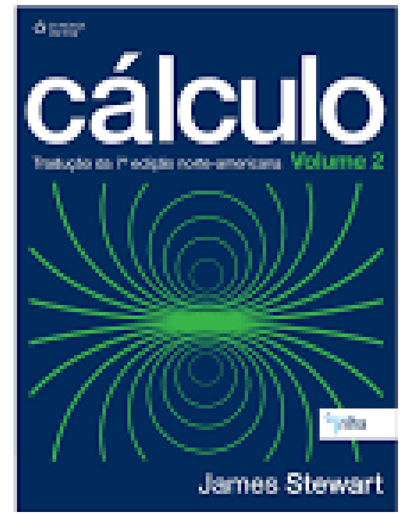
Próxima aula:

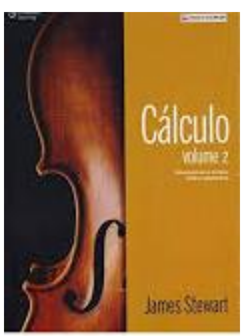
- Integrais duplas em coordenadas polares.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed.





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.

Contatos

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br